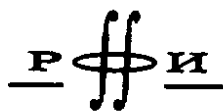


УДК 530.1
ББК 22.31
И69



Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 02-01-14115

Инстантоны, струны и конформная теория поля: Сб. статей /
Под ред. А. А. Белавина. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 448 с. — ISBN
5-9221-0303-2.

Сборник состоит из 24 статей, посвященных вопросам современной квантовой теории поля (конформная симметрия критических явлений, факторизованное рассеяние в двумерных теориях, инстантоны и монополи в калибровочных теориях, взаимодействие релятивистских струн) и ее математическому анализу (алгебраическая топология, теория представлений бесконечномерных алгебр Ли, теория квантовых групп и др.). Статьи опубликованы в отечественных и зарубежных периодических изданиях в период 1970–1990 гг.

Научное издание

ИНСТАНТОНЫ, СТРУНЫ И КОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Редактор *Е. С. Артоболевская*
Оригинал-макет: *Д. В. Горбачев*
Оформление переплета: *А. А. Логунов*

ЛР № 071930 от 06.07.99
Подписано в печать 22.08.02. Формат 60×90/16
Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 28. Уч.-изд. л. 30,8. Тираж 300 экз.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

ISBN 5-9221-0303-2



Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6

ISBN 5-9221-0303-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2002

Оглавление

Предисловие составителя сборника	6
--	---

ЧАСТЬ I

ТОПОЛОГИЯ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Поляков А.М.

Спектр частиц в квантовой теории поля	8
(Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 430–433)	

Поляков А.М.

Изомерные состояния квантовых полей	12
(ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 1975–1990)	

Белавин А.А., Поляков А.М., Тюпкин Ю.С. и Шварц А.С.

Псевдочастичные решения уравнений Янга–Миллса	31
(Phys. Lett. 59B (1975). P. 85–87)	

Белавин А.А., Поляков А.М.

Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика	35
(Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 22. С. 503–506)	

Фатеев В.А., Фролов И.В. и Шварц А.С.

Квантовые флуктуации инстантонов в нелинейной σ -модели	39
(Nuclear Physics. B154 (1979). P. 1–20)	

ЧАСТЬ II

БУТСТРАПНЫЙ ПОДХОД В КОНФОРМНОЙ И ИНТЕГРИРУЕМОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Поляков А.М.

Конформная симметрия критических флуктуаций	63
(Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12. С. 538–541)	

Поляков А.М.

Негамильтонов подход в конформной квантовой теории поля	67
(ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 23–42)	

Вергелес С.Н., Гряник В.М.

- Двумерные квантовые теории поля, допускающие точные решения 92
(Ядерная физика. 1976. Т. 23. С. 1324–1334)

Замолодчиков А.Б.

- Точная двухчастичная S -матрица солитонов в квантовой модели синус-Гордона 106
(Commun. Math. Phys. 55 (1977). P. 183–186)

Замолодчиков Ал.Б., Замолодчиков А.Б.

- Факторизованные S -матрицы в двух измерениях как точные решения некоторых релятивистских моделей квантовой теории поля 111
(Annals of Physics. 120 (1979). P. 253–291)

Белавин А.А.

- Дискретные группы и интегрируемость квантовых систем . . . 155
(Функциональный анализ и его приложения.
1980. Т. 14. С. 18–26)

Белавин А.А., Дринфельд В.Г.

- О решениях классического уравнения Янга–Бакстера для простых алгебр Ли 167
(Функциональный анализ и его приложения.
1982. Т. 16. С. 1–29)

Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б.

- Модули Верма над алгеброй Вирасоро 208
(Lecture Notes in Math (Spr. Ver.). 1060 (1984). P. 230–245)

Белавин А.А., Замолодчиков А.Б., Поляков А.М.

- Бесконечная конформная симметрия в двумерной квантовой теории поля 224
(Nuclear Physics. B241 (1984). P. 333–380)

Доценко Вл.С., Фатеев В.А.

- Конформная алгебра и многоточечные корреляционные функции в $2D$ статистических моделях 272
(Nucl. Phys. B240 [FS 12] (1984). P. 312–348)

Замолодчиков А.Б., Книжник В.Г.

- Алгебра токов и двумерная модель Весса–Зумино 311
(Nuclear Physics. B247 (1984). P. 83–103)

Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А.

- Нелокальные (парафермионные) токи в двумерной конформной квантовой теории поля и самодуальные критические точки в Z_N -симметричных статистических системах 332
(ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 380–399)

Белавин А.А.

Уравнения типа КдФ и W -алгебры	360
---	-----

(Advanced Studies in Pure Mathematics.
Integrable Systems in Quantum Field Theory
and Statistical Mechanics. 19 (1989). P. 117–125)

Лукьянов С.Л., Фатеев В.А.

Модели двумерной конформной квантовой теории поля с Z_n -симметрией	369
--	-----

(International Journal of Modern Physics A.
V. 3, № 2 (1988). P. 507–520)

ЧАСТЬ III

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СТРУН

Поляков А.М.

Квантовая геометрия бозонных струн	386
--	-----

(Phys. Lett. 103B (1981). P. 207–210)

Вергелес С.Н.

Неинвариантность меры в функциональном интеграле — ис- точник аномалий в квантовой теории поля	394
---	-----

(Канд. диссертация. Москва: Черноголовка, 1979)

Белавин А.А., Книжник В.Г.

Комплексная геометрия и теория квантовых струн	398
--	-----

(ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 364–390)

Поляков А.М.

Квантовая гравитация в двух измерениях	435
--	-----

(Mod. Phys. Lett. A. 2 (1987). P. 893–898)

Замолодчиков А.Б., Книжник В.Г., Поляков А.М.

Фрактальные структуры двумерной квантовой гравитации . .	441
--	-----

(Modern Physics Letters A. V. 3, № 8 (1988). P. 819–826)

ПРЕДИСЛОВИЕ СОСТАВИТЕЛЯ СБОРНИКА

Эта книга представляет собой сборник работ группы людей, связанных с Институтом Теоретической физики им. Л.Д. Ландау. Статьи, вошедшие в сборник, выполнены в течение примерно двадцати лет с начала 70-х годов. Работы эти сыграли важную роль в формировании современной квантовой теории поля, включая теорию струн, а также ряда областей математики.

На первый взгляд может показаться, что физические явления, рассматриваемые в этих статьях, а именно: конформная симметрия критических явлений, факторизация рассеяния в двумерных теориях поля, инстантоны и монополи в калибровочных теориях, взаимодействие релятивистских струн, не связаны между собой.

На самом деле все эти явления представляют собой предмет изучения одной области теоретической физики — современной квантовой теории поля. Равным образом как и многообразие математических средств: алгебраическая топология, комплексная геометрия, теория представлений бесконечномерных алгебр Ли, теория квантовых групп и пр., являются частью единого арсенала этой области физики.

Кроме множества неочевидных связей между этими физическими явлениями и подходами к ним существует ещё одно обстоятельство, их объединяющее. Именно, будучи интересными сами по себе, все они в определённом смысле являются фрагментами единой теории Мироздания.

Эта книга может быть использована студентами и специалистами по теории элементарных частиц, физики конденсированного состояния и космологии в качестве дополнения к стандартным учебникам по квантовой теории поля.

Перевод статей с английского языка осуществлен С.Н. Вергелесом.

10.07.2001
А. Белавин

Часть I

**Топология и квантовая
теория поля**

СПЕКТР ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Поляков А.М.

Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 430–433

В этой статье мы хотели бы привлечь внимание к до сих пор не исследованной части спектра обычных гамильтонианов, используемых в квантовой теории поля. В качестве первого примера рассмотрим модель самовзаимодействующего скалярного поля в двухмерном пространстве-времени с гамильтонианом:

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \pi^2 + \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \mu^2 \phi^2 + \lambda/2 \phi^4 \right\}, \quad (1)$$
$$\pi(x) = -i\delta/\delta\phi(x).$$

В этой модели вакуум заполнен бозе-конденсатом $\bar{\phi}^2 = \mu^2/\lambda$. Над вакуумом находится одночастичное состояние с массой $\sqrt{2}\mu$, представляющее собой малые колебания постоянного конденсата. Однако $\bar{\phi} = \text{const}$ не есть единственное устойчивое равновесное состояние. Имеется другая экстремаль потенциальной энергии в (1), определяемая из уравнения

$$\phi_c'' + \mu^2 \phi_c - \lambda \phi_c^3 = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями $\phi_c^2(\pm\infty) = \mu^2/\lambda$, которые означают, что вакуум возмущен лишь внутри конечного объема. Решение (2) имеет вид

$$\phi_c(x) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{th} \frac{\mu x}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Для вычисления спектра колебательных уровней энергии вблизи рассматриваемой точки равновесия запишем

$$\phi(x) = \phi_c(x) + \phi(x)$$

и пренебрежем членами ϕ^3 и ϕ^4 в гамильтониане (последнее законно при $\lambda \ll \mu^2$). Диагонализуя получившийся квадратичный гамильтониан, находим спектр масс

$$M_n = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\mu^3}{\lambda} + \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2}} \mu + \frac{\mu}{\sqrt{2}} \sqrt{n(4-n)}, \quad n = 0, 1, 2. \quad (4)$$

В формуле (4) первый член есть потенциальная энергия в точке равновесия, второй — энергия нулевых колебаний и третий — энергия

возбуждения. Итак, в данной модели есть три типа частиц с аномально большими массами. Мы будем называть такие объекты экстремонами.

Полученный результат в обобщенной формулировке состоит в том, что каждому стационарному регулярному решению классических уравнений движения в квантовой теории поля со слабой связью соответствует свой набор экстремонов, массы которых можно в принципе вычислить. Покажем, что экстремоны существуют в трехмерных моделях. Рассмотрим теорию изовекторного поля Хиггса $\phi_a(x)$, $a = 1, 2, 3$.

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} \pi_a^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi_a)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi_a^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi_a^2)^2 \right\} d^3x. \quad (5)$$

Уравнение для экстремали

$$\nabla^2 \phi_a + \mu^2 \phi_a - \lambda \sum_b \phi_b^2 \cdot \phi_a = 0$$

имеет решение

$$\phi_a = x_a u(r) r^{-1},$$

где u подчинено уравнению

$$\begin{aligned} u'' + \frac{2}{r} u' + \left(\mu^2 - \frac{2}{r^2} \right) u - \lambda u^3 &= 0, \\ u(\infty) &= \mu / \sqrt{\lambda}; \quad u(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \text{const} \cdot r. \end{aligned}$$

Это решение будем называть “ежом”, поскольку изовектор в данной точке пространства направлен вдоль радиус-вектора. Уединенный еж не является экстремоном, так как его энергия линейно расходится на больших расстояниях из-за неоднородности распределения направления поля ϕ_a . Для преодоления этой трудности имеются две возможности. Первая состоит в подключении к ежу поля Янга–Миллса, то есть в замене

$$\nabla_\mu \phi_a \rightarrow \nabla_\mu \phi_a + g \epsilon_{abc} A_\mu^b \phi_c$$

и добавлении к (5) гамильтониана Янга–Миллса. При этом в силу калибровочной симметрии второго рода неоднородность направлений становится физически несущественной и не дает вклада в энергию, которая поэтому оказывается конечной. Решение классических уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \phi_a(x) &= x_a u(r) r^{-1}, \\ A_\mu^a(x) &= \epsilon_{\mu ab} x_b \left(a(r) - \frac{1}{gr^2} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где u и a подчинены уравнениям

$$\begin{cases} u'' + \frac{2}{r} u' + (\mu^2 - 2g^2 a^2(r))u - \lambda u^3 = 0, \\ a'' + \frac{4}{r} a' - \frac{3}{r^2} a - g^2 r^2 a^3 - g^2 u^2 a = 0. \end{cases}$$

Масса возникающего экстремона имеет порядок

$$M \sim \frac{\mu^2}{\lambda} m_V^{-1} \sim \frac{m_V}{g^2}$$

(где $m_V = g^2 u^2(\infty)$ — масса векторных бозонов).

В рассмотренной модели, как известно, имеется один безмассовый вектон и два массивных вектона. Если первый из них отождествить с фотоном, то еж в силу (6) обладает магнитным зарядом¹⁾.

Легко построить ежи, в которых все компоненты калибровочного поля массивны и сосредоточены внутри области $1/m_V$. Для этого достаточно рассмотреть изотензорное или изоспинорное поле Хиггса. В первом случае решение следует искать в виде $\phi_{ab} = r^{-2}(x_a x_b - \frac{1}{3} \delta_{ab} r^2)u(r)$, во втором случае оно имеет более сложный вид и будет описано в другом месте.

Другая возможность для конструирования экстремонов состоит в создании пары еж-антиеж. Легко показать, что энергия пары $E = AR$, где R — расстояние между компонентами пары. Для стабилизации этого состояния необходимо рассматривать уровни с ненулевым моментом L

$$E_{\text{эф}} = AR + B \frac{L^2}{R^2}. \quad (7)$$

Спектр масс имеет вид

$$M^2(L) = \text{const} \cdot L^{4/3}. \quad (8)$$

Строгое обоснование формулы (7) требует решения уравнения для экстремали с учетом фиксированности углового момента. Такое уравнение было выведено нами, но найти его точное решение не удалось. Поэтому справедливость (8) зависит от гипотезы о характере вращения ежей. В частности, если предположить, что во вращении участвует область пространства, заключенная между ежами, вместо (8) получится формула

$$M^2(L) = \text{const} \cdot L.$$

Безусловно, однако, что формула для энергии типа (8) должна привести к растущим траекториям Редже.

¹⁾ На это обстоятельство автору указал Л.Б. Окунь. После окончания работы был получен препринт Хоофта, где содержится аналогичный результат.

Итак, при интерпретации спектра элементарных частиц на основе теории поля следует помнить о многих новых возможностях, возникающих при учете экстремонных состояний.

Идеи, весьма близкие к изложенным выше, развивались в работах [1], [2], [3], [4], но мне представляется, что как метод рассмотрения, так и полученные выше результаты являются в какой-то мере новыми.

Я благодарен В.Л. Березинскому, Л.Б. Окуню и Л.Д. Фаддееву за плодотворные обсуждения.

Литература

1. *Nielsen H., Olesen P.*, Nucl. Phys., B61, 45, 1973.
2. *Зельдович Я.Б., Кобзарев И.Ю., Окунь Л.Б.*, Препринт ИПМ, 1974.
3. *Lee T.D., Wick G.C.*, Columbia University. Preprint, COO-2271, 1974.
4. *Фаддеев Л.Д.*, Phys. Lett., в печати.

ИЗОМЕРНЫЕ СОСТОЯНИЯ КВАНТОВЫХ ПОЛЕЙ

Поляков А.М.

ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 1975–1990

Показано, что в теориях со спонтанно нарушенной калибровочной симметрией существуют частицы особого типа, представляющие собой сгустки классического поля с небольшими квантовыми флуктуациями. Подобные сгустки существуют лишь в тех случаях, когда состояние поля на сколь угодно больших расстояниях от сгустка не может быть непрерывным образом деформировано в обычный вакуум. Из-за этого рассматриваемые изомеры имеют строго сохраняющиеся квантовые числа, названные топологическими, которых не было в исходном лагранжиане. Обсуждается вопрос о возможности отождествления изомеров с наблюдаемыми частицами.

1. Введение

Количество известных в настоящее время элементарных частиц столь велико, что представляется совершенно необходимым понять, можно ли объяснить их существование из квантовополевых гамильтонианов более или менее привычного типа или же для этого требуются качественно новые идеи. Решение этой задачи затрудняется отсутствием надежных расчетных методов для гамильтонианов с сильной связью. Вместе с тем принято думать, что гамильтонианы со слабой связью обладают очевидными свойствами, прослеживаемыми в теории возмущений, и не имеют отношения к миру адронов. В последнее время выяснилось, что это не совсем так [1], [2], [3], [4], и во многих случаях состояния указанных гамильтонианов содержат необычные частицы, названные “экстремонами” [4], которые соответствуют колебательным уровням вблизи нетривиальных экстремалей потенциальной энергии квантового поля. Замечательным свойством экстремонов является то, что, несмотря на слабую нелинейность исходного гамильтониана, они взаимодействуют сильно.

В настоящей работе изучаются различные типы экстремонов, возникающих в теориях с внутренними симметриями. Выясняется, что экстремоны имеют топологический смысл, связанный с тем, что состояние поля на сколь угодно больших расстояниях нельзя непрерывной деформацией преобразовать к вакууму. В результате экстремонам следует приписать строго сохраняющиеся квантовые числа, и даже

сильные квантовые флуктуации не способны разрушить экстремон. По этой же причине качественные результаты, полученные ниже, не чувствительны к конкретному виду гамильтониана.

Поля Янга–Миллса весьма естественно включаются в рассматриваемую схему и приводят к новым состояниям. Некоторые из этих состояний обладают магнитным зарядом.

Изомерам автоматически приписываются новые, строго сохраняющиеся квантовые числа, которые мы называли “топологическими”. Сохранение этих чисел связано с невозможностью непрерывной деформации изомерного состояния поля к вакуумному состоянию.

Изомеры, изучаемые в данной работе, имеют шарообразную и нитеобразную формы. Для группы $SU(2)$ возможны оба сорта изомеров, для группы $SU(3)$ найдены только нитевые объекты, причем нити обладают триальностью, которая оказывается топологическим квантовым числом.

В работе принят следующий порядок изложения. В разд. 2 на примере простой одномерной модели продемонстрирована общая схема использования классических решений в квантовой теории поля, причем в рамках модели спектр изомеров вычислен до конца. В разд. 3 найдены сферические решения для экстремалей изовекторного и изоспинорного полей Хиггса с симметрией $SU(2)$. В разд. 4 объекты предыдущего раздела заполняются полем Янга–Миллса и образуют изомерные состояния. В разд. 5 рассмотрены нитевые изомеры для групп $SU(2)$ и $SU(3)$. Число типов нитей равно размерности центра группы. В разд. 6 обсуждаются топологический смысл полученных результатов и вводятся топологические квантовые числа. Кроме того, выясняется связь нитевых изомеров со свойствами гамильтониана на малых расстояниях.

2. Классические решения и квантование

В этом разделе будет рассмотрена задача квантования поля вблизи некоторой классической экстремали. Для большей наглядности мы изучим простую одномерную модель теории поля и на этом примере продемонстрируем наши методы. Перенесение этих методов на общий случай оказывается нетривиальным.

Пусть $\varphi(x)$ — скалярное поле в двумерном пространстве времени с гамильтонианом

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right\},$$

$$\pi(x) = -i \frac{\delta}{\delta \varphi(x)}, \quad \lambda \ll \mu^2. \quad (2.1)$$

В формуле (2.1) первый член есть кинетическая энергия, а остальные — потенциальная энергия.

Можно воспринимать H как гамильтониан упругой линейной струны, лежащей в двугорбом потенциальном рельефе (при этом x нумерует точки струны, а $\varphi(x)$ есть амплитуда отклонения в точке x). В основном состоянии струна лежит в одной из ям и совершает малые нулевые колебания, т.е. $\bar{\varphi} = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$. Это, однако, не единственная точка равновесия струны. Другие равновесные конфигурации должны определяться из уравнения

$$d^2\varphi_c/dx^2 + \mu^2\varphi_c - \lambda\varphi_c^3 = 0 \quad (2.2)$$

с граничными условиями $\varphi_c(\pm\infty) = \mu/\sqrt{\lambda}$, которые обеспечивают конечность энергии равновесного состояния. Решение (2.2) имеет вид

$$\varphi_c(x) = (\mu/\sqrt{\lambda}) \operatorname{th}(\mu x/\sqrt{2}). \quad (2.3)$$

Струна, таким образом, начинаясь в левой яме, перебрасывается в некоторой точке в правую яму. Благодаря совместному действию потенциальных и упругих сил такая конфигурация равновесна. Рассмотрим теперь колебания внутри равновесия:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_c(x) + \Phi(x), \\ H &= \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_c}{dx} \right)^2 - \frac{\mu^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi_c^4 \right\} + \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 + \frac{\pi^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\mu^2 - \frac{3}{2} \mu^2 \operatorname{ch}^{-2} \frac{\mu x}{\sqrt{2}} \right) \Phi^2 - \mu\sqrt{\lambda} \operatorname{th} \frac{\mu x}{\sqrt{2}} \Phi^3 + \frac{\lambda}{4} \Phi^4 \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При $\lambda \ll \mu^2$ последние два члена в (2.4) можно отбросить. Возникающий квадратичный гамильтониан можно диагонализировать. Для этого представим $\Phi(x)$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{\kappa} \xi_{\kappa} \psi_{\kappa}(x), \\ \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} &= \sum_{\kappa} \psi_{\kappa}(x) \frac{\partial}{\partial \xi_{\kappa}} \equiv \sum_{\kappa} \psi_{\kappa}(x) \pi_{\kappa}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\psi_k(x)$ — полная система функций, подчиненных уравнению

$$\frac{d^2\psi_{\kappa}}{dx^2} + \left(m_{\kappa}^2 - 2\mu^2 + 3\mu^2 \operatorname{ch}^{-2} \frac{\mu x}{\sqrt{2}} \right) \psi_{\kappa}(x) = 0 \quad (2.6)$$

(здесь m_{κ}^2 — собственные значения (2.6)). Подставляя (2.6) в (2.4), находим (пренебрегая нелинейными членами)

$$H = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_c}{dx} \right)^2 - \frac{\mu^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi_c^4 \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa} (\pi_{\kappa}^2 + m_{\kappa}^2 \xi_{\kappa}^2). \quad (2.7)$$

Теперь легко найти массы частиц, соответствующих малым колебаниям струны вблизи необычного положения равновесия. Массы эти определяются как собственные значения оператора $H - E_0$, где E_0 — энергия истинного вакуума с $\bar{\varphi} = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$. Отсюда спектр масс имеет вид

$$M = M_0 + \left(\frac{1}{2} \sum m_k - \frac{1}{2} \sum_{vac} m_k \right) + \sum l_s m_s. \quad (2.8)$$

Здесь M_0 — разность между первым членом (2.7) и его вакуумным значением:

$$M_0 = 2/3\sqrt{2}\mu^3/\lambda, \quad (2.9)$$

второй член есть изменение нулевых колебаний, l_s — некоторые целые числа.

Формула (2.8) не связана с конкретной моделью и дает общий итог вычисления масс экстремонов в теориях с малой константой связи. Поправки к этой формуле содержат первую (и более высокие) степени константы связи и в принципе могут быть вычислены.

Явное выражение для второго члена (2.8) можно получить, используя известный в статистической физике метод [5], который позволяет выразить этот член через фазы рассеяния на потенциале, созданном экстремоном. Мы не будем приводить явных формул, не представляющих особого интереса, и обратим внимание лишь на следующее важное обстоятельство. Нетрудно проверить, что в одномерной модели

$$\frac{1}{2} \left(\sum m_k - \sum_{vac} m_k \right) = -\frac{\mu\sqrt{2}}{8\pi} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \text{const},$$

где Λ — радиус ультрафиолетового обрезания. Таким образом, первая квантовая поправка логарифмически расходится. Однако вместе с тем первый член в (2.8), даваемый формулой (2.9), содержит затравочную массу мезона $\sqrt{2}\mu$ (возбуждения над нормальным вакуумом). Физическая масса мезона дается формулой

$$m^2 = 2\mu^2 - (\lambda/4\pi) \ln(\Lambda/\mu). \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.9) и производя тем самым ренормировку массы, мы приходим к тому, что после этого квантовая поправка имеет конечную величину. По-видимому, это утверждение справедливо для любой ренормируемой теории: именно, после соответствующих ренормировок масса экстремона является конечной.

Рассуждения по поводу формул (2.8) предполагали малость нелинейных членов. В этом предположении можно было бы усомниться, так как в задаче всегда имеются один или несколько осцилляторов с нулевой частотой. Их существование связано с трансляционной и другими инвариантностями, нарушаемыми классическим решением.

Например, с трансляциями связан уровень с

$$\psi_0 = \frac{d\varphi_c}{dx},$$

с вращениями — три уровня

$$\psi_{0,\alpha} = \left[\mathbf{x}, \frac{d}{d\mathbf{x}} \right]_{\alpha} \varphi_c$$

и т.д. Несмотря на нулевые собственные частоты, квантовые поправки не содержат инфракрасных расхождений. Физически это связано с тем, что указанные моды являются движением экстремона как целого и не могут при достаточно медленных движениях сильно влиять на спектр. Формальное доказательство этого и вычисление моментов инерции экстремона проделаны в другой работе.

Итак, мы пришли к простой схеме квантования классических решений. Мы видим, что необходимо во-первых, найти устойчивое стационарное классическое решение, во-вторых, исследовать спектр малых колебаний вблизи него и в-третьих, использовать формулу (2.8). При малых константах связи эта процедура даст спектр с точностью порядка безразмерной константы связи.

3. Поля Янга–Миллса с симметрией $SU(2)$

В этом разделе изучаются экстремоны в теориях с распавшейся калибровочной симметрией $SU(2)$. Возможны два типа распада симметрии, которые следует рассмотреть отдельно. В первом случае поле Хиггса является изовектором, во втором — изоспинором. В теориях слабых взаимодействий этим двум случаям отвечают соответственно модели Глэшоу–Джорджи и Вейнберга.

Начнем с первого случая. Следуя программе предыдущего раздела, найдем экстремальные граничные условия для поля Хиггса, которые топологически неэквивалентны обычным. Гамильтониан поля Хиггса имеет вид (поле Янга–Миллса временно отключено)

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} \pi_a^2 + \frac{1}{2} (\partial \psi_a^2) + V \left(\sum \psi_a^2 \right) \right\} d^3 x, \quad (3.1)$$

где $a = 1, 2, 3$ — изотонический индекс. Если ввести единичный вектор n^a , так что $\psi_a = u n^a$, то потенциальная энергия в (3.1) примет вид

$$U = \int \left\{ \frac{1}{2} (\partial u)^2 + \frac{1}{2} u^2 (\partial n^a)^2 + V(u^2) \right\} d^3 x. \quad (3.2)$$

Рассмотрим вклад в (3.2) от больших расстояний, где $u \rightarrow u_{\infty}$,

а u_∞ определено условием $V'(u_\infty) = 0$. Имеем

$$U \approx \frac{1}{2} u_\infty^2 \sum_a \int (\partial n^a)^2 d^3 x. \quad (3.3)$$

Условия минимальности (3.3) дают все возможные граничные условия в бесконечности. Обозначим через θ и ϕ полярный и азимутальный углы вектора n^a в изотоническом пространстве. Уравнения экстремума имеют вид

$$\nabla^2 \theta = 1/2 \sin 2\theta (\nabla \phi)^2, \quad \nabla (\sin^2 \theta \nabla \phi) = 0. \quad (3.4)$$

Будем искать решение (3.4) в виде $\theta = \theta(\vartheta)$, $\phi = \phi(\varphi)$, где ϑ и φ — соответствующие углы в обычном пространстве. Тогда уравнения (3.4) приводятся к виду

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\theta}{d\vartheta} \right) = \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\frac{d\phi}{d\varphi} \right)^2, \quad \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = 0. \quad (3.5)$$

Второе уравнение (3.5) совместно с условием непрерывности дает $\phi = \pm n$ (n — целое число). Первое уравнение интегрируется введением независимой переменной $\ln \operatorname{tg}(\vartheta/2)$. Регулярные и непрерывные решения имеют вид

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \left[\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right]^n \right\}, \quad \theta = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \left[\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \right]^n \right\}. \quad (3.6)$$

Для того чтобы найденные решения имели физический смысл, необходимо убедиться, что они устойчивы, т.е. действительно осуществляют минимум функционала (3.3). Нам удалось показать это в простейшем случае $n = 1$ (см. приложение); при $n > 1$ вопрос остается открытым, хотя, по мнению автора, устойчивость есть и в этом случае. Поэтому ниже мы сконцентрируем внимание на решении с $n = 1$:

$$\phi = \varphi, \quad \theta = \vartheta, \quad (3.7)$$

которое будем называть “ежом” (иглы ежа, задающие направление поля Хиггса, направлены вдоль радиус-векторов в обычном пространстве; решения с $n \neq 1$ можно было бы называть скрученными ежами. Отметим, что число n является определяемой в топологии “степенью отображения” сферы на сферу).

После задания граничных условий (3.7) можно искать минимум потенциальной энергии поля Хиггса в виде

$$\psi_a = x_a \frac{u(r)}{r}. \quad (3.8)$$

Подстановка (3.8) в уравнения Эйлера дает

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \left(\mu^2 - \frac{2}{r^2} \right) u - \lambda u^3 = 0. \quad (3.9)$$

При выводе (3.9) мы выбрали для конкретности

$$V(u^2) = -1/2 \mu^2 u^2 + 1/4 \lambda u^4. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.9) имеет решение с асимптотиками:

$$u(r) \rightarrow \text{const} \cdot r, \quad r \rightarrow 0;$$

$$u(r) \rightarrow \mu^2/\lambda, \quad r \rightarrow \infty.$$

Такое решение представляет собой пузырек, внутри которого поле Хиггса стремится к нулю. Легко понять качественно, почему тот пузырек стабилен: расширению пузырька препятствует объемный выигрыш в энергии, связанный с членом $V(u^2)$ в (3.2), захлопыванию мешает член $\int u^2 (\nabla n)^2 d^3x$, который дает в разность энергий вклад порядка $-u_\infty^2 R$ (R — размер пузырька). Мы видим, что именно аномальные граничные условия создают отрицательное “линейное натяжение”, которое стабилизирует и пузырек. Полная энергия ежа линейно расходится из-за члена $\int u^2 (\nabla n)^2 d^3x$, и поэтому уединенный еж не является экстремумом. Однако в дальнейшем мы построим экстремонные состояния, либо заполняя ежа полем Янга–Миллса, либо рассматривая пары противоположно ориентированных ежей.

Перейдем к изучению ежей, возникающих в теориях с изоспинорным полем Хиггса ψ . Следует заранее сказать, что получающиеся в этом случае ежи оказываются неустойчивыми. Тем не менее мы приводим решения уравнений экстремума (который теперь не будет минимумом) в надежде, что введением каких-либо дополнительных полей еж удастся стабилизировать. Будем искать решение на бесконечности как повернутое некоторым образом стандартное решение

$$\psi = u_\infty \hat{R}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (3.11)$$

где $\hat{R}(x)$ — матрица группы $SU(2)$, которую следует найти из условия экстремальности граничных условий (3.11). Эта экстремальность должна быть обеспечена для функционала

$$\begin{aligned} U = \int \{ \partial \psi^+ \partial \psi + V(\psi, \psi^+) \} d^3x &\approx u_\infty^2 \int (\nabla R^+ \nabla R)_{22} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} u_\infty^2 \int \text{Sp}(\nabla R^+ \nabla R + \dots); \end{aligned} \quad (3.12)$$

члены, отброшенные в формуле (3.12), дадут конечный вклад в энергию и несущественны для формулировки граничных условий на бесконечности.

Для нахождения экстремалей функционала (3.12) параметризуем матрицы R с помощью углов Эйлера:

$$\hat{R} = \exp \left(i \frac{\sigma_z \gamma}{2} \right) \exp \left(i \frac{\sigma_x \beta}{2} \right) \exp \left(\frac{\sigma_z \alpha}{2} \right). \quad (3.13)$$

После несложных вычислений находим

$$U = \frac{1}{4} u_\infty^2 \int d^3x \{ (\nabla\alpha)^2 + (\nabla\beta)^2 + (\nabla\gamma)^2 + 2\nabla\gamma\nabla\alpha \cos\beta \}. \quad (3.14)$$

Будем искать решения, для которых $\alpha = -\gamma$. В этом случае функционал (3.14) эквивалентен функционалу (3.3), если сопоставить $\beta/2 \leftrightarrow \theta$, $\alpha \leftrightarrow \phi$. Поэтому находим решение типа ежа

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = 2\vartheta. \quad (3.15)$$

Соответствующие граничные условия для ψ имеют вид

$$\psi = u_\infty \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Если искать теперь решение для всей потенциальной энергии в виде

$$\psi = u(r) \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

для $u(r)$ возникает уравнение (3.9). Решение (3.17), как уже упоминалось, не определяет минимум энергии. Этот факт, доказанный в приложении, имеет наглядный топологический смысл, который будет обсуждаться в разд. 6.

Таким образом, мы не нашли точечных экстремумов для изосип-норного поля Хиггса.

4. Включение полей Янга–Миллса

Одним из способов придать ежу физический смысл является заполнение упоминавшегося выше пузырька полем Янга–Миллса. Нетрудно понять без вычислений, что подключение этих полей делает массу ежа конечной. Действительно, бесконечная масса пустого ежа возникает из-за расходимости на больших расстояниях интеграла (3.3), которая, в свою очередь, связана с тем, что на любых расстояниях направление поля Хиггса в изопространстве неоднородно. Включение полей Янга–Миллса делает гамильтониан инвариантным относительно неоднородных поворотов в изопространстве, и поэтому указанная выше неоднородность направлений перестает давать вклад в энергию.

Для количественного анализа задачи напомним потенциальную энергию системы полей Хиггса и Янга–Миллса (как и выше, мы начинаем со случая изовекторных полей Хиггса):

$$U = \int d^3x \{ |D_i\psi^a|^2 + 1/4 (F_{ik}^a)^2 + V(|\psi|^2) \},$$

$$(D_i\psi)^a = \nabla_i\psi^a + g\varepsilon^{abc} A_i^b\psi^c, \quad (4.1)$$

$$F_{ik}^a = \partial_i A_k^a - \partial_k A_i^a + g\varepsilon^{abc} A_i^b A_k^c.$$

В формуле (4.1) фигурирует лишь “магнитная” часть энергии поля Янга–Миллса, поскольку “электрическая” часть при каноническом квантовании выражается через обобщенные импульсы и должна быть отнесена к кинетической энергии (калибровка $A_0^a = 0$).

Нашей задачей является отыскание минимумов функционала (4.1), которые при $g \rightarrow 0$ будут переходить в рассмотренных выше ежей. Как и раньше, будем искать поле ψ^a в виде (3.8). Чтобы угадать вид поля A_i^a , порожденного полем ψ^a , вычислим ток, производимый ψ^a :

$$J_i^a = \varepsilon^{abc} \psi^b \partial_i \psi^c = \varepsilon^{abc} \frac{u^2(r)}{r^2} x^b \partial_i x^c = \frac{u^2(r)}{r^2} \varepsilon_{iab} x_b. \quad (4.2)$$

В силу (4.2) естественно искать поле Янга–Миллса в виде

$$A_i^a = a(r) \varepsilon_{iab} x_b. \quad (4.3)$$

Напряженность поля имеет вид

$$F_{ik}^a = 2\varepsilon_{ika} a(r) + \frac{a'}{r} [\varepsilon_{kas} x_s x_i - \varepsilon_{ias} x_s x_k] - g a^2 \varepsilon_{kis} x_s x_a. \quad (4.4)$$

Подстановка указанных формул в уравнение Янга–Миллса дает

$$\begin{aligned} a'' + 4r^{-1} a' - 3ga^2 - g^2 r^2 a^3 - g^2 u^2 a &= gu^2 r^{-2}, \\ u'' + 2r^{-1} u' - 2r^{-2} u - 4gau - 2g^2 a^2 r^2 u + \mu^2 u - \lambda u^3 &= 0. \end{aligned}$$

Замена

$$a(r) = b(r) - 1/gr^2 \quad (4.5)$$

позволяет упростить уравнения:

$$\begin{aligned} b'' + 4r^{-1} b' + 3r^{-2} b - g^2 r^2 b^3 - g^2 u^2 b &= 0, \\ u'' + 2r^{-1} u' + (\mu^2 - 2g^2 b^2) u - \lambda u^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Асимптотики решений системы (4.6) есть

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0 : \quad u(r) &\sim r, \quad a(r) \sim \text{const}, \\ r \rightarrow \infty : \quad u(r) &\rightarrow u_\infty, \quad a(r) \rightarrow -1/gr^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Еж, описываемый уравнениями (4.6), устроен следующим образом. В центре его отсутствует бозе-конденсат и имеется поле Янга–Миллса. На характерной длине порядка $1/\mu$ конденсат $u(r)$ восстанавливается и практически выходит на асимптотику. На другой длине порядка $1/m_V = 1/gu_\infty$ поле $a(r)$ выходит на свою асимптотику (4.7). Характерным свойством ежа является то, что вплоть до длин $\sim 1/m_V$ он вполне аналогичен пустому ежу, описываемому уравнениями (4.9). В частности, нетрудно показать, что энергия имеет вид

$$u = \frac{1}{2} u_\infty^2 \int_{|x| \leq 1/m_V} (\nabla n)^2 d^3 x \sim \frac{u_\infty^2}{m_V} \sim \frac{gu_\infty}{g^2} \sim \frac{m_V}{g^2}. \quad (4.8)$$

Отметим, что поле Янга–Миллса в данном случае проникает на бесконечность: четко проверить, что асимптотический потенциал (4.7) дает отличную от нуля напряженность. Такой результат связан с тем, что в случае изовекторного поля Хиггса лишь два из трех полей Янга–Миллса приобретают массу. Бозе-конденсат непроницаем для массивных компонент, однако легко пропускает безмассовые. Присутствие нетривиального векторного потенциала на бесконечности означает, как будет показано в приложении Б, что еж является магнитным монополем.

Для изоспинорных полей Хиггса, как уже упоминалось в разд. 3, решение уравнения экстремума имеет лишь методический интерес. Потенциальная энергия по-прежнему имеет вид (4.1) с тем лишь различием, что

$$D_i\psi = \partial_i\psi - 1/2 ig A_i^a \tau_a \psi, \quad (4.9)$$

где τ_a — матрицы Паули.

Будем искать решение уравнений экстремума в виде (4.3) для A_i^a и (4.17) для ψ . Для составления уравнений необходимо вычислить величину

$$D^2\psi = \nabla^2\psi - ig(\tau_a A_i^a)\nabla_i\psi - 1/4 g^2 (A_i^a)^2 \psi. \quad (4.10)$$

Имеем

$$(A_i^a)^2 = 2r^2 a^2(r), \quad A_i \equiv \tau_a A_i^a = ra(r) \left[\tau, \frac{\mathbf{r}}{r} \right]. \quad (4.11)$$

Из второй формулы (4.11) находим компоненты A_i в сферических координатах:

$$\begin{aligned} A_r &= 0, & A_\vartheta &= ra(r)(-i) \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ -e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \\ A_\varphi &= ra(r) \sin \vartheta \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{ctg} \vartheta e^{-i\varphi} \\ -\operatorname{ctg} \vartheta e^{i\varphi} & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Пользуясь формулами (3.17), (4.10) и (4.12), находим уравнение для $u(r)$:

$$u'' + \frac{2}{r}u' + \left\{ \mu^2 - \frac{g^2 r^2}{2} \left[a(r) + \frac{2}{gr^2} \right]^2 \right\} u - \lambda u^3 = 0. \quad (4.13)$$

Чтобы найти уравнения для $a(r)$, необходимо вычислить ток, производимый полем ψ :

$$J_i^a = 1/2 ig \psi^+ \tau^a \overleftrightarrow{\nabla}_i \psi + 1/2 g^2 \psi^+ \psi A_i^a. \quad (4.14)$$

В формулу (4.14) следует подставить

$$\psi = u(r) R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

где R определяется формулами (4.13), (4.15). При этом получим

$$J_i^a = 1/2 i g u^2(r) \{ R^+ \tau^a \nabla_i R - \nabla_i R^+ \tau^a R \}_{22} + 1/2 g^2 u^2(r) a(r) \varepsilon_{ias} x_s. \quad (4.16)$$

После довольно длинных вычислений, использующих явный вид матрицы R , находим

$$J_i^a = 1/2 g^2 u^2(r) (a(r) + 2/gr^2) \varepsilon_{ias} x_s. \quad (4.17)$$

Формула (4.17) может быть понята и без вычислений, поскольку поле $a(r) = -2/gr^2$ целиком связано с калибровочным преобразованием (напряженность F_{ik}^a для него равна нулю). Это преобразование, как легко проверить, есть R^+ . Поэтому при $a(r) = -2/gr^2$ ковариантные производные поля $R_{(1)}^0$ должны равняться нулю. Этот факт и отражается в формуле (4.17).

Пользуясь формулой (4.17) и вспоминая формулу (4.4), находим уравнение для $a(r)$

$$a'' + (4/r)a' - 3ga^2 - g^2 r^2 a^3 = 1/2 g^2 u^2 [a(r) + 2/gr^2]. \quad (4.18)$$

Уравнения (4.13) и (4.18) несколько упрощаются, если ввести поле

$$\begin{aligned} b(r) &= a(r) + 2/gr^2, \\ b'' + 4b'/r + 3gb^2 - g^2 r^2 b^3 - 1/2 g^2 u^2 b &= 0, \\ u'' + 2u'/r + [\mu^2 - 1/2 g^2 r^2 b^2(r)]u - \lambda u^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Не останавливаясь на очевидном сходстве объектов, описываемых уравнениями (4.19) и (4.6), подчеркнем их различие. В рассматриваемом сейчас случае физическое поле Янга-Миллса (т.е. F_{ik}^a) сосредоточено внутри области размера m_V^{-1} и затухает экспоненциально вне этой области. В то же время в случае изовекторного ежа на бесконечности имеется "магнитное" поле, спадающее согласно (4.3) и (4.7) по закону $1/r^2$. Таким образом, изовекторный еж является магнитным монополем¹⁾. Подробнее это свойство обсуждается в приложении.

Величины F_{ik}^a можно оценить так:

$$F_{ik}^a \propto a(r) \propto 1/gr^2 \propto m_V^2/g.$$

Сопоставляя эти две оценки, находим, что вклад в энергию от поля Янга-Миллса имеет порядок m_V/g^2 . Аналогично убеждаемся, что поле Хиггса дает вклад того же порядка. Заметим, что приведенные оценки правильны, если $\mu > m_V$ (ситуация, аналогичная вихрям в сверхпроводниках второго рода). В обратном случае еж имеет размер $1/m$, и вместо m_V в этой формуле стоит μ .

¹⁾ На этот факт мое внимание обратил Л.Б. Окунь. Немного позднее был получен препринт Хуфта [6], содержащий тот же вывод. См. также [4].

5. Нитевые изомеры

До сих пор мы занимались изомерными состояниями, представляющими собой небольшие шарики, внутри которых вакуум отличается от нормального. В настоящем разделе мы изучим нитеобразные объекты типа квантовых вихрей. В случае абелевых групп вопрос уже рассматривался Нильсеном и Олесеном в [1]. Поэтому мы будем изучать только неабелевы группы.

Следует заметить, что бесконечные нити, которые будут изучаться ниже, лишены физического смысла из-за бесконечной массы. Однако их можно использовать как строительный материал для создания экстремонов (например, путем образования вращающихся колец). Вопрос о постройке экстремонов из нитей будет изучаться в другом месте, здесь же мы будем заниматься лишь свойствами строительного материала.

Как и раньше, начнем с граничных условий для группы $SU(2)$. Для этого необходимо изучить минимумы функционала (3.14). Удобно переписать этот функционал, введя вместо углов Эйлера единичный вектор \mathbf{n} , характеризующий ось вращения и угол поворота χ . Матрицы $SU(2)$, таким образом, есть

$$R = \exp \left\{ i \frac{\chi}{2} (\sigma \mathbf{n}) \right\}, \quad (5.1)$$

где $0 < \chi < 2\pi$. Подставляя (5.1) в (3.12), находим

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} u_{\infty}^2 \int \text{Sp } \nabla R^+ \nabla R d^3 x = \\ &= \frac{1}{2} u_{\infty}^2 \int \left\{ \frac{1}{4} (\nabla \chi)^2 + (\nabla \mathbf{n})^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} \right\} d^3 x. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Выражение (5.2) имеет наглядный смысл: группа $SU(2)$ есть сфера в четырехмерном пространстве, а (5.2) — элемент длины дуги на этой сфере. Нам следует найти минимум функционала (5.2), причем решение мы будем искать в аксиально симметричном виде (нить направлена вдоль оси z).

Крайне важным является вопрос о различных условиях для $\chi(\beta)$ и $\mathbf{n}(\beta)$, где β — азимутальный угол. При обходе вокруг нити, т.е. при изменении β от нуля до 2π , мы должны получить прежнее преобразование фактор-группы $O(3) = SU(2)/Z_2$, поскольку физической группой симметрии является $O(3)$. Это означает, что возможны два варианта:

- 1) $\chi(2\pi) = \chi(0)$, $\mathbf{n}(2\pi) = \mathbf{n}(0)$,
- 2) $\chi(2\pi) = 2\pi - \chi(0)$, $\mathbf{n}(2\pi) = -\mathbf{n}(0)$.

Возможность граничных условий второго типа связана с тем, что матрица $R(2\pi - \chi, -\mathbf{n})$, хотя и отличается знаком от матрицы $R(\chi, \mathbf{n})$,

представляет то же самое вращение. Минимумов с условиями первого типа не существует, так как энергия всегда может быть уменьшена непрерывной деформацией к $\chi = 0$. Однако граничные условия второго типа топологически неэквивалентны тривиальным и допускают существование минимумов.

Простейший минимум такого типа получается, если выбрать $\chi = \pi$, а \mathbf{n} — из условия минимума функционала:

$$\int \left(\frac{d\mathbf{n}}{d\beta} \right)^2 d\beta = \min, \quad \mathbf{n}(2\pi) = -\mathbf{n}(0). \quad (5.3)$$

Эта задача изучалась ранее в теории жидких кристаллов [7]. Было показано, что ее общее устойчивое решение представляет собой равномерный поворот вектора \mathbf{n} в какой-либо плоскости так, что при обходе нити \mathbf{n} совершает половину оборота. В частном случае, когда выбранная плоскость ортогональна оси нити, движение \mathbf{n} описывается формулами

$$\mathbf{n} = (\cos \beta/2, \sin \beta/2, 0), \quad \chi = \pi. \quad (5.4)$$

Итак, в случае группы $SU(2)$ существует лишь два типа граничных условий. В то же время в абелевом случае для группы $O(2)$ число типов бесконечно, так как фаза поля при обходе нити может меняться на $2\pi m$, где m — любое целое число.

Мы показали, что в $SU(2)$ существует лишь один тип граничных условий, приводящих к нитевым изомерам. Однако для этого типа условий имеется непрерывное множество решений для $\chi(\beta)$ и $\mathbf{n}(\beta)$, приводящих к одной и той же энергии. Действительно, плоскость в четырехмерном пространстве, в которой вращается 4-вектор

$$u = \left(\cos \frac{\chi}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\chi}{2} \right),$$

может быть расположена произвольным образом. Кроме того, направление поворота вектора \mathbf{n} при обходе окружности может принимать два значения. Эти результаты нужно интерпретировать следующим образом. Волновой функционал основного состояния изомера не зависит от ориентации и плоскости поворота, поэтому все расположения этой плоскости равновероятны.

В общем случае количество разных граничных условий равняется связности рассматриваемой группы или размерности центра универсальной накрывающей группы. В случае $SU(3)$ имеются, таким образом, граничные условия трех типов. Подчеркнем, что эти выводы относятся лишь к нитеобразным объектам. Нити для группы $SU(3)$ характеризуются тем, что при обходе вокруг нити матрицы $SU(3)$ умножаются либо на $e^{2\pi i/3}$, либо на $e^{4\pi i/3} = e^{-2\pi i/3}$. Отсюда видно, что сливаться могут либо тройки нитей одного сорта либо пары раз-

ных сортов. Если представить себе, что внутри нитей находятся фермионы и интерпретировать этот фермион, захваченный нитью, как кварк, видно, что нормальные состояния такой системы могут образовываться либо из трех кварков, либо кварка и антикварка (см. рис.).

Мы не будем выписывать уравнения для калибровочного поля, заполняющего нить, поскольку физические следствия такого заполнения такие же как и в разобранных выше случаях. Именно, напряженность поля сосредоточена внутри нити и экспоненциально затухает снаружи на длине порядка $1/m_V$. Масса на единицу длины уединенной нити становится конечной и имеет порядок

$$\rho \sim u_\infty^2 \log \frac{\mu}{m_V} \sim \frac{m_V^2}{g^2} \log \frac{\mu}{m_V}. \quad (5.5)$$

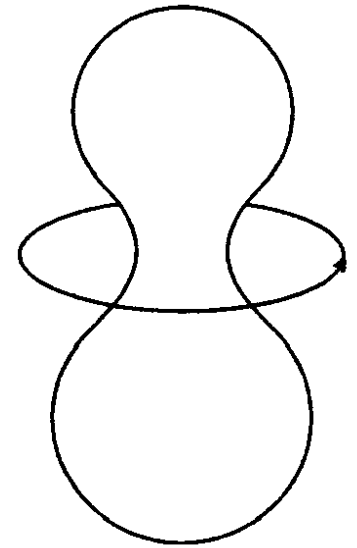


Рис.

Логарифм возник из-за вклада в формулу (5.2) члена $(\nabla \mathbf{n})^2$ в области $1/\mu < x < 1/m_V$.

6. Изомерные состояния и топология

В этом разделе мы качественно проанализируем свойства и происхождение изомерных состояний. Этот анализ необходим для понимания степени общности полученных выше результатов.

Начнем с простейшего случая — одномерного “перегиба” из разд. 2. Что мешает исчезнуть такому перегибу? Очевидно, лишь необычные граничные условия: $\varphi(\pm\infty) = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$. Если бы $\varphi(\pm\infty) = 0$, любое отклонение $\varphi(x)$ от постоянной было бы выгодно устранить. Из этого рассуждения ясно, что для существования экстремона необходимо наличие строгой группы симметрии (для того чтобы состояния с $+\mu/\sqrt{\lambda}$ и $-\mu/\sqrt{\lambda}$ имели одинаковую энергию) и наличие конденсата (иначе единственно возможное граничное условие $\varphi(\pm\infty) = 0$).

Граничные условия должны быть таковы, чтобы их нельзя было непрерывной деформацией свести к тривиальным. Например, если в рассматриваемой одномерной модели поле $\varphi(x)$ — комплексно, то, хотя формальное решение (2.3) по-прежнему существует, оно оказывается неустойчивым. Действительно, непрерывным поворотом фазы поля $\varphi(x)$ можно свести граничные условия к тривиальным. Формально в неустойчивости можно убедиться так. В силу независимости энергии от постоянной фазы поля вариация поля $\delta\varphi(x) = i\epsilon\varphi_c(x)$ не меняет энергию. Поэтому имеется нулевое собственное значение у соответствующего уравнения Шредингера (ср. с рассу-

дением разд. 2 об $\delta\varphi = \varepsilon d\varphi_c/dx$. Собственная функция этого значения есть $\varphi_c(x)$ и, следовательно, где-то обращается в нуль. Поэтому есть один уровень с отрицательным собственным значением, что и означает неустойчивость экстремона (в этом случае вместо минимума имеется седло).

Рассмотрим с этой точки зрения экстремоны типа ежей. Ежи в изовекторном поле Хиггса можно трактовать как отображения единичной сферы в трехмерном пространстве на единичную сферу в изотопическом пространстве. Это отображение задается формулами (3.6). Тривиальные граничные условия соответствуют $n = 0$ в этой формуле. Число n является определяемой в топологии “степенью отображения” [8]. Известно, что отображения разных степеней не гомотопны т.е. их нельзя непрерывно деформировать друг в друга. Этот факт объясняет устойчивость ежа.

В изоспинорном случае каждой точке единичной сферы в трехмерном пространстве сопоставляется некоторое преобразование $SU(2)$. Однако возникающее отображение не непрерывно, вообще говоря, по отношению к группе $SU(2)$, так как близким точкам сферы могут соответствовать матрицы $SU(2)$, отличающиеся знаками (знак изотопического спинора при сохранении изоспина есть условная величина). Поэтому полученное отображение непрерывно, если его рассматривать как отображение сферы на фактор-группу $O(3) \propto SU(2)/Z_2$. Из топологии известно, что новое отображение двумерной сферы на группу $O(3)$ можно непрерывной деформацией свести к тривиальному [8]. Поэтому неудивительно, что найденное нами решение для изоспинорного ежа оказывается неустойчивым.

В самом общем случае ежи являются отображениями единичной сферы на поля Хиггса на большом расстоянии. Эти поля могут либо однозначно определять некоторое преобразование группы симметрии (как это было в изоспинорном случае), либо определять его с точностью до некоторой подгруппы (и изовекторном случае — последнее эйлерово вращение). Классификация таких отображений в каждом конкретном случае может быть полностью проведена топологическими методами (вычислением гомотопических групп).

Те же рассуждения относятся к нитевидным изомерам, только в этом случае отображается не сфера, а окружность. В этом случае нетрудно понять, что существует несколько классов неэквивалентных отображений, причем число классов равняется связности группы. Это следует прямо из определения связности. Поэтому для группы $O(2)$ мы имеем бесконечный набор разных вихрей (они характеризуются целыми числами), для $O(3)$ есть лишь один нетривиальный класс отображений и соответственно нити одного типа.

Для группы $SU(3)$ нить характеризуется триальностью, могущей принимать два значения, так что при обходе вокруг нити матрицы $SU(3)$ умножаются либо на $e^{2\pi i/3}$, либо на $e^{4\pi i/3}$.

Сказанное требует важного уточнения. Действительно, что мы имеем в виду, говоря об условности знака изоспинора? Для того чтобы разобраться в этом, рассмотрим дискретный аналог гамильтониана (3.12):

$$H = l^D \sum_{\mathbf{r}, \alpha} \left\{ \frac{1}{l^2} (\psi_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha}^+ - \psi_{\mathbf{r}}^+) (\psi_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha} - \psi_{\mathbf{r}}) + V(\psi_{\mathbf{r}}^+ \psi_{\mathbf{r}}) \right\}. \quad (6.1)$$

Здесь l — размер ячейки введенной нами кубической решетки, $\mathbf{a}_{1,2,3,4}$ — базисные векторы этой решетки. После подстановки $\psi_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}} \phi$, где ϕ — некоторый стандартный спинор, а $R_{\mathbf{r}}$ — матрица $SU(2)$, гамильтониан принимает вид

$$\begin{aligned} H &= l^D \sum_{\mathbf{r}, \alpha} \left\{ \left(\phi^+, \frac{1}{l^2} (R_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha}^+ - R_{\mathbf{r}})^2 \phi \right) + V(\phi^2) \right\} = \\ &= l^D \sum_{\mathbf{r}, \alpha} 2 \left(\phi^+, \frac{1}{l^2} \alpha (1 - R_{\mathbf{r}} R_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha}^+) \phi \right) + V(\phi^2). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Представим теперь, что две соседние матрицы $R_{\mathbf{r}}$ отличаются знаком: $R_{\mathbf{r}+\mathbf{a}} \approx -R_{\mathbf{r}}$. Ясно, что такая ситуация приводит, согласно, (6.2) к огромной энергии, обращающейся в бесконечность при $l \rightarrow 0$. Поэтому для гамильтониана (6.2) граничные условия (5.3) недоступны, и изомерные нити отсутствуют.

Однако переход от непрерывного гамильтониана (3.12) к решеточному неоднозначен. Рассмотрим вместо (6.2) выражение

$$\tilde{H} = l^D \sum_{\mathbf{r}, \alpha} \frac{1}{l^2} \{ \phi^+ [4 - (R_{\mathbf{r}} R_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha}^+ + R_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha} R_{\mathbf{r}}^+)^2] \phi + V(\phi^+ \phi) \}. \quad (6.3)$$

В непрерывном пределе

$$R_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha} \approx R_{\mathbf{r}} + l \partial R / \partial \mathbf{r}_\alpha + (1/2) l^2 \partial^2 R / \partial \mathbf{r}_\alpha^2. \quad (6.4)$$

Подстановка (6.4) в (6.3) и интегрирование по частям с учетом условия $R^+ R = 1$ дают правильный гамильтониан (3.12). Но в решеточном гамильтониане (6.3) граничное условие $R_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha} \approx -R_{\mathbf{r}}$ вполне допустимо!

Таким образом, вопрос о возможности неабелевых нитевых изомеров неожиданно оказывается связанным со структурой теории на сверхмалых расстояниях. Мы можем лишь утверждать, что существует такой способ продолжения теории в эту область, при котором неабелевы нитевые изомеры должны возникать.

Последний вопрос, который мы хотели бы обсудить в связи с изомерными состояниями, это автоматическое появление новых законов сохранения. Рассмотрим одномерную модель и покажем, что четность числа имеющихся экстремумов сохраняется. Действительно, пусть сталкиваются две нормальные частицы. Может ли образоваться один экстремум? Ясно, что для этого потребуется бесконечное время,

поскольку в бесконечной области пространства необходимо перевести поле из состояния с $\bar{\varphi} = -\mu/\sqrt{\lambda}$ в состояние с $\bar{\varphi} = +\mu/\sqrt{\lambda}$. Этот подбарьерный переход имеет вероятность $\sim e^{-\infty} = 0$. В то же время ничто не мешает родиться паре экстремонов, поскольку для этого нужно осуществить переброску поля лишь в конечной области.

Обобщая этот результат, можно сказать, что степень отображения пространства на группу внутренней симметрии есть величина сохраняющаяся. В частности, сохраняется магнитный заряд ежа. Мы будем называть такие квантовые числа топологическими.

Формальное обоснование сказанного можно получить, записав амплитуду перехода в виде

$$A \sim \int D\varphi(x, t) e^{iS},$$

где S — классическое действие. Интегрирование следует вести по таким $\varphi(x, t)$, что φ при $t \rightarrow -\infty$ описывает ежа, а $\varphi(x, t)$ при $t \rightarrow +\infty$ описывает его продукты распада. Однако в силу топологической неэквивалентности $\varphi_{\text{in}}(x, t)$ и $\varphi_{\text{out}}(x, t)$ не существует непрерывной по времени траектории $\varphi(x, t)$, соединяющей эти состояния. Поэтому для любого $\varphi(x, t)$ действие $S = \infty$.

Заманчиво предположить, что все существующие в природе законы сохранения носят топологический характер, но в настоящее время я не знаю, как реализовать такую возможность.

Следует заметить, что в принципе могут существовать и нетопологические экстремоны. Геометрическая картина может быть такой, как изображена на рисунке. Как видно из рисунка, линия, перетягивающая гантелю, имеет минимальную длину, однако, передвигая вверх, ее можно стянуть в точку. Мы не знаем, существуют ли классические решения такого типа. Если бы они существовали, то, как заметил Л.Б. Окунь, они являлись бы метастабильными состояниями.

Я глубоко признателен В.Л. Берлинскому, А.Н. Вайнштейну, Я.Б. Зельдовичу, Л.Б. Окуню, Л.Д. Фаддееву и Л.С. Шварцу за важные обсуждения, прояснившие многие не ясные автору вопросы. Мне приятно, кроме того, поблагодарить Я.Г. Синая за его наглядные разъяснения основных понятий топологии.

Приложение А

Устойчивость ежей

Покажем, что экстремаль (3.7) функционала (3.3) является минимумом. Рассмотрим первую и вторую вариации функционала

$$F = \int \{(\nabla \mathbf{n})^2 + \rho(x) \mathbf{n}^2\} d\Omega, \quad (\text{A.1})$$

где $\rho(x)$ — множитель Лагранжа. Из условия $\delta F = 0$ находим

$$\nabla^2 \mathbf{n} = \rho(x) \mathbf{n}. \quad (\text{A.2})$$

Подставляя \mathbf{n} в виде (3.7), находим, что $\rho = -2$. Теперь следует изучить собственные значения второй вариации:

$$\delta^2 F = \int \{(\nabla \delta \mathbf{n})^2 - 2(\delta \mathbf{n})^2\} d\Omega, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla^2 \delta \mathbf{n} + 2\delta \mathbf{n} = -\lambda \delta \mathbf{n} \quad (\text{A.4})$$

при условии, что $(\mathbf{n} \delta \mathbf{n}) = 0$. Очевидно, что условие устойчивости есть $\lambda \geq 0$. Из (A.4) находим

$$\lambda = l(l+1) - 2,$$

где $l \geq 1$. Последнее ограничение возникает из-за того, что при $l = 0$ вариации $\delta \mathbf{n} = \text{const}$ и следовательно, $(\mathbf{n} \delta \mathbf{n}) \neq 0$. Нулевое собственное значение с $l = 1$ соответствует возможности поворота ежа как целого.

Покажем теперь неустойчивость решения для изоспинорного поля Хиггса. В этом случае выражение (3.14) можно переписать согласно (5.2):

$$F = \sum_{\alpha=1}^4 \int d\Omega (\nabla \nu_{\alpha})^2, \quad (\text{A.5})$$

где ν_{α} — единичный вектор в четырехмерном пространстве. Легко проверить, что множитель Лагранжа, соответствующий решению (3.15), снова есть -2 . Это приводит к уравнению (A.4) для $\delta \nu_{\mu}$. Однако теперь $l = 0$ допустимо, поскольку решение (3.15) соответствует

$$\nu_i = \frac{x_i}{r}, \quad \nu_4 = 0$$

и, выбрав $\delta \nu_i = 0$, $\delta \nu_4 = \text{const}$, мы удовлетворяем условию

$$\sum \nu_{\mu} \delta \nu_{\mu} = 0.$$

Таким образом, имеется собственное значение $\lambda = -1$, что и означает неустойчивость.

Приложение Б

Покажем, что если отождествить безмассовую компоненту векторного поля с фотоном, еж несет магнитный заряд. Перейдем к калибровке, в которой поле Хиггса на бесконечности направлено вдоль третьей оси. Для этого необходимо проделать поворот в изопространстве, характеризующийся углами Эйлера:

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \theta, \quad \gamma = \gamma(r, \theta, \varphi) \quad (\text{B.1})$$

(последний угол Эйлера, разумеется, произволен, это поворот вектора вокруг себя). Рассмотрим величину

$$A_\mu^3 = (\psi A_\mu)/|\psi|. \quad (\text{Б.2})$$

До поворота, как видно из (3.8) и (4.3), $A_\mu = 0$. После поворота A_μ меняется, так как к A_μ добавляется член $\text{Sp } \tau_3 R^+ \partial R / \partial x_\mu$. Таким образом после поворота

$$A_\mu^3 = \text{Sp } \tau_3 R^+ \frac{\partial R}{\partial x_\mu}. \quad (\text{Б.3})$$

Пользуясь (Б.3) и известным выражением R через углы Эйлера, находим

$$A_\mu^3 = \nabla_\mu \gamma + \cos \beta \nabla_\mu \alpha. \quad (\text{Б.4})$$

Переходя к сферическим координатам, находим из (Б.4) и (Б.1)

$$A_\varphi = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} + \cos \theta \right) \frac{1}{r \sin \theta}, \quad A_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}, \quad A_r = \frac{\partial \gamma}{\partial r}. \quad (\text{Б.5})$$

Магнитное поле, соответствующее потенциалу (Б.5), есть

$$H = -1/r^2. \quad (\text{Б.6})$$

Потенциал Дирака получается из (Б.5), если выбрать $\gamma = -\varphi$. При этом нить Дирака направлена против оси z .

Замечательно, что формула (Б.6) верна даже на малых расстояниях. Но, разумеется, магнитное поле приобретает физический смысл лишь вдали от нити, где на пробную частицу не действуют заряженные компоненты поля Янга-Миллса. Кроме того, эти компоненты действуют внутри нити и потенциал (Б.5) справедлив только вдали от нити.

Литература

1. Nielsen N., Olesen P., Nucl. Phys., **B61**, 45, 1973.
2. Lee T., Wick G., Columbia preprint, 1974. Зельдович Я., Кобзарев И., Окунь Л., Препринт ИПМ-15, 1974.
3. Фаддеев Л., Тахтаджан Л., УМН, 29, 3, 1974. Фаддеев Л., Препринт MPI-PAE/16, 1974; Письма в ЖЭТФ, **21**, 41, 1973.
4. Поляков А.М., Письма в ЖЭТФ, **20**, 430, 1974.
5. Баренблат Г., Зельдович Я., ДАН СССР, **130**, 115, 1959.
6. 't Hooft G., Preprint CERN TH-1876, 1974.
7. Анисимов С., Дзялошинский И., ЖЭТФ, **61**, 1890, 1971.
8. Милнор Д., Уоллес Д., Дифференциальная топология, М., 1973.

ПСЕВДОЧАСТИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА

Белавин А.А., Поляков А.М., Тюпкин Ю.С.
и Шварц А.С.

Phys. Lett. 59B (1975). P. 85–87

Найдены регулярные решения четырехмерных евклидовых уравнений Янга–Миллса. Эти решения локально минимизируют интегралы действия, которые оказываются конечными. Обсуждается топологическая природа найденных решений.

В предыдущей статье одного из авторов [1] была показана важность псевдочастичных решений уравнений калибровочного поля для инфракрасной проблемы. Под “псевдочастичными” решениями мы понимаем протяженные поля A_μ , которые локально минимизируют Янг–Миллсовское действие S и для которых $S(A) < \infty$. Пространство предполагается евклидовским и четырехмерным. В настоящей статье нами найдено такое решение. Начнем с топологического рассмотрения, из которого следует существование искомых решений.

Интересующие нас поля удовлетворяют условию

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \quad (1)$$

Рассмотрим достаточно большую сферу S^3 в нашем четырехмерном пространстве. Сама сфера, конечно, трехмерная. Из (1) следует, что

$$A_\mu|_{S^3} \approx g^{-1}(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_\mu} \Big|_{S^3}, \quad (2)$$

где $g(x)$ — матрицы из калибровочной группы. Поэтому каждое поле $A_\mu(x)$ задает некоторое отображение сферы S^3 в калибровочную группу G . Ясно, что если два таких отображения принадлежат разным гомотопическим классам, то соответствующие поля $A_\mu^{(1)}$ и $A_\mu^{(2)}$ не могут быть непрерывно деформированы друг в друга. Хорошо известно, что существует бесконечное множество различных гомотопических классов отображений $S^3 \rightarrow G$, если G является неабелевой простой группой Ли. Следовательно, фазовое пространство полей Янга–Миллса разделено на бесконечное множество компонент, причем каждый из них характеризуется некоторой величиной q , где q — целое число.

Наша идея заключается в отыскании абсолютного минимума для интеграла действия заданного компонента фазового пространства.

Для этого нам необходима формула, выражающая целое число q через поле A_μ ¹⁾. Легко проверить, что

$$q = \frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \text{Sp} \int F_{\mu\nu} F_{\lambda\gamma} d^4x. \quad (3)$$

Чтобы доказать формулу (3), воспользуемся следующим тождеством:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \text{Sp} F_{\mu\nu} F_{\lambda\gamma} &= \partial_\alpha J_\alpha, \\ J_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \text{Sp} (A_\beta (\partial_\gamma A_\delta + \frac{2}{3} A_\gamma A_\delta)). \end{aligned} \quad (4)$$

Из (4) следует:

$$q = \frac{1}{8\pi^2} \oint_{S^3} J_\alpha d^3\sigma^\alpha = \frac{1}{8\pi^2} \frac{4}{3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \oint_{S^3} \text{Sp} (A_\beta A_\gamma A_\delta) d^3\sigma_\alpha, \quad (5)$$

где

$$A_\mu = g^{-1}(x) \partial g / \partial x_\mu. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим случай $G = \text{SU}(2)$. В этом случае ясно, что

$$d\mu(g) = \text{Sp} (g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg) \quad (7)$$

есть в точности инвариантная мера на этой группе, так как это выражение является инвариантной дифференциальной формой нужной размерности. Смысл обозначения состоит в следующем. Пусть $g(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ — некоторая параметризация группы $\text{SU}(2)$, например, при помощи углов Эйлера. Тогда инвариантная мера задается формулой

$$d\mu = \text{Sp} \left(g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_1} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_2} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_3} \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (8)$$

Сравнивая (8) с (5), мы видим, что подынтегральное выражение в (5) является в точности якобианом отображения S^3 в $\text{SU}(2)$. Следовательно число q показывает, сколько раз группа $\text{SU}(2)$ покрывается при нашем отображении. Это и есть определение степени отображения. В случае произвольной группы G следует рассмотреть отображение S^3 на ее $\text{SU}(2)$ -подгруппу и повторить вышесказанное. Имеет место важное неравенство, которое будет применяться далее. Рассмотрим следующее соотношение:

$$\text{Sp} \int (F_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu})^2 d^4x \geq 0, \quad (9)$$

где $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma}$. Из (9) и (3) следует, что

$$E \geq 2\pi^2 |q|, \quad (10)$$

¹⁾ Выражения типа (3) известны в топологии как "классы Понтрягина".

где

$$S(A) \equiv E(A)/g^2$$

и g^2 является константой связи.

Формула (10) дает нижнюю границу для действия инстантонов в каждом гомотопическом классе. Теперь мы покажем, что для $q = 1$ эта граница достигается. Иными словами, можно отыскать решение уравнения, которое заменяет собой обычное уравнение Янга–Миллса:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= \pm \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}, \\ F_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha A_\beta]. \end{aligned} \quad (11)$$

Снова достаточно рассмотреть случай $G = \text{SU}(2)$. В этом случае удобно, хотя и не обязательно, расширить эту группу до $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \approx \text{O}(4)$. Калибровочные поля для $\text{O}(4)$ имеют вид $A_\mu^{\alpha\beta}$, где поле A_μ антисимметрично относительно $\alpha\beta$. Калибровочное поле для группы $\text{SU}(2)$ связано с полем $A_\mu^{\alpha\beta}$ при помощи формулы

$$A_\mu^i = \frac{1}{2} \left(A_\mu^{0i} \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} A_\mu^{kl} \right). \quad (12)$$

Теперь два уравнения

$$F_{\mu\nu}^i = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma}^i$$

эквивалентны уравнению

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\mu\nu}^{\gamma\delta} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma}^{\alpha\beta}. \quad (13)$$

Рассмотрим решение уравнения (13), которое инвариантно при одновременном вращении x -пространства и изотопического пространства. Единственная возможность состоит в следующем:

$$A_\mu^{\alpha\beta} = f(\tau) (x_\alpha \delta_{\mu\beta} - x_\beta \delta_{\mu\alpha}). \quad (14)$$

Легко вычислить F :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{\alpha\beta} &= (2f - \tau^2 f^2) (\delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha}) + \\ &+ (f'/\tau + f^2) (x_\alpha x_\mu \delta_{\nu\beta} - x_\alpha x_\nu \delta_{\mu\beta} + x_\beta x_\nu \delta_{\mu\alpha} - x_\beta x_\mu \delta_{\nu\alpha}). \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, что первая тензорная структура в (15) удовлетворяет уравнению (13), в то время как следующая — не удовлетворяет. Поэтому мы должны положить

$$f'/\tau + f^2 = 0, \quad f(\tau) = \frac{1}{\tau^2 + \lambda^2}, \quad (16)$$

где λ — произвольный масштаб. Действие E равно

$$E = \frac{1}{4} \text{Sp} \int \pm F_{\mu\nu}^2 d^4x = \frac{1}{32} \text{Sp} \int (F_{\mu\nu}^{\alpha\beta})^2 d^4x = 2\pi^2. \quad (17)$$

Сравнение (17) и (10) показывает, что мы нашли абсолютный минимум для $q = 1$.

Другое представление для решения (14) дается формулами

$$\begin{aligned} A_\mu &= \frac{\tau^2}{\tau^2 + \lambda^2} g^{-1}(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_\mu}, \\ g(x) &= (x_4 + i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}) (x_4^2 + \mathbf{x}^2)^{-1/2}, \\ g^\dagger g &= 1, \quad \tau^2 = x_4^2 + \mathbf{x}^2 \end{aligned} \quad (18)$$

($\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули).

Чтобы получить псевдочастичное решение для произвольной группы G , следует рассмотреть ее подгруппу $SU(2)$, для которой A_μ задается согласно (18), а все остальные матричные элементы A_μ полагаются равными нулю.

Как видно из масштабной инвариантности, наше решение содержит произвольный масштаб λ . Следовательно, эти поля являются крупномасштабными и потому существенны в инфракрасной проблеме.

Нам не известно, существует ли решение уравнения (13) с $q > 1$. Можно было бы, конечно, рассмотреть несколько псевдочастиц с $q = 1$. Однако мы не знаем, притягиваются ли они друг к другу и образуют псевдочастицу с $q > 1$ или же существует отталкивание и стабильной псевдочастицы не существует.

Один из нас (А.М.П.) выражает благодарность С.П. Новикову за пояснение некоторых топологических идей.

Литература

1. Polyakov A.M., Phys. Lett. **59B** (1975) 82.

МЕТАСТАБИЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДВУМЕРНОГО ИЗОТРОПНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

Белавин А.А., Поляков А.М.

Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 22. С. 503–506

Найдены метастабильные неоднородные состояния ферромагнетика Гейзенберга, которые могут создать конечную корреляционную длину при сколь угодно низких температурах.

Хорошо известно, что в двумерном ферромагнетике с непрерывной симметрией выстраивание спинов отсутствует при какой угодно низкой температуре T . Тем не менее считается [1], что фазовый переход в этой системе может происходить за счет того, что основное состояние при $T \rightarrow 0$ является вырожденным. Это приводит к возникновению спиновых волн — голдстоунов и бесконечному радиусу корреляции. Однако это рассуждение не учитывает явления, которое может сделать корреляционный радиус конечным [2]. Рассмотрим классический ферромагнетик Гейзенберга, так как интересующие нас длинноволновые флуктуации не зависят от квантовых эффектов.

Предположим, что мы вычисляем некоторую корреляционную функцию спинов $n(x)$. Усреднение происходит по всем возможным полям с весом

$$\exp(-H/T). \quad (1)$$

Если температура $T \rightarrow 0$, то существенную роль в усреднении играют поля, близкие к осуществляющим локальные минимумы энергии (основное и метастабильные состояния)

$$\delta H = 0. \quad (2)$$

Обычно учитывается тривиальный минимум

$$n_0(x) = \text{const}$$

и поля, мало отклоняющиеся от $n_0(x)$. Но если существуют другие решения (2) с конечной энергией $H = E$ (псевдочастицы), их также необходимо учитывать по следующей причине. Решения уравнения (2) с конечной энергией в двумерном случае не зависят от масштаба. Поэтому, хотя среднее расстояние между такими псевдочастицами при малых T велико ($r_{\text{ср}} \sim a \exp(E/T)$, a — шаг решетки), их радиус из-за масштабной инвариантности того же порядка величины. Существование таких случайных неоднородностей приводит к тому, что корреляция спинов на расстоянии $R > r_{\text{ср}}$ исчезает.

В этой статье мы обнаружим существование нетривиальных решений (2) для двумерного ферромагнетика с числом компонентов спина $n^a(x)$ равным трем. Начнем с топологического обсуждения, которое докажет существование таких решений. Подобное рассмотрение поля единичного вектора и выражение для степени отображения содержится в работах [3], [4]. Однако решения со степенями отображения, большими единицы, этими авторами не изучались. Спиновое поле описывается трехкомпонентным единичным вектором $\mathbf{n}(x)$ с взаимодействием

$$H = \int \sum_{a=1}^3 (\nabla n^a)^2. \quad (3)$$

Значения $\mathbf{n}(x)$ можно считать точкой на трехмерной сфере $S^2(\mathbf{n}) = (\cos \theta, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi)$. Интересующие нас поля удовлетворяют условию, которое следует из конечности энергии

$$\mathbf{n}(x) \rightarrow (1, 0, 0) \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Последнее означает, что плоскость x , на которой заданы спины, топологически эквивалентна другой сфере S^2 , а поле $\mathbf{n}(x)$ производит отображение сферы $\tilde{S}^2 \rightarrow S^2$. Ясно, что если два отображения $\mathbf{n}(x)$ и $\mathbf{n}_1(x)$ принадлежат к различным гомотопическим классам, они не могут быть непрерывно деформированными одно в другое. Хорошо известно, что существует бесконечное число различных классов отображений $\tilde{S}^2 \rightarrow S^2$. Следовательно, фазовое пространство спиновых полей разбивается на бесконечное число компонентов, каждый из которых характеризуется определенным целым числом q — степенью отображения. Далее будут найдены минимумы энергии в каждом компоненте фазового пространства. Чтобы сделать это, выразим степень отображения через поле $\mathbf{n}(x)$:

$$q = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\mu\nu} n^\alpha \frac{\partial n^\beta}{\partial x_\mu} \frac{\partial n^\gamma}{\partial x_\nu} d^2 x. \quad (5)$$

Это равенство нетрудно доказать, перейдя к сферическим координатам. Тогда получим для степени отображения

$$q = \frac{1}{4\pi} \int \sin \theta(x) d\theta(x) d\phi(x). \quad (6)$$

Следовательно, q — есть число раз, которое сфера S^2 покрывается при отображении¹⁾.

¹⁾ Поля с большим числом компонентов $k > 3$ производят отображения $\tilde{S}^2 \rightarrow S^{k-1}$. Известно, что все такие отображения стягиваются к тривиальному. Поэтому минимумов, подобных найденным ниже, в этом случае не существует.

Существует важное неравенство

$$\left(\frac{\partial n^\alpha}{\partial x_\mu} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\mu\nu} n^\beta \frac{\partial n^\gamma}{\partial x_\nu} \right)^2 \geq 0. \quad (7)$$

Из (7) и (5) следует, что

$$H = \int \left(\frac{\partial n^\alpha}{\partial x_\mu} \right)^2 d^2x \geq 8\pi q. \quad (8)$$

Формула (8) дает нижние значения энергии метастабильных состояний в каждом гомотопическом классе. Уравнения, которым удовлетворяют эти состояния, имеют вид

$$\frac{\partial n^\alpha}{\partial x_\mu} = \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n^\beta \frac{\partial n^\gamma}{\partial x_\nu}. \quad (9)$$

Чтобы увидеть смысл (9), удобно ввести следующие независимые переменные:

$$\begin{aligned} w_1 &= \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cos \phi, \\ w_2 &= \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \sin \phi, \\ w &= w_1 + iw_2 = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} e^{i\phi}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда из (9) следует

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial w_1}{\partial x_2}. \quad (11)$$

В (11) мы узнаем условия Копи–Римана. Их общее решение есть

$$w = w_1 + iw_2 = f(z), \quad \text{где } z = x_1 + ix_2. \quad (12)$$

Поскольку распределение спинов должно быть непрерывной функцией координат, то единственными особенностями функции f являются полюсы. Таким образом поле соответствующее метастабильному состоянию с данной энергией $8\pi q$ и граничным условием (4) имеет вид

$$w \equiv \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} e^{i\phi} = \prod_i \left(\frac{z - z_i}{\lambda} \right)^{m_i} \prod_j \left(\frac{\lambda}{z - z_j} \right)^{n_j}, \quad (13)$$

где

$$\sum m_i > \sum n_j.$$

Степень отображения q есть число прообразов точки $w(r)$, т.е. число решений уравнения (13), выражающих z через w , откуда

$$q = \sum m_j. \quad (14)$$

Выражение (13) можно получить также из известного решения [3, 4] со степенью отображения $q = 1$, если воспользоваться конформной инвариантностью гамильтониана (3), имеющейся в двумерном случае.

Таким образом мы показали, что ферромагнетик обладает неоднородными метастабильными состояниями. По-видимому, это означает, что в системе даже при очень низких температурах имеется конечная длина корреляции и отсутствует фазовый переход.

Количественное влияние метастабильных состояний на низкотемпературную асимптотику корреляционных функций мы надеемся рассмотреть в последующих работах.

Мы благодарны С. Хохлачеву, который обратил наше внимание на конформную инвариантность (3). Один из нас (А.Б.) благодарит Д. Бурланкова за обсуждения.

Литература

1. Березинский В., ЖЭТФ, 59, 907, 1970; 61, 1144, 1971.
2. Поляков А.М., Phys. Lett., в печати, 1975.
3. Skyrme T., Proc. Roy. Soc., 262, 237, 1961.
4. Фаддеев Л.Д., Препринт MPI-PAE/16, 1974.

КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ИНСТАНТОНОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ σ -МОДЕЛИ

Фатеев В.А., Фролов И.В. и Шварц А.С.

Nuclear Physics. B154 (1979). P. 1-20

Полностью решена задача о квантовых флуктуациях инстантонов в двумерной нелинейной $O(3)$ σ -модели. Вычисление вклада инстантонов сводится к изучению кулоновского газа. Показано, что при учете вклада инстантонов с произвольными топологическими зарядами инфракрасные расходимости устраняются.

1. Введение

Некоторые свойства двумерной нелинейной σ -модели (или непрерывного классического двумерного ферромагнетика Гейзенберга) близки к свойствам четырехмерной неабелевой калибровочной теории. В частности, обе они масштабно инвариантны и асимптотически свободны. В обеих имеются точные мультиинстантонные решения.

Так как нелинейная двумерная σ -модель существенно проще четырехмерной теории Янга-Миллса, то первая из них является идеальным "полигоном" для изучения инстантонных эффектов в четырехмерных калибровочных теориях.

Целью настоящей работы является вычисление инстантонного вклада в гриновские функции нелинейной σ -модели. Рассматриваемая модель описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2f} \sum_{a=1}^3 \partial_\mu \sigma^a \partial_\mu \sigma^a,$$

где $\sigma^a(x_0, x_1)$ является трехкомпонентным единичным вектором:

$$\sum_{a=1}^3 \sigma^a \sigma^a = 1; \quad \mu = 0, 1.$$

Евклидовы гриновские функции в модели представляются в виде

$$\int \phi(\sigma) \exp(-S) \prod d\sigma(x) \bigg/ \int \exp(-S) \prod d\sigma(x), \quad (1.1)$$

где $\phi(\sigma)$ является любым функционалом и S — евклидово действие:

$$S = \frac{1}{2f} \int \sum_{a=1}^3 (\partial_\mu \sigma^a)^2 d^2 x. \quad (1.2)$$

Функциональный интеграл (1.1) может быть вычислен в пределе слабой связи при помощи метода перевала. Чтобы применить этот метод, мы должны знать экстремали евклидова действия (1.2), т.е. инстантоны. Эти инстантоны были открыты в [1].

При описании инстантонов удобно ввести новые полевые и пространственные переменные. Именно, мы используем комплексную переменную $z = x_0 + i x_1$ вместо пространственной и временной координат x_1, x_0 и поле

$$w = \frac{\sigma^1 + i \sigma^2}{1 + \sigma^3}, \quad (1.3)$$

построенное из единичного поля $(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ при помощи стереографической проекции.

В терминах этих переменных

$$S = \frac{4}{f} \int (1 + |w|^2)^{-2} (\partial_z w \partial_{\bar{z}} \bar{w} + \partial_{\bar{z}} w \partial_z \bar{w}) d^2 x, \quad (1.4)$$

где

$$\partial_z = \frac{1}{2} (\partial_x - i \partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} (\partial_x + i \partial_y), \quad d^2 x = \frac{1}{2} i dz d\bar{z}.$$

Топологический заряд

$$q = \frac{1}{\pi} \int (1 + |w|^2)^{-2} (\partial_z w \partial_{\bar{z}} \bar{w} - \partial_{\bar{z}} w \partial_z \bar{w}) d^2 x \quad (1.5)$$

является целым числом для любой конфигурации поля, имеющей конечное евклидово действие. (Подинтегральное выражение в (1.5) может рассматриваться как якобиан отображения σ z -плоскости на двумерную сферу S^2 , при этом величина q есть степень этого отображения.)

Из (1.4) и (1.5) следует, что

$$S = \frac{4\pi}{f} q + \frac{8}{f} \int (1 + |w|^2)^{-2} |\partial_{\bar{z}} w|^2 d^2 x. \quad (1.6)$$

Отсюда видно, что минимальное значение действия S на полях с топологическим зарядом $q \geq 0$ равно $(4\pi/f)q$; это значение достигается на полях, удовлетворяющих уравнению $\partial_{\bar{z}} w = 0$. Поэтому поле

$$v(z) = P_0(z)/P_1(z), \quad (1.7)$$

где $P_0(z), P_1(z)$ — полиномы, является инстантоном. Топологический заряд инстантона (1.7) равен максимальной степени полиномов $P_0(z)$,

$P_1(z)$. Удобно записывать общее q -инстантонное решение (т.е. инстантон с топологическим зарядом q) в виде

$$v(z) = c \frac{(z - a_1) \dots (z - a_q)}{(z - b_1) \dots (z - b_q)}. \quad (1.8)$$

(Инстантоны, которые не могут быть представлены в виде (1.8), несущественны, так как множество этих инстантонов имеет нулевую меру.)

Статья имеет следующую структуру.

В пункте 2 мы описываем процедуру перенормировки при вычислении квантовых флуктуаций инстантонов.

В пункте 3 мы получаем инстантонный вклад с точностью до постоянного множителя. (Постоянный множитель вычисляется в приложении С.) Наш результат состоит в том, что вклад инстантонов в евклидовы гриновские функции может быть записан в виде

$$I_q(\phi) = K^q (q!)^{-2} \int \phi(a, b, c) e^{-\epsilon_q(a, b)} \frac{d^2 c}{\pi(1 + |c|^2)^2} \prod_j^q d^2 a_j d^2 b_j, \quad (1.9)$$

где

$$\epsilon_q(a, b) = - \sum_{i < j}^q \log |a_i - a_j|^2 - \sum_{i < j}^q \log |b_i - b_j|^2 + \sum_{i, j}^q \log |a_i - b_j|^2.$$

Набросок доказательства формулы (1.9) был приведен в [13].

Анализ этого результата проводится в пункте 4. Выражение (1.9) может интерпретироваться как энергия системы, состоящей из q кулоновских частиц в точках a_1, \dots, a_q и q кулоновских частиц с противоположным зарядом в точках b_1, \dots, b_q . Другими словами, одноинстантонное решение можно рассматривать как пару кулоновских частиц с противоположными зарядами, а q -инстантонное решение — как q таких пар. (Эти кулоновские частицы можно назвать инстантонными кварками.) Мы видим, что изучение инстантонного вклада сводится к изучению классической кулоновской системы (ККС). Эта система рассматривалась в ряде работ [5–9]. При помощи результатов этих работ мы находим, что инфракрасная проблема, возникающая в приближении разреженного инстантонного газа, исчезает при корректном учете инстантонного вклада. Существует фазовый переход в ККС: эта система находится в состоянии плазмы при высоких температурах и в молекулярном состоянии при низких температурах. Можно убедиться, что температура кулоновской системы инстантонных кварков в указанном здесь смысле высока, что означает распад инстантонов на несвязанные инстантонные кварки. Таким образом приближение разреженного инстантонного газа не может быть правильным в рассматриваемом случае (это приближение соответствует молекулярной фазе).

Чтобы полностью вычислить инстантонный вклад в некоторые гриновские функции рассматриваемой теории мы используем соотношения Колемана–Фрёлиха между ККС, массивной моделью Тирринга (ММТ) и моделью синус-Гордона (МСГ). Мы находим, что эти функции убывают экспоненциально. Для объяснения этого результата необходимо вспомнить, что в кулоновской плазме существует дебаевское экранирование.

Рядом своих свойств инстантоны в четырехмерной калибровочной теории с группой $SU(2)$ аналогичны инстантонам рассматриваемой модели. В калибровочной теории также можно определить инстантонные кварки. Каждый инстантон с топологическим зарядом 1 может рассматриваться как два инстантонных кварка, и любое q -инстантонное решение — как q положительных и q отрицательных кварков. В случае калибровочной группы $SU(n)$ существует n типов инстантонных кварков и каждое q -инстантонное решение состоит из qn кварков (q кварков каждого типа). Калибровочная теория с группой $SU(n)$ имеет свойства, близкие к свойствам двумерной нелинейной теории, поля которой принимают значения в $(n-1)$ -мерном комплексном проективном пространстве $CP(n-1)$ и инстантонные кварки которой имеют такую же структуру. Инстантонный вклад в $CP(n-1)$ -теории будет вычислен в следующей статье [14]. Можно предположить, что общие свойства системы инстантонных кварков совпадают с теми же свойствами соответствующей σ -модели.

В приложениях мы доказываем некоторые общие результаты и затем используем их в приложении С для завершения вычисления инстантонных детерминантов. А именно, в приложении А изучается связь между регуляризациями детерминантов согласно Паули–Вилларсу и методу собственного времени. В приложении В приводится метод вычисления детерминанта в случае, когда собственные значения зависят полиномиально от числа собственных значений.

2. Регуляризация инстантонного вклада

Применим метод стационарной фазы для вычисления функционального интеграла (1.1). Вклад q -инстантонного решения в числителе в (1.1) обозначим $J_q(\phi)$, так что инстантонный вклад в (1.1) перепишется следующим образом:

$$I(\phi) = \sum_q J_q(\phi) / \sum_q J_q(1). \quad (2.1)$$

Чтобы избежать инфракрасных расхождений, предположим, что поле $\sigma^a(x_0, x_1)$ определено на сфере с обычной метрикой

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu}(1 + (x_1^2 + x_0^2)/4R^2)^{-2}.$$

Чтобы вернуться в евклидову метрику мы переходим к пределу $R \rightarrow \infty$ на конечном этапе вычислений. Мы всегда вместо поля σ^a используем комплексное поле (1.3). При помощи (1.6) представим действие поля $v(z) + \nu(z)$, где $v(z)$ есть поле инстантона (1.7), а $\nu(z)$ — малая вариация этого поля, в следующем виде:

$$S = \frac{4\pi}{f} q + \frac{8}{f} \int \rho_0^{-2} |\partial_{\bar{z}} \nu|^2 d^2 x. \quad (2.2)$$

Здесь $\rho_0 = 1 + |v|^2$, вклады высших порядков опущены. Чтобы работать с несингулярными выражениями, введем следующие функции:

$$\rho = \rho_0 \prod_j |z - b_j|^2, \\ \tilde{\nu} = 2\nu \rho^{-1} \prod_j (z - b_j)^2.$$

Тогда

$$S = \frac{4\pi}{f} q + \frac{2}{f} \int \bar{\tilde{\nu}} \Delta_v \tilde{\nu} \sqrt{g} d^2 x, \quad (2.3)$$

где

$$\Delta_v = -g^{-1/2} \rho \partial_z \rho^{-2} \partial_{\bar{z}} \rho. \quad (2.4)$$

Скалярное произведение вариаций ν_1 и ν_2 представляется в виде

$$2 \int \rho_0^{-2} (\bar{\nu}_1 \nu_2 + \nu_1 \bar{\nu}_2) \sqrt{g} d^2 x = \frac{1}{2} \int (\bar{\tilde{\nu}}_1 \tilde{\nu}_2 + \tilde{\nu}_1 \bar{\tilde{\nu}}_2) \sqrt{g} d^2 x = \\ = \int \sum_{a=1}^3 \delta_1 \sigma^a \delta_2 \sigma^a \sqrt{g} d^2 x.$$

Это скалярное произведение вещественно, так что Δ_v действует в вещественном гильбертовом пространстве. Вклад q -инстантонного решения в (1.1) определяется формулой

$$J_q(\phi) = f^{-2q} \exp\left(-\frac{4\pi q}{f}\right) \int \phi(v) \det^{-1/2} \left(\frac{2}{\pi} \Delta_v\right) d\mu_0, \quad (2.5)$$

где $d\mu_0$ обозначает меру на многообразии инстантонов, индуцируемую метрикой на этом многообразии. (Мы не принимаем во внимание нулевые моды ввиду нашего определения детерминантов.) Введем комплексные параметры $\varphi_0 = c$, $\varphi_1 = a_1, \dots, \varphi_q = a_q$, $\varphi_{q+1} = b_1, \dots, \varphi_{2q} = b_q$ на многообразии инстантонов (1.8). Тогда метрика на этом многообразии записывается в виде

$$\sum_{k,j} \left(\int 4\rho_0^{-2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi_k} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi_j} \right) \sqrt{g} d^2 x \right) \delta \bar{\varphi}_k \delta \varphi_j = \sum_{k,j} N_{kj} \delta \bar{\varphi}_k \delta \varphi_j, \quad (2.6)$$

где $\delta\phi_j$ обозначает вариацию параметра ϕ_j . Матрица N_{kj} должна интерпретироваться как метрический тензор на многообразии инстантов. Поэтому имеем

$$d\mu_0 = (q!)^{-2} \det N \prod_k d^2\varphi_k, \quad (2.7)$$

где $d^2\varphi = \frac{1}{2} i d\varphi d\bar{\varphi}$. Комбинаторный множитель $(q!)^{-2}$ необходим, чтобы избежать двойного учета. (Перестановки нулей a_1, \dots, a_q и перестановки полюсов b_1, \dots, b_q не изменяют инстантон (1.8).) Докажем полезное тождество

$$\det N = 2^{4q+2} |c|^{4q} \prod_{k>j} |a_k - a_j|^2 |b_k - b_j|^2 \prod_{l,m} |a_l - b_m|^2 \det M, \quad (2.8)$$

где

$$M_{kj} = \int \rho^{-2} \bar{z}^k z^j \sqrt{g} d^2x. \quad (2.9)$$

Чтобы проверить равенство (2.8), заметим, что выражение

$$(\partial v / \partial \varphi_k) \prod_j (z - b_j)^2$$

может быть представлено в виде

$$\sum_{k=0}^{2q} U_{jk} z^k.$$

При помощи этого представления получаем, что $N = U^+ M U$ и, следовательно,

$$\det N = \det M |\det U|^2.$$

Нетрудно проверить, что $\det U = 0$ если $\phi_i = \phi_j$, $1 \leq i, j \leq 2q$ (в этом случае две строки в U совпадают с точностью до знака). Замечая, что $\det U$ является полиномом степени $q(2q-1)$, находим

$$\det U = 2^{2q+1} |c|^{2q} \prod_{k>j} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \prod_{l,m} (a_l - b_m).$$

Тем самым формула (2.8) доказана.

Равенство (2.5) является формальным, поскольку оно содержит бесконечномерный детерминант. Для регуляризации этого детерминанта мы используем обрезание собственного времени. Иными словами, мы определяем величину $\log \det_\epsilon \Delta v$ как

$$- \sum_i \int_\epsilon^\infty e^{-\lambda_i t} \frac{dt}{t},$$

где λ_i пробегают значения всех ненулевых собственных значений оператора Δ_v . Таким образом

$$\log \det_{\epsilon} \Delta_v = - \int_{\epsilon}^{\infty} (\text{Sp } e^{-t\Delta_v} - p) \frac{dt}{t}, \quad (2.10)$$

где p — число нулевых мод оператора Δ_v , т.е. $p = 4q + 2$. Асимптотика величины $\text{Sp } \exp(-i\Delta_v)$ при $t \rightarrow 0$ может быть вычислена квазиклассически; таким образом находим:

$$\text{Sp } e^{-t\Delta_v} \simeq \alpha_1 t^{-1} + \alpha_0, \quad (2.11)$$

здесь $\alpha_1 = R^2$, $\alpha_0 = 2q$. При помощи (2.11) находим, что расходящаяся часть величины $\log \det_{\epsilon} \Delta_v$ при $\epsilon \rightarrow 0$ имеет следующий вид:

$$\alpha_1 \epsilon^{-1} + (\alpha_0 - p) \log \epsilon = R^2 \epsilon^{-1} - (2q + 2) \log \epsilon.$$

Удобно $J_q(\phi)$ заменить величиной

$$I_q(\phi) = \frac{J_q(\phi)}{4\pi V \det_{\epsilon}^{-1/2}((2/\pi)\Delta_0)},$$

где $V = 4\pi R^2$ — площадь сферы, Δ_0 обозначает оператор Δ_v для тривиального инстантона $v = 0$. (Можно показать, что знаменатель последнего выражения равен $J_0(1)$). При вычислении величины $I_q(\phi)$ линейно расходящиеся вклады в $\log \det_{\epsilon} \Delta_v$ и $\log \det_{\epsilon} \Delta_0$ взаимно сокращаются. Учитывая обычную однопетлевую перенормировку константы связи, находим, что и логарифмические расходимости в $I_q(\phi)$ также сокращаются. (Аналогичная процедура перенормировки в теории Янга–Миллса подробно описана в [3]).

Регуляризованный детерминант $\det' \Delta_v$ оператора Δ_v определяется следующим образом:

$$\log \det' \Delta_v = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\log \det_{\epsilon} \Delta_v - \alpha_1 \epsilon^{-1} - \alpha_0 \log \epsilon). \quad (2.12)$$

Иными словами, величина $\log \det' \Delta_v$ является конечной частью величины $\log \det_{\epsilon} \Delta_v$. Таким образом мы видим, что после удаления обрезания величина $I_q(\phi)$ может быть представлена при помощи регуляризованных детерминантов согласно формуле

$$I_q(\phi) = W^q \int \phi(v) d\mu, \quad (2.13)$$

где

$$d\mu = (\det' \Delta_0 / \det' \Delta_v)^{1/2} d\mu_0, \\ W = k_0 f_{\text{phys}}^{-2} \exp(-4\pi / f_{\text{phys}}) \nu^2. \quad (2.14)$$

Здесь ν является точкой вычитания, f_{phys} — физической константой связи и k_0 — константой, зависящей от метода обрезания.

3. Вычисление детерминантов

В этом пункте мы изучаем зависимость величины $\det' \Delta_v$ от инстантонных параметров. Из (2.10) следует, что

$$\delta \log \det_{\epsilon} \Delta_v = \int_{\epsilon}^{\infty} \text{Sp}(\delta \Delta_v e^{-t\Delta_v}) dt, \quad (3.1)$$

где

$$\delta \Delta_v = \rho^{-1} \delta \rho \Delta_v + \Delta_v \rho^{-1} \delta \rho - 2\rho \partial_z \rho^{-3} \delta \rho \partial_{\bar{z}} \rho.$$

Замечая, что α_1 и α_0 не зависят от инстантонных параметров, мы получаем при помощи (2.12) и (3.1)

$$\delta \log \det' \Delta_v = \int_0^{\infty} \text{Sp}(\delta \Delta_v e^{-t\Delta_v}) dt.$$

Определим оператор $\tilde{\Delta}_v$ при помощи формулы

$$\tilde{\Delta}_v = -\rho^{-1} \partial_z \rho^2 g^{-1/2} \partial_{\bar{z}} \rho^{-1}.$$

Очевидно, что

$$\Delta_v \rho \partial_z \rho^{-1} = \rho \partial_{\bar{z}} \rho^{-1} \tilde{\Delta}_v$$

и потому

$$\begin{aligned} \delta \log \det' \Delta_v &= 2 \int \text{Sp} \rho^{-1} \delta \rho (\Delta_v e^{-t\Delta_v} - \tilde{\Delta}_v e^{-t\tilde{\Delta}_v}) dt = \\ &= -2 \int \frac{\partial}{\partial t} \text{Sp} \rho^{-1} \delta \rho (e^{-t\Delta_v} - e^{-t\tilde{\Delta}_v}) dt. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Чтобы вычислить интеграл в (3.2), мы должны изучить поведение подинтегрального выражения при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. При $t \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} \langle z | e^{-t\Delta_v} | z \rangle &= \frac{\sqrt{g}}{4\pi} t^{-1} + \frac{1}{8\pi} \frac{|\partial_{\bar{z}} v|^2}{(1 + |v|^2)^2} + \dots = \\ &= \frac{\sqrt{g}}{4\pi} t^{-1} + \frac{1}{2\pi} \partial_{\mu} \partial_{\mu} \log \rho + \dots \\ \langle z | e^{-t\tilde{\Delta}_v} | z \rangle &= \frac{\sqrt{g}}{4\pi} t^{-1} - \frac{1}{2\pi} \partial_{\mu} \partial_{\mu} \left(\log \rho - \frac{1}{4} \log g \right). \end{aligned}$$

Опущенные здесь слагаемые стремятся к нулю. (Эти формулы могут быть получены при помощи квазиклассического метода, либо при использовании результатов работы [2]. Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ определяется нулевыми модами $\psi_0, \dots, \psi_{4q+1}$ оператора Δ_v . (Оператор $\tilde{\Delta}_v$ не имеет нулевых мод). Имеем:

$$\delta \log \det' \Delta_v = A_1 + A_2. \quad (3.3)$$

Здесь

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \delta \int \log \rho \partial_\mu \partial_\mu \log \rho d^2 x - \frac{1}{4\pi} \int \delta(\log \rho) \partial_\mu \partial_\mu \log g d^2 x + \\ + \frac{1}{\pi} \oint ((\delta \log \rho) \partial_\mu \log \rho - \log \rho \partial_\mu \delta \log \rho) d\sigma_\mu \equiv B_1 + B_2 + B_3, \quad (3.4)$$

$$A_2 = -2 \int \rho^{-1} \delta \rho \pi(x) d^2 x,$$

$$\pi(x) = \sum_i \bar{\psi}_i(x) \psi_i(x) \quad (3.5)$$

(мы предполагаем, что $\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$). Последний интеграл в формуле (3.4) легко вычисляется, если контур интегрирования стремится к бесконечности. Таким образом получаем

$$B_3 = 4q(1 + |c|^2)^{-1} \delta |c|^2.$$

Второе слагаемое в (3.4) вычисляется в пределе $R \rightarrow \infty$:

$$B_2 = 4(1 + |c|^2)^{-1} \delta |c|^2.$$

Первое слагаемое в (3.4) может быть представлено в следующем виде:

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \delta \int \log \rho_0 \partial_\mu \partial_\mu \log \rho d^2 x + \\ + \frac{1}{\pi} \delta \sum_k \int \log |z - b_k|^2 \partial_\mu \partial_\mu \log \rho d^2 x = \\ = \frac{1}{\pi} \delta \int \log(1 + |v|^2) \frac{|\partial_z v|^2}{(1 + |v|^2)^2} \frac{1}{2} i dz d\bar{z} + \\ + \frac{\delta}{\pi} \int \sum_k (\partial_\mu \partial_\mu \log |z - b_k|^2) \log \rho d^2 x + \\ + \frac{1}{\pi} \delta \sum_k \oint ((\partial_\mu \log \rho) \log |z - b_k|^2 - \log \rho \partial_\mu \log |z - b_k|^2) d\sigma_\mu. \quad (3.6)$$

Вариация первого интеграла в (3.6) обращается в нуль, так как этот интеграл равен топологическому заряду:

$$\frac{1}{\pi} \int \log(1 + |v|^2) \frac{|\partial_z v|^2}{(1 + |v|^2)^2} \frac{1}{2} i dz d\bar{z} = \frac{q}{\pi} \int \log(1 + |v|^2) \frac{d^2 v}{(1 + |v|^2)^2}.$$

Множитель q возникает здесь потому, что точка в z -плоскости имеет, вообще говоря, q прообразов в V -плоскости. Для нахождения второго слагаемого в (3.6) следует принять во внимание, что

$$\partial_\mu \partial_\mu \log(x - a)^2 = 4\pi \delta(x - a).$$

Последнее слагаемое в (3.6) легко вычисляется. Таким образом получаем

$$B_1 = 4\delta \left(\sum_k \log |c|^2 \prod_j |a_j - b_k|^2 \right) - 4q(1 + |c|^2)^{-1} \delta |c|^2,$$

Следовательно

$$A_1 = 4\delta \log \left(\prod_{j,k} |a_j - b_k|^2 \right) + 4(1 + |c|^2)^{-1} \delta |c|^2 + 4q|c|^{-2} \delta |c|^2. \quad (3.7)$$

Вычислим теперь A_2 . Удобно выбрать стандартный базис нулевых мод оператора Δ_v в виде $\chi_k = \rho^{-1} z^{k/2}$ при четных k и

$$\chi_k = i \rho^{-1} z^{(k-1)/2}$$

при нечетных k . Этот набор нулевых мод не ортонормален, и потому выражение A_2 через функции χ_k имеет вид

$$A_2 = -2 \int \rho^{-3} \delta \rho \bar{\chi}_j \chi_k \sqrt{g} d^2 x r_{kj}^{-1} = \text{Sp } \delta r r^{-1} = \delta \log \det r, \quad (3.8)$$

где

$$r_{kj} = \int \rho^{-2} \bar{\chi}_k \chi_j \sqrt{g} d^2 x, \quad (3.9)$$

и матрица $(r^{-1})_{kj}$ является обратной к матрице (3.9). Нетрудно проверить, что

$$\det r = (\det M)^2,$$

где матрица M определена согласно (2.9). Сопоставляя формулы (3.3) и (3.8), мы видим, что формула (3.7) дает вариацию выражения $\log \det' \Delta_v - 2 \log \det M$. Теперь при помощи (2.7), (2.8), (2.14) и (3.7) легко получить следующее выражение для меры $d\mu$:

$$d\mu = K_q (q!)^{-2} \prod_{k>j} |a_k - a_j|^2 |b_k - b_j|^2 \times \\ \times \prod_{l,m} |a_l - b_m|^2 \frac{d^2 c}{\pi(1 + |c|^2)^2} \prod_j d^2 a_j d^2 b_j. \quad (3.10)$$

Здесь постоянный множитель K_q не определен. В том случае, когда для каждого j мы имеем $|a_j - b_j| \ll |a_j|, |b_j|$, инстантонное решение может рассматриваться как суперпозиция пространственно разделенных инстантонов с топологическими зарядами 1. В этом случае выражение (3.10) может быть представлено как произведение множителей, соответствующих одноинстантонным решениям:

$$d\mu \simeq K_q (q!)^{-2} \left(\prod_j |a_j - b_j|^{-2} d^2 a_j d^2 b_j \right) \frac{d^2 c}{\pi(1 + |c|^2)^2}.$$

Естественно предположить, что постоянный множитель распадается на произведение одноинстантонных множителей:

$$K_q = L^q, \quad (3.11)$$

где $L = K_1$. Равенство (3.11) доказывается в приложении С. Значение величины K_1 может быть получено при изучении одноинстантонного вклада [15].

4. Анализ инстантонного вклада

В этом пункте мы изучаем суммарный инстантонный вклад в гриновские функции.

Учитывая инстантоны, имеющие произвольные топологические заряды, получаем в рамках метода стационарной фазы при помощи результатов предыдущего пункта следующее выражение для гриновских функций:

$$I(\phi) = \frac{\sum_q \Psi(a, b, c) \frac{K^q}{(q!)^2} \exp(-\epsilon_q(a, b)) \frac{d^2 c}{\pi(1+|c|^2)^2} \prod_j d^2 a_j d^2 b_j}{\sum_q \int \frac{K^q}{(q!)^2} \exp(-\epsilon_q(a, b)) \prod_j d^2 a_j d^2 b_j}, \quad (4.1)$$

Здесь $(a, b, c) = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; c)$, причем a_i, b_i, c — двумерные вектора (или комплексные числа), $K = LW$

$$\epsilon_q(a, b) = - \sum_{i < j}^q \log |a_i - a_j|^2 - \sum_{i < j}^q \log |b_i - b_j|^2 + \sum_{i, j}^q \log |a_i - b_j|^2,$$

$$\Psi(a, b, c) = \phi(w),$$

где w и W соответственно задаются согласно (1.8) и (2.14).

Легко увидеть, что знаменатель Z_{inst} в (4.1) может быть выражен через статистическую сумму Ξ двумерной нейтральной классической кулоновской системы (ККС) большого канонического ансамбля:

$$\Xi = \sum_q \frac{K^q}{(q!)^2} \int \exp\left(-\frac{1}{T} \epsilon_q(a, b)\right) \prod_j d^2 a_j d^2 b_j. \quad (4.2)$$

Если здесь температура $T = 1$, то

$$Z_{\text{inst}} = \Xi. \quad (4.3)$$

Постоянная K (точнее — ее логарифм, умноженный на T) играет роль химического потенциала кулоновской системы. Выражение (4.1) совпадает с корреляционной функцией ККС

$$\frac{\sum_q (K^q / (q!)^2) \int \varphi(a, b) \exp(-(1/T) \epsilon_q(a, b)) \prod_j d^2 a_j d^2 b_j}{\sum_q (K^q / (q!)^2) \int \exp(-(1/T) \epsilon_q(a, b)) \prod_j d^2 a_j d^2 b_j}. \quad (4.4)$$

Рассмотрим, например, инстантонный вклад $G^{\text{inst}}(x, y)$ в гриновскую функцию

$$G(x, y) = \langle \Delta \log |w(x)|, \Delta \log |w(y)| \rangle,$$

соответствующую функционалу

$$\phi(w) = \Delta \log |w(x)| \Delta \log |w(y)|.$$

Нетрудно увидеть, что

$$\varphi(a, b) = \psi(a, b, c) = \rho(x)\rho(y),$$

где $\rho(x) = 2\pi \sum_i (\delta(x - a_i) - \delta(x - b_i))$. Поле $\rho(x)$ можно интерпретировать как плотность заряда. Мы видим, что

$$G^{\text{inst}}(x, y) = \langle \Delta \log |w(x)|, \Delta \log |w(y)| \rangle_{\text{inst}} = \langle \rho(x), \rho(y) \rangle_{\text{ККС}}. \quad (4.5)$$

Аналогичным образом устанавливается также, что инстантонный вклад в гриновскую функцию, соответствующую функционалу

$$\phi(w) = \Delta \log |w(x_1)| \dots \Delta \log |w(x_n)|$$

дается формулой

$$G_n^{\text{inst}}(x_1, \dots, x_n) = \langle \rho(x_1), \dots, \rho(x_n) \rangle_{\text{ККС}}.$$

Таким образом мы видим, что инстантоны тесно связаны с классической кулоновской системой при $T = 1$; эта кулоновская система будет называться системой инстантонных кварков. Хорошо известно, что в ККС имеют место ультрафиолетовые расходимости, если температура T подчинена слабому неравенству $T \leq 1$. Из сказанного следует, что в нашем случае существуют ультрафиолетовые расходимости и потому необходимо сделать ультрафиолетовое обрезание. (Например, можно рассматривать кулоновскую систему на решетке или кулоновские частицы с ядром). В более сложных моделях, таких как $CP(n-1)$ -теория или калибровочные теории, ультрафиолетовая проблема отсутствует.

Конечно, при вычислении величин (4.2) и (4.4) необходимо рассматривать кулоновскую систему в ящике (т.е. сделать пространственное обрезание). Если размер ящика L стремится к бесконечности, то существует предел давления $p = (1/L^2)T \log \Xi$. Аналогичное утверждение справедливо для корреляционных функций в ККС. Эти утверждения не могут быть получены из общих результатов статистической механики, так как кулоновский потенциал является дальнедействующим. Тем не менее можно дать независимое доказательство приведенных утверждений в кулоновском случае (например, см. [5]). Существование предела при $L \rightarrow \infty$ означает отсутствие инфракрасных расходимостей в рассматриваемой проблеме. Известно, что существует фазовый переход в ККС [6–9]. Эта система находится в плазменной фазе при $T > T_{\text{ср}}$ и в молекулярной фазе при $T < T_{\text{ср}}$.

В молекулярной фазе кулоновские частицы образуют диполи; точнее, лишь конфигурации параметров $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$, удовлетворяющие неравенствам

$$|a_i - b_i| \ll |a_i - a_j|, \quad (4.6)$$

являются существенными. Температура кулоновского газа инстантонных кварков выше, чем T_{cr} , и потому этот газ находится в плазменной фазе. (Вычисления в [7–9] показывают, что $T_{cr} \approx 1/2$, и, следовательно, $T_{cr} < 1$). Как было выше упомянуто, конфигурации, удовлетворяющие (4.6) (дипольные конфигурации), соответствуют взаимно удаленным инстантонам. (Можно интерпретировать вектор $(1/2)(a_i + b_i)$ как позицию i -ого инстантона и $(1/2)|a_i - b_i|$ — как его размер). Приближение разреженного инстантонного газа получается, если в (4.1) учитываются лишь конфигурации, удовлетворяющие неравенствам (4.6). В рассматриваемой проблеме это приближение не имеет смысла, так как газ инстантонных кварков находится в плазменной фазе. Заметим, что в приближении разреженного инстантонного газа имеются инфракрасные расходимости, которые, как было показано, исчезают при точном решении.

Теперь изучим инстантонный вклад в некоторые гриновские функции. В дальнейших вычислениях мы предполагаем, что ультрафиолетовое обрезание устраняется и применяется стандартная процедура перенормировки. Здесь удобно использовать соответствие Колемана–Фрелиха между ККС, массивной моделью Тирринга (ММТ) и моделью синус-Гордона (МСГ) [4, 5].

Это соответствие имеет место, когда обратная температура $1/T$ в ККС, константа β в МСГ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + M^2 \cos \beta \varphi, \quad (4.7)$$

и константа g в ММТ

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \partial_\mu \gamma_\mu \psi + m \bar{\psi} \psi + g (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi), \quad (4.8)$$

связаны соотношением

$$\frac{1}{T} = \frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1 + g/\pi}.$$

В нашем случае $T = 1$; $\beta = 2\sqrt{\pi}$; $g = 0$ и мы видим, что кулоновская система инстантонных кварков эквивалентна свободным фермионам.

Таким образом полный инстантонный вклад в статистическую сумму может быть представлен как вакуумный функциональный интеграл для свободного дираковского поля (СДП):

$$Z_{inst} = \int \prod_x d\bar{\psi}(x) d\psi(x) \exp \int (\bar{\psi} i \gamma_\mu \partial_\mu \psi + m \bar{\psi} \psi) d^2 x. \quad (4.9)$$

Интересно заметить, что масса дираковского поля, играющая роль обратного радиуса корреляции в нашей системе,

$$m = c(\mu/f_{\text{phys}}) e^{-2\pi/f_{\text{phys}}}$$

(здесь c — несущественная константа), связана с f_{phys} при помощи обычной формулы ренорм-группы.

Теперь мы можем вычислить инстантонный вклад (4.1) в гриновскую функцию (4.5):

$$G^{\text{inst}}(x, y) = \langle \Delta \log |w(x)|, \Delta \log |w(y)| \rangle_{\text{inst}} = \langle \rho(x), \rho(y) \rangle_{\text{ККС}}.$$

При вычислении этой функции полезно использовать выражение для генерирующего функционала зарядовой плотности кулоновской плазмы. Это выражение может быть получено обычным путем при использовании соответствия (ККС) \longleftrightarrow (МСГ):

$$\begin{aligned} & \langle \exp \left((i/\sqrt{\pi}) \int \eta(x) \rho(x) dx \right) \rangle_{\text{ККС}} = \\ & = \frac{\sum_q (K^q/(q!)^2) \int e^{-\epsilon_q(a,b)} \exp \left(i \sum_j 2\sqrt{\pi}(\eta(a_j) - \eta(b_j)) \right) \prod_j d^2 a_j d^2 b_j}{\sum_q (K^q/(q!)^2) \int e^{-\epsilon_q(a,b)} \prod_j d^2 a_j d^2 b_j} = \\ & = \int \prod_x d\varphi(x) \exp \left[- \int \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + M^2 \cos 2\sqrt{\pi}(\varphi + \eta) \right] d^2 x \right] = \\ & = \int \prod_x d\varphi(x) \exp \left[- \int \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu (\varphi - \eta))^2 + M^2 \cos 2\sqrt{\pi}\varphi \right] d^2 x \right]. \quad (4.10) \end{aligned}$$

При помощи (4.10) получаем

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{i}{\sqrt{\pi}} \Delta \log |w(x)|, \frac{i}{\sqrt{\pi}} \Delta \log |w(y)| \right\rangle_{\text{inst}} = \\ & = \langle \Delta \varphi(x), \Delta \varphi(y) \rangle_{\text{SG}} + \Delta_x \delta(x - y). \quad (4.11) \end{aligned}$$

Пользуясь также соотношением

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_\mu \varphi(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_\nu \varphi(y) \right\rangle_{\text{SG}} = \epsilon_{\mu\alpha} \epsilon_{\nu\beta} \langle \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi(x), \bar{\psi} \gamma^\beta \psi(y) \rangle_{\text{СДП}}, \quad (4.12)$$

вычисляем искомую функцию точно:

$$G^{\text{inst}}(x, y) = \int \frac{d^2 k}{4\pi} e^{ik(x-y)} m^2 \sqrt{\frac{k^2}{k^2 + m^2}} \log \left\{ \frac{\sqrt{k^2 + m^2} + \sqrt{k^2}}{\sqrt{k^2 + m^2} - \sqrt{k^2}} \right\}. \quad (4.13)$$

Представляется интересным выразить суммы инстантонных вкладов в некоторые корреляционные функции в σ -модели через гриновские функции свободного фермионного поля. Для этого следует использовать евклидову версию представления Мандельштама фермионного поля в ММТ через СГ-поле [10]. Мы приводим эти формулы, которые были получены в работе [11]

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= C \exp\left(\gamma \int^x dx_\mu \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \varphi + i \beta \varphi(x)\right), \\ \psi_2(x) &= (-i)C \exp\left(\gamma \int^x dx_\mu \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \varphi - i \beta \varphi(x)\right), \\ \psi_1^+(x) &= C \exp\left(-\gamma \int^x dx_\mu \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \varphi - i \beta \varphi(x)\right), \\ \psi_2^+(x) &= i C \exp\left(-\gamma \int^x dx_\mu \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \varphi + i \beta \varphi(x)\right).\end{aligned}\quad (4.14)$$

Здесь C является несущественной нормировочной константой

$$\gamma^2 = \pi \frac{1 + g/2\pi}{1 - g/2\pi}, \quad \beta^2 = \pi \frac{1 - g/2\pi}{1 + g/2\pi}.$$

В нашем случае

$$\gamma = \beta = \sqrt{\pi}.$$

При помощи (4.11) и уравнения Коши–Римана

$$\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \log |w(z)| = \partial_\mu \arg w(x)$$

можно получить следующую формулу:

$$\begin{aligned}\langle w(x), w^{-1}(y) \rangle_{\text{inst}} &= \\ &= \langle \exp[\log |w(x)| + i \arg w(x)] \exp[-\log |w(y)| - i \arg w(y)] \rangle_{\text{inst}} = \\ &= \frac{\langle \psi_1^+(x), \psi_1(y) \rangle_m}{\langle \psi_1^+(x), \psi_1(y) \rangle_0}.\end{aligned}$$

Здесь $\langle \psi_1^+(x), \psi_1(y) \rangle_m$ обозначает гриновскую функцию свободного массивного дираковского поля с массой m и $\langle \psi_1^+(x), \psi_1(y) \rangle_0$ — гриновскую функцию свободного безмассового дираковского поля.

Гриновские функции (4.13), (4.15) затухают экспоненциально при $m|x - y| \gg 1$ и, таким образом, m играет роль корреляционного радиуса в рассматриваемой σ -модели.

Мы благодарим А.Г. Аронова, А.А. Белавина, Ф.А. Березина, Е.Б. Богомольного, В.Н. Грибова, А.А. Мигдала, А.М. Полякова и Ю.С. Тюпкина за многочисленные полезные обсуждения.

Приложение А

В этом приложении устанавливается связь между регуляризациями детерминантов при помощи метода Паули–Вилларса и метода собственного времени.

Пусть A — неотрицательный эллиптический оператор на компактном многообразии. Тогда при $t \rightarrow 0$

$$\text{Sp exp}(-tA) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k t^{-k} + O(t^\delta)$$

и при $t \rightarrow \infty$

$$\text{Sp exp}(-tA) = p + O(t^{-\delta}).$$

Здесь k пробегает конечное множество неотрицательных чисел, p обозначает число нулевых мод оператора A . Поэтому мы можем представить величину $\text{Sp exp}(-tA)$ в виде

$$\text{Sp exp}(-tA) = p + \sum_{k > 0} \alpha_k t^{-k} + (\alpha_0 - p) \theta(1-t) + \sigma(t), \quad (\text{A.1})$$

где $\sigma(t) = O(t^\delta)$ при $t \rightarrow 0$, $\sigma(t) = O(t^{-\delta_1})$ при $t \rightarrow \infty$, $\delta_1 > 0$, $\delta > 0$. Если используется метод регуляризации собственного времени оператора A (см. пункт 2), то

$$\log \det' A = - \int_0^\infty t^{-1} \sigma(t) dt. \quad (\text{A.2})$$

Выберем коэффициенты c_j и массы M_j , $j = 0, 1, \dots, l$, удовлетворяющими условиям $M_0 = 0$, $M_j \rightarrow \infty$ для $j > 0$;

$$c_0 = 1; \quad \sum_j c_j = 0; \quad \sum_j c_j M_j^{2p} = 0 \quad \text{для } p = 1, 2, \dots, l.$$

(Здесь l обозначает наибольшее целое, такое, что существует k из (A.1), удовлетворяющее условию $k \leq l$, т.е. $l = [k_{\max}]$.) Регуляризация детерминанта при помощи метода Паули–Вилларса определяется формулой

$$\log \det_{\text{PV}} A = - \int_0^\infty \sum_j c_j e^{-M_j^2 t} (\text{Sp } e^{-tA} - p) \frac{dt}{t}. \quad (\text{A.3})$$

При помощи собственных значений λ_j оператора A это выражение переписывается в следующем виде:

$$\log \det_{\text{PV}} A = - \int_0^\infty \sum_j \sum_{\lambda_i \neq 0} c_j e^{-(\lambda_i + M_j^2)t} \frac{dt}{t} = \sum_j \sum_{\lambda_i \neq 0} c_j \log(\lambda_i + M_j^2). \quad (\text{A.4})$$

Правые части равенств (A.3) и (A.4) сходятся вследствие условий, наложенных на константы c_j и M_j .

Связь между регуляризациями детерминантов при помощи методов Паули–Вилларса и собственного времени устанавливается при помощи формулы

$$\begin{aligned} \log \det' A = \log \det_{\text{PV}} A - \sum_{k=|k|>0} (-1)^k \frac{\alpha_k}{k!} \sum_j c_j M_j^{2k} \log M_j^2 - \\ - \sum_{k \neq [k]} \Gamma(-k) \alpha_k \sum_j c_j M_j^{2k} - (\alpha_0 - p) \sum_{j \neq 0} c_j \log M_j^2 + \\ + \gamma(\alpha_0 - p) + O(M_j^{-2\delta}), \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

где $\gamma = -\Gamma'(1) = 0,5772$ — константа Эйлера. Доказательство (A.5) основано на следующих формулах:

$$\begin{aligned} \int t^{-k-1} \sum_j c_j e^{-tM_j^2} dt = \\ = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \sum_j c_j M_j^{2k} \log M_j^2, & \text{если } k = [k] > 0, \\ -\Gamma(-k) \sum_j c_j M_j^{2k}, & \text{если } k \neq [k], \end{cases} \\ \int_0^1 \sum_j c_j e^{-tM_j^2} dt = \int_0^1 (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t} - \int_1^\infty e^{-t} \frac{dt}{t} + \\ + \int_0^\infty \left(e^{-t} + \sum_{j \neq 0} c_j e^{-tM_j^2} \frac{dt}{t} + O(M_j^{-2}) \right) = \gamma - \sum_{j \neq 0} c_j \log M_j^2, \\ \int_0^\infty e^{-tM_j^2} \sigma(t) \frac{dt}{t} = O(M_j^{-2\delta}). \end{aligned}$$

Сравним также рассмотренные выше регуляризации с регуляризацией при помощи дзета-функции, определенной согласно соотношению

$$\log \det_\zeta A = -\frac{d}{ds} \zeta(s) \Big|_{s=0},$$

где

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} (\text{Sp } e^{-tA} - p) dt.$$

Имеет место следующее равенство [3]:

$$\log \det' A = \log \det_\zeta A + \gamma(\alpha_0 - p). \quad (\text{A.6})$$

Приложение В

Теперь вычислим регуляризованный детерминант оператора A , имеющего собственные значения $\lambda_\nu = (\nu + a)(\nu + b)$ с кратностями $d_\nu = c\nu + f$. Удобно использовать обозначения

$$a = a_0 + \alpha; \quad b = b_0 + \beta,$$

где $0 < \alpha, \beta \leq 1$, причем a_0 и b_0 — целые числа. Мы покажем, что

$$\begin{aligned} \log \det' A &\equiv Z(a, b, c, f) = \\ &= -\gamma \frac{1}{2} f(a + b - 2a_0 + 1) c \zeta'_R(-1, \alpha) - c \zeta'_R(-1, \beta) - \\ &\quad - (f - ca) \zeta'_R(0, \alpha) - (f - cb) \zeta'_R(0, \beta) - \\ &\quad - \sum_{\nu=0}^{b_0 - a_0 - 1} (c\nu + f - cb_0) \log(\nu + \beta) + \frac{1}{4} c(b - a)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Удобно использовать регуляризацию Паули–Вилларса и формулу (А.5), связывающую величины $\log \det_{PV} A$ и $\log \det' A$.

В формуле (А.4) вычислим сумму по всем λ_ν с $\nu \leq \Lambda - a_0$, где Λ — некое большое целое число. Можно показать, что хвост имеет порядок $O(\Lambda^{-1})$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \log \det_{PV} A &= \\ &= \sum_j c_j \sum_{\nu=-a_0}^{\Lambda - a_0} (c\nu + f) \log((\nu + a)(\nu + b) + M_j^2) + O(\Lambda^{-1}) \equiv \\ &\equiv \sum_j c_j D_j + O(\Lambda^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Сначала вычислим величину D_j . Удобно использовать переменные $t = b - a_0 \equiv t + \beta$; $g = f - a_0 c$. Тогда

$$\begin{aligned} D_0 &= \sum_{\nu=0}^{\Lambda} (c\nu + g) \log(\nu + \alpha)(\nu + t) = \\ &= c\Lambda^2 \log \Lambda + (c + 2g)\Lambda \log \Lambda - \frac{1}{2} c\Lambda^2 - (2g - c(\alpha + t))\Lambda + \\ &\quad + \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{3} - \alpha^2 - t^2 \right) + g(1 + \alpha + t) \log \Lambda - \\ &\quad - c \zeta'_R(-1, \alpha) - c \zeta'_R(-1, \beta) - (g - c\alpha) \zeta'_R(0, \alpha) - (g - ct) \zeta'_R(0, \beta) + \\ &\quad + \frac{1}{2} c \left(\alpha^2 + \alpha + t^2 + t + \frac{1}{3} \right) - \sum_{\nu=0}^{t_0-1} (c\nu + g - ct_0) \log(\nu + \beta). \end{aligned}$$

Нами была использована формула

$$\sum_{\nu=0}^{\Lambda} (\nu + \alpha)^{-s} = \frac{(\Lambda + \alpha)^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{2} (\Lambda + \alpha)^{-s} + \zeta_R(s, \alpha) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{(2k)!} s(s+1) \dots (s+2k-\alpha) (\Lambda + 2)^{1-2k-s},$$

где $\zeta_R(s, \alpha)$ — обобщенная дзета-функция Римана

$$\zeta_R(s, \alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + \alpha)^{-s}$$

и B_k — числа Бернулли, определенные при помощи ряда

$$x(e^x - 1)^{-1} = 1 - \frac{1}{2}x - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \frac{x^k}{(2k)!}, \\ B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad \dots$$

Для определения величин D_j с $j \geq 1$ мы пользуемся формулой Эйлера–Маклорена:

$$\sum_{\nu=p+1}^{\Lambda} F(\nu) = \int_p^{\Lambda} F(x) dx + \left[\frac{1}{2} F(x) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{(2k)!} \frac{d^k}{dx^k} F(x) \right]_p^{\Lambda}. \quad (\text{B.3})$$

Возьмем $p = -1$:

$$F(\nu) = (c\nu + g) \log((\nu + \alpha)(\nu + t) + M_j^2),$$

так что

$$\sum_{\nu=0}^{\Lambda} F(\nu) = D_j.$$

В результате получаем

$$\int_{-1}^{\Lambda} F(x) dx = c\Lambda^2 \log \Lambda - 2g\Lambda \log \Lambda - \frac{1}{2} c\Lambda^2 - 2 \left(g - \frac{1}{2} c(t + \alpha) \right) \Lambda + \\ + \left(cM_j^2 - \frac{1}{2} c(\alpha^2 + t^2) + g(\alpha + t) \right) \log \Lambda - \frac{1}{2} cM_j^2 \log M_j^2 + \\ + \left(g - \frac{1}{2} c(t + \alpha) \right) \pi M_j - \left(\frac{1}{2} c(2 - \alpha^2 - t^2) + g(\alpha + t - 2) \right) \log M_j + \\ + \frac{1}{2} (t + \alpha)^2 + O(\Lambda^{-1}) + O(M_j^{-2}),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F(x) \Big|_{-1}^{\Lambda} &= c\Lambda \log \Lambda + g \log \Lambda + \frac{1}{2} c(t + \alpha) + (c - g) \log M_j + \\ &\quad + O(\Lambda^{-1}) + O(M_j^{-1}), \\ \frac{1}{6} F'(x) \Big|_{-1}^{\Lambda} &= \frac{1}{6} c(\log(\Lambda/M_j) + 1) + O(\Lambda^{-1}) + O(M_j^{-1}). \end{aligned}$$

Все остальные слагаемые в разложении (В.3) в нашем случае пренебрежимо малы. Поэтому мы можем вычислить все величины D_j . Сумма по j в (В.2) легко вычисляется, и мы получаем формулу (В.1).

Использованный здесь метод применим в более общих случаях, когда собственные значения и их кратности являются полиномами по ν .

Приложение С

Здесь вычисляется неопределенный множитель в выражении (3.10). Результат таков:

$$K_q = L^q, \quad L = 2^6 e^{\gamma-2}. \quad (\text{C.1})$$

При получении (С.1) удобно рассмотреть инстантон вида

$$v_0 = \frac{z^q - 1}{z^q + 1}. \quad (\text{C.2})$$

Поле (С.2) является решением (1.8) с параметрами

$$c = 1, \quad a_j = \exp(2\pi j i), \quad b_j = \exp((2j + 1)\pi i).$$

Мы должны вычислить величину

$$Q = \det' \Delta_{v_0} / \det' \Delta_0,$$

где Δ_{v_0} — оператор (2.4) с полем v_0 , заданным согласно (С.2).

Введем новые переменные

$$\eta = (1 + |v_0|^2)^{-1}, \quad \alpha = \arg z.$$

В этих переменных имеем:

$$\Delta_{v_0} = \sigma(z) g^{-1/2} T, \quad \Delta_0 = \sigma(z) g^{-1/2} T_0,$$

где

$$\sigma(z) = (1 + |z|^{2q})^{-2} 4q^2 |z|^{2q-1}$$

(эта величина совпадает с плотностью действия):

$$\begin{aligned} T &= -\eta^{-1} \partial_\eta \eta^3 (1 - \eta) \partial_\eta \eta^{-1} + \frac{1}{iq\eta} \partial_\alpha - \frac{1}{4q^2 \eta (1 - \eta)} \partial_\alpha^2, \\ T_0 &= -\partial_\eta \eta (1 - \eta) \partial_\eta - \frac{1}{4q^2 \eta (1 - \eta)} \partial_\alpha^2. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Сначала вычислим следующее частное:

$$Q_1 = \det' T / \det' T_0.$$

Связь Q_1 и Q устанавливается в конце этого приложения. Будет доказана формула

$$\frac{1}{2} \log Q_1 = -q\gamma + 2 \log(\Gamma(q)\Gamma(2q)q^{-3q+1}) + 2(q-1) \log \pi - \\ - (2q+1) \log 3 + 4q - \log 2. \quad (\text{C.4})$$

Сначала найдем собственные значения операторов T и T_0 . Будем искать собственные функции этих операторов ψ, ψ_0 в виде

$$\psi = e^{im\alpha} \eta^\delta (1-\eta)^\beta \varphi(\eta), \quad \psi_0 = e^{im_0\alpha} \eta^{\delta_0} (1-\eta)^{\beta_0} \varphi_0(\eta),$$

где m, m_0 — целые числа, а коэффициенты $\beta, \delta, \beta_0, \delta_0$ находятся из условий регулярности. Таким образом получаем:

$$\beta = \frac{m}{2q}, \quad \delta = \frac{|m+2|}{2q}, \quad \beta_0 = \delta_0 = \frac{|m_0|}{2q}.$$

Мы видим, что собственные значения удовлетворяют следующим уравнениям гипергеометрического типа:

$$\eta(1-\eta)\partial_\eta^2 \varphi + (2\delta - 2(\beta + \delta + 1)\eta)\partial_\eta \varphi - \\ - ((\beta + \delta)^2 + \beta + \delta - 1 - \lambda)\varphi = 0, \\ \eta(1-\eta)\partial_\eta^2 \varphi_0 + (1 + 2\beta_0 - (4\beta_0 + 2)\eta)\partial_\eta \varphi - (4\beta_0^2 + 2\beta_0 - \lambda^{(0)})\varphi = 0.$$

Поэтому собственные значения задаются формулами

$$\lambda_{j_0}^{(0)} = j_0(j_0 + 1), \quad \lambda_j = j(j + 1) - 2,$$

где $j_0 = 2\beta_0 + n$, $j = \beta + \delta + n$ и n — неотрицательное целое число. Каждое число $j(j_0)$ может быть представлено в виде

$$j(j_0) = \nu + \frac{r}{q}, \quad r = 0, 1, \dots, q-1, \quad \nu = 0, 1, \dots$$

Нетрудно найти кратность d_j каждого собственного значения:

$$r \neq 0: \quad d_j^0 = 4(\nu + 1), \quad d_j = 4\omega, \\ r = 0: \quad d_j^0 = 2(2\nu + 1), \quad d_j = 2(2\nu + 2q - 1).$$

Теперь детерминанты операторов T и T_0 могут быть вычислены при помощи результатов приложения В. Таким образом получаем

$$\log \det' T = 2Z(-1, 2, 2, 2q-1) + 2 \sum_{r=1}^{q-1} Z\left(-1 + \frac{r}{q}, 2 + \frac{r}{q}, 2, 0\right), \\ \log \det' T_0 = 2Z(0, 1, 2, 1) + 2 \sum_{r=1}^{q-1} Z\left(\frac{r}{q}, 1 + \frac{r}{q}, 2, 2\right),$$

где функция Z задается при помощи формулы (В.1). Теперь легко получить соотношение (С.4), используя при этом равенства [12]:

$$\zeta'_R(0, \alpha) = \log \Gamma(\alpha) - \frac{1}{2} \log 2\pi,$$

$$\prod_{r=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{r}{m}\right) = (2\pi)^{(m-1)/2} m^{1/2-mz} \Gamma(zm), \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

Остается лишь задача связи величин Q_1 и Q . Чтобы установить эту связь, введем семейства операторов

$$T(s) = \kappa(z, s) T \quad \text{и} \quad T_0(s) = \kappa(z, s) T_0,$$

где

$$\kappa(z, s) = s + (s-1)g^{-1/2}\sigma(z), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Очевидно, что

$$T(0) = T, \quad T_0(0) = T_0; \quad T(1) = \Delta_{v_0}, \quad T_0(1) = \Delta_0.$$

При помощи методов, разработанных в пункте 3, можно найти зависимость выражения $\det T(s)/\det' T_0(s)$ от параметра s и тем самым установить связь величин Q_1 и Q :

$$Q^{-1/2} \frac{\det M}{V} = e^{-P} Q_1^{-1/2} \frac{\det M_1}{V_1}. \quad (\text{C.5})$$

Здесь

$$\det M_1 = \det \left(\int \sigma \rho^{-2} \bar{z}^k z^j d^2 x \right) = \pi^{4q-1} 2^{-1} 3^{-2q-1} q^{-4q+3} \Gamma^2(q) \Gamma^2(2q),$$

$$V_1 = \int \sigma d^2 x = 4\pi q,$$

$$P = \frac{1}{4\pi} \int \log(\sigma g^{-1/2}) \sigma d^2 x \simeq -2q + 2q \log, \quad \text{если} \quad R \rightarrow \infty.$$

Собирая вместе формулы (2.7), (2.8), (2.14), (С.4), (С.5), получаем

$$\begin{aligned} d\mu(v_0) = 2^{2q-2} \pi^{-1} e^{(\gamma-2)q} \prod_{k>j} |a_k - a_j|^2 |b_k - b_j|^2 \times \\ \times \prod_{l,m} |b_l - a_m|^2 \prod_j d^2 a_j d^2 b_j d^2 c. \end{aligned}$$

Чтобы сравнить последнее выражение с (3.10), нужно заметить, что для инстантона (С.2) имеем $1 + |c|^2 = 2$; $\prod_{i,j} (a_i - b_j) = 2^q$. Тем самым мы получаем значение константы (С.1).

Литература

1. Белафин А.А. и Поляков А.М., Письма в ЖЭТФ, **22** (1975) 503.
2. Seeley R., Proc. Symp. Pure Math., **10** (1971) 288.
3. Schwartz A.S., Comm. Math. Phys., **64** (1979) 233.
4. Coleman S., Phys. Rev., **D11** (1975) 2088.
5. Frohlich J., Comm. Math. Phys., **47** (1976) 233.
6. Березинский В.Л., ЖЭТФ, **61** (1971) 1144.
7. Kosterlitz I.M. and Thouless D.J., J. Phys., **C6** (1973) 1181.
8. Kosterlitz I.M., J. Phys., **C 7** (1974) 1046.
9. Luther A. and Scalapino D.J., Phys. Rev., **B16** (1977) 1153.
10. Mandelstam S., Phys. Rev., **D11** (1975) 3026.
11. Замолодчиков А.Б., ИТЭФ, препринт 91 (1976).
12. Bateman Manuscript Project, ed. Erdelyi A. (McGraw-Hill, N.Y., 1953).
13. Фролов И.В. и Шварц А.С., Письма в ЖЭТФ, **28** (1978) 273.
14. Фатеев В.А., Фролов И.В. и Шварц А.С., ЯФ, **8**, в печати.
15. Jevicki A., Nucl. Phys., **B127** (1977) 125; Forster D., Nucl. Phys., **B130** (1977) 38.

Часть II

Бутстрапный подход в конформной и интегрируемой теории поля

КОНФОРМНАЯ СИММЕТРИЯ КРИТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ

Поляков А.М.

Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12. С. 538–541

В работах [1, 2] была предложена гипотеза масштабной инвариантности флуктуации в точке фазового перехода. В работах [3, 4] гипотеза была подтверждена методами теории поля.

В настоящей работе показано, что корреляционные функции в точке перехода обладают инвариантностью относительно преобразований конформной группы, включающей изменение масштаба как частный случай. Это обстоятельство позволяет вычислить в явном виде любые трехточечные корреляторы и существенно ограничить возможный вид многоточечных корреляторов.

Конформная группа¹⁾ состоит из следующих преобразований:

$$\begin{aligned}x' &= \lambda x, \\ \frac{x'}{x'^2} &= \frac{x}{x^2} + a, \\ x'_i &= a_{ik}x_k + b_i.\end{aligned}\tag{1}$$

Обзор свойств этой группы в лагранжевой теории поля см. [5]. Последнее уравнение — это обычные повороты и смещения, первое — масштабные преобразования. Второе уравнение называется специальным конформным преобразованием. По очевидным причинам мы будем ниже изучать именно это преобразование, причем a удобно считать бесконечно малым. При этом преобразование записывается в виде

$$x' - x \equiv \delta x = x^2 a - 2(ax)x.\tag{2}$$

Из (2) легко получить формулу

$$\delta \ln \tau_{AB} = -a(x_A + x_B),\tag{3}$$

где

$$\tau_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2}.\tag{4}$$

Смысл преобразования (2) состоит в том, что в каждой точке пространства происходит бесконечно малое изотропное растяжение в $\lambda(x)$ раз, где

$$\lambda(x) = 1 - 2ax + O(a^2).\tag{5}$$

Формула (4) вытекает из (3) при $x_A \rightarrow x_B$.

¹⁾ Обзор свойств этой группы в лагранжевой теории поля см. [5].

Из результатов работ [1–4] вытекает, что при однородном малом растяжении в $\lambda = 1 + \epsilon$ раз любая флуктуирующая величина ϕ должна меняться следующим образом:

$$\begin{cases} \phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \lambda^{-\Delta_\phi} \phi(x) \approx \phi(x) - \Delta_\phi \epsilon \phi(x), \\ x' = x + \epsilon x, \end{cases} \quad (6)$$

где константа Δ_ϕ — неизвестный критический индекс поля ϕ . Очевидное обобщение (5) для конформных преобразований есть:

$$\delta\phi(x) \equiv \phi'(x') - \phi(x) = 2\Delta_\phi(ax)\phi(x). \quad (7)$$

Ниже будет показано, что уравнения теории поля инвариантны относительно одновременных преобразований (2) и (6) и поэтому корреляционные функции не меняются при этих преобразованиях.

Прежде чем дать доказательство, изучим следствия сделанных утверждений.

Рассмотрим трехточечный коррелятор любых полей a, b, c с размерностями $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$

$$G_{III}(r_{12}, r_{13}, r_{23}) = \langle a(r_1)b(r_2)c(r_3) \rangle. \quad (8)$$

При конформном преобразовании точки r_1, r_2, r_3 смещаются и относительные расстояния r_{ik} меняются согласно (3). Соответствующее изменение G есть

$$\delta G_{III} = - \sum_{i,k} \frac{\partial G_{III}}{\partial \ln r_{ik}} a(r_i + r_k). \quad (9)$$

Эта величина должна равняться изменению G за счет преобразования (5)

$$\delta G_{III} = 2 \sum \Delta_i a r_i G_{III}. \quad (10)$$

Приравнивая коэффициенты перед $a r_i$ в (9) и (8) получаем простую систему уравнений для G_{III} , единственное решение которой есть

$$G_{III} = \text{const} \cdot r_{12}^{\Delta_c - \Delta_a - \Delta_b} r_{13}^{\Delta_b - \Delta_c - \Delta_a} r_{23}^{\Delta_a - \Delta_b - \Delta_c}. \quad (11)$$

Формула (10) подтверждается в плоской модели Изинга, где известно выражение для коррелятора $\langle \epsilon \sigma \sigma \rangle$, где ϵ — плотность энергии, а σ — магнитный момент [6]. Для четырехточечной функции аналогичные рассуждения при водят к результату

$$G_{IV} = r_{12}^{(\Delta_b + \Delta_d \Delta_a + \Delta_c)} r_{24}^{(-\Delta_a - \Delta_b - \Delta_c - \Delta_d)} r_{13}^{(-\Delta_a - \Delta_b - \Delta_c)} r_{34}^{(-\Delta_c - \Delta_d - \Delta_a - \Delta_b)} \times \\ \times F\left(\frac{r_{13}r_{24}}{r_{12}r_{34}}, \frac{r_{14}r_{23}}{r_{12}r_{34}}\right), \quad (12)$$

где F — произвольная функция. В случае N -точечных корреляторов конформная инвариантность оставляет произвольной функцию $[N(N-3)]/2$ переменных.

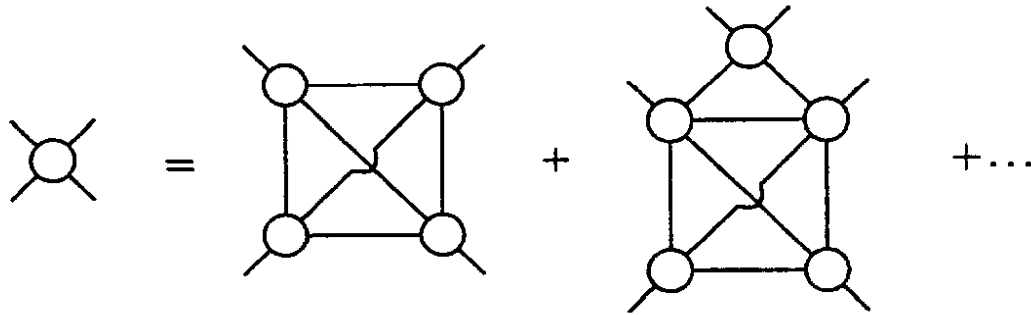


Рис. 1.

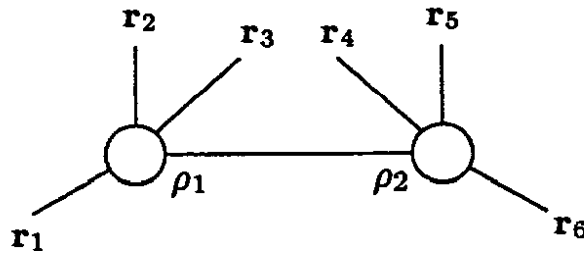


Рис. 2.

Уравнения теории поля, описывающие разовый переход выражают точные амплитуды через самих себя [3, 4]. Одно из таких уравнений изображено на рис. 1, где линиям соответствуют корреляторы магнитного момента. Если ряд на рис. 1 сходится, то как было показано в [3] уравнения допускают группу масштабных преобразований и приводят к физической картине работ [1, 2]. Докажем, что при тех же предположениях уравнения являются конформно инвариантными, то есть, что амплитуды вида (10), (11) при подстановке в диаграммы воспроизводят себя. Для доказательства достаточно проверить, что любой элемент диаграммы, содержащий точные амплитуды, например, изображенный на рис. 2, при изменении координат концов r_i согласно (2), умножается на величину $2 \sum \Delta_i(\mathbf{a}r_i)$.

В координатном представлении вклад рис. 2 можно записать в виде:

$$\int d^3 \rho_1 d^3 \rho_2 G_{IV}(r_1 r_2 r_3 \rho_1) H(\rho_1 - \rho_2) G_{IV}(\rho_2 r_4 r_5 r_6), \quad (13)$$

где

$$\left[\int H(\rho - \rho_1) G_{II}(\rho_1 - \rho') d^3 \rho_1 = \delta(\rho - \rho') \right], \quad (14)$$

G_{IV} и G_{II} корреляторы четырех и двух магнитных моментов.

Сместим точки r_i согласно (2) и одновременно произведем замену переменных в (12):

$$\rho'_i = \rho_i + a\rho_i^2 - 2(a\rho_i)\rho_i. \quad (15)$$

Интеграл (12) меняется за счет того, что:

$$\begin{aligned} G'_{IV} &= G_{IV} \left(1 + 2\Delta \sum \mathbf{a} \mathbf{r}_i + 2\Delta \mathbf{a} \rho \right), \\ H' &= H [1 + 2(3 - \Delta) \mathbf{a} (\rho_1 + \rho_2)], \\ d^3 \rho'_1 d^3 \rho'_2 &= d^3 \rho_1 d^3 \rho_2 [1 - 6\mathbf{a} (\rho_1 + \rho_2)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (14) в (12) мы видим, что коэффициенты перед $\mathbf{a} \rho_1$ и $\mathbf{a} \rho_2$ обращаются в нуль и весь интеграл умножается на $2\Delta \sum \mathbf{a} \mathbf{r}_i$, что и требовалось.

Составляя более сложные диаграммы из простых и повторяя проведенные рассуждения можно убедиться, что каждый член ряда на рис. 1 обладает конформными свойствами.

Автор благодарен А.И. Ларкину, А.А. Мигдаяу, Б.Л. Покровскому за обсуждение и Х. Каструпу (ФРГ) за разъяснение математики конформной группы.

Литература

1. Паташинский А.З., Покровский Б.Л., ЖЭТФ, 50, 439, 1966.
2. Kadanoff L.P., Physica, 2, 263, 1966.
3. Поляков А.М., ЖЭТФ, 55, 1026, 1968.
4. Мигдал А.А., ЖЭТФ, 55, 1964. 1968.
5. Mack. G., Salam A., Ann. Phys., 53, 174, 1969.
6. Kadanoff L.P., Preprint, 1969.

НЕГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОД В КОНФОРМНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Поляков А.М.

ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 23–42

Сформулировано требование полноты набора операторов, входящих в теорию поля на малых расстояниях, которое заменяет условие унитарности S -матрицы в обычной теории. Получены явные выражения для вклада промежуточного состояния с определенной симметрией в функции Вайтмана. Совместно с условием локальности условие полноты приводит к системе алгебраических уравнений для аномальных размерностей и констант взаимодействия, которые могут рассматриваться как правила сумм для этих величин. Найденные приближенные решения этих уравнений в пространстве размерности $4 - \epsilon$ дают результаты, эквивалентные гамильтонову подходу.

1. Введение

В последние годы была высказана и подробно анализировалась гипотеза о конформной инвариантности сильных взаимодействий на расстояниях, много меньших чем 10–14 см (см. обзоры [1], [2]) Было показано, что уравнения квантовой теории поля инвариантны относительно конформной группы при условии, что различным полям приписываются аномальные величины размерностей, которые должны определяться из условия разрешимости уравнений. Все наблюдаемые следствия теории выражались через эти размерности и, кроме того, через набор констант эффективного взаимодействия на малых расстояниях.

Вместе с тем уравнения для определения перечисленных величин (скелетные разложения для вершинных частей) являлись рядами с нулевым радиусом сходимости и не имели поэтому определенного математического смысла. Физический смысл этих уравнений также был весьма непрозрачен. Форма уравнений существенно зависела от типа фундаментальных полей и вида их затравочного взаимодействия, в то время как результаты теорий с аномальными размерностями не должны быть чувствительными к выбору исходного гамильтониана.

Целью настоящей работы является построение более общего формализма для определения аномальных размерностей, который, с одной стороны, был бы “демократичным” по отношению к различным полям, а с другой стороны, не содержал бы бессмысленных рядов (эти два свойства оказываются тесно связанными). Подобный формализм по сравнению со старым подходом играет ту же роль, что методы теории S -матрицы по сравнению с гамильтоновой теорией и является обобщением S -матричных уравнений для области малых расстояний.

2. Условие полноты набора операторов как динамические уравнения

В настоящем разделе предлагается принцип самосогласованности, управляющий взаимодействиями на малых расстояниях. Этот принцип заменяет условие унитарности в обычной теории поля и, коротко говоря, состоит в полноте набора операторов, входящих в безмассовую теорию, которая, по предположению, эквивалентна асимптотической теории малых расстояний.

Основная трудность в формулировке указанного принципа состоит в классификации соответствующих операторов. Напомним, что в безмассовой теории не существует асимптотических состояний “in” или “out”. Необходимо поэтому найти замену для этого традиционного полного набора операторов. После того как это будет сделано, можно надеяться, что так же как и в теории с конечной массой, комбинирование условия полноты с условием причинности даст динамическую систему уравнений, достаточную для определения вайтмановских функций.

Рассмотрим скалярную теорию поля без внутренних степеней свободы (позднее будет легко обобщить это рассмотрение). Допустим, что существует набор локальных скалярных операторов $\{O_{0n}(x)\}$ с возрастающими размерностями $\{\Delta_{0n}\}$. Этот набор аналогичен набору φ^n свободной теории поля. Допустим также, что на малых расстояниях имеется не только масштабная, но и конформная инвариантность с аномальными размерностями Δ_n и что под действием специального конформного преобразования операторы $\{O_{0n}(O)\}$ остаются неизменными. Скалярные операторы не могут сформировать полного набора и поэтому к ним следует добавить тензорные операторы $\{O_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(jn)}(x)\}$, которые преобразуются по неприводимому представлению группы Лоренца. Последнее предположение состоит в том, что набор операторов $\{O_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(jn)}\}$ и их производных по координатам является полным. Число j будет называться “лоренцевским спином”, а число n — “главным квантовым числом”, операторы с $n > 0$ будут называться “сателлитами”.

Введенный операторный базис в силу конформной симметрии является ортогональным [2]:

$$\langle O^{(jn)}(0) O^{j'n'}(x) \rangle \sim \delta_{jj'} \delta_{nn'}.$$

Покажем, что условие полноты приводит к динамическим уравнениям, аналогичным уравнениям унитарности в обычной теории. Для этого рассмотрим произведение двух скалярных полей $\varphi(x)\varphi(0)$ и разложим его по предложенному базису:

$$\varphi(x)\varphi(0) = \sum_{jns} C_{\alpha_1 \dots \alpha_j | \mu_1 \dots \mu_s}^{(jn)}(x) \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_s} O_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(jn)}(0). \quad (2.1)$$

Здесь C — s -числовая функция x , вид которой с точностью до нескольких констант фиксируется конформной симметрией.

Уравнение (2.1) не является асимптотическим разложением, использовавшимся в работах [3, 4, 5], но должно пониматься в следующем смысле:

$$\begin{aligned} \langle TA(x)A(0) \prod \varphi_{a_j}(z_j) \rangle = \\ = \sum_{jns} C_{\alpha_1 \dots \alpha_j | \mu_1 \dots \mu_s}^{(jn)}(x) \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_s} \langle TO_{\alpha_1 \dots \alpha_j}(0) \prod \varphi_{a_j}(z_j) \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

(φ_{a_j} — произвольные локальные поля).

Благодаря аналитическим свойствам функции Вайтмана бесконечный ряд в правой части соотношения (2.2) сходится для достаточно малых x и должен пониматься в смысле аналитического продолжения для остальных значений x . Динамические уравнения для C -функции возникают как требование перекрестной симметрии величины

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) \rangle$$

после подстановки в нее (2.2) для различных пар операторов $\varphi(x_i)$.

Заметим, что знание функции C достаточно для нахождения четырехточечных и даже n точечных функций Вайтмана, поскольку последовательное использование соотношения (2.2) сводит их к трехточечным функциям, явный вид которых известен [2]. Свойство самих функций C также однозначно фиксируется конформной инвариантностью, поскольку при подстановке в функцию Вайтмана $\langle \varphi(x)\varphi(0)O^{(jn)}(z) \rangle$ единственный вклад возникает от числа, содержащего оператор $O^{(jn)}$.

Окончательно наша программа состоит в том, чтобы вычислить все функции C вплоть до нескольких констант, подставить операторное разложение в четырехточечную функцию и найти неизвестные константы из требования перекрестной симметрии. На основе этой программы будет получена система уравнений непосредственно для аномальных размерностей и констант взаимодействия на малых расстояниях. Хотя общего решения системы найти не удалось, получены

ее частные решения в ряде случаев (например, в пространстве размерности $4 - \epsilon$, где наши методы приводят к результатам, эквивалентным подходу Вильсона и Фишера [6]). Кроме того выведены общие свойства аномальных размерностей операторов с высокими спинами.

3. Условия унитарности и операторная алгебра

В теории с конечной массой условие унитарности, вытекающее из полноты набора in- и out-операторов, может быть записано в виде [7]:

$$\text{Disc} \quad \text{Diagram} = A \quad \text{Diagram} \quad B. \quad (3.1)$$

Это известное уравнение можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим амплитуду $F_{A \rightarrow B}$ в пространственно подобной области для таких конфигураций, при которых относительное расстояние между частицами группы $A(r_{ij}^A)$ и между частицами группы $B(r_{ij}^B)$ значительно меньше, чем расстояние от A до B , R_{AB} . В этом случае амплитуда имеет

$$F_{AB} \sim \sum_n C_n^A(r_{ij}^A) C_n^B(r_{ij}^B) R_{AB}^{-\lambda_n} [\exp(-m R_{AB})]^n \quad (3.2)$$

(m — масса частицы, λ_n — некоторое число). Формула (3.2) следует из того факта, что асимптотика при $R_{AB} \rightarrow \infty$ определяется особенностями по соответствующей импульсной переменной, которые, в свою очередь, даются (3.1).

Формула (3.2) имеет простой физический смысл и означает, что в силу малого радиуса взаимодействия корреляция между разделенными областями осуществляется обменом независимыми сигналами, каждый из которых дает вклад в корреляцию, пропорциональный $\exp(-m R_{AB})$.

Что происходит в пределе, когда массы устремляются к нулю? Очевидно, что независимость сигналов пропадает. Вместо этого возникают сигналы нового типа, порождаемые действием оператора $O_n(R)$ на вакуумное состояние. Такие сигналы приводят к корреляции, пропорциональной $R_{AB}^{-2\Delta_n}$ (Δ_n — размерность O_n). Можно ожидать поэтому, что F_{AB} в описанной выше конфигурации имеет вид

$$F_{AB} \sim \sum_n C_n^A(r_{ij}^A) C_n^B(r_{ij}^B) R_{AB}^{-2\Delta_n}. \quad (3.3)$$

Формула (3.3) не совсем точна, поскольку в ней не учитывается существование операторов $\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_s} O$, которые приводят к членам, про-

унитарности снова рассмотрим формулу (3.5). Если бы эта формула была верна при всех значениях импульсов, а не только при отрицательных внешних массах, было бы нетрудно доказать, совершая преобразование Фурье, что унитарность приводит к операторной алгебре. Однако левая часть (3.5) есть аналитическая функция внешних масс, в то время как правая часть не обладает этим свойством, поэтому такая аргументация была бы неправильной.

Для того чтобы получить положительное утверждение, рассмотрим другое соотношение:

$$\text{Disc}_q F(q, p, p') = \text{F.T.} \langle (R\varphi(z)\varphi(0)) A(\varphi(R)\varphi(R+r')) \rangle, \quad (3.7)$$

где R и A означают запаздывающий и опережающий коммутаторы. Эквивалентность (3.7) и (3.5) вытекает из стандартных рассуждений [7], основанных на спектральном условии. Полезность формулы (3.7) связана с тем, что вследствие свойств запаздывания правая часть является аналитической функцией p в трубе будущего и p' — в трубе прошлого. Следовательно (3.7) остается справедливым при положительных внешних массах если только продолжать левую часть, полагая $p \rightarrow p + i\eta$ и $p' \rightarrow p' - i\eta$ (где $\eta^2 > 0$, $\eta_0 > 0$). Из приведенного рассуждения вытекает следующая теорема.

Для четырехточечной функции, подчиненной условию унитарности, величина

$$\langle R(\varphi(r)\varphi(0)) A(\varphi(R)\varphi(R+r')) \rangle,$$

которая является двойным скачком функции Вайтмана в конфигурационном пространстве, удовлетворяет алгебре.

4. Унитарные, перекрестно-симметричные и конформно-инвариантные функции Грина

Из-за сложности построения амплитуд, подчиненных операторной алгебре, мы начнем с построения гриновских функций со свойствами, перечисленными в заглавии этого раздела. Требования операторной алгебры будут наложены позднее.

Рассмотрим четырехточечную функцию $\langle T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_4) \rangle$ и вычислим вклад в нее скалярного промежуточного состояния, порожденного действием на вакуум некоторого оператора O с размерностью d . Согласно (3.4) он имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Disc} \quad & \begin{array}{c} q-p \quad q-p' \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \quad p' \end{array} = \begin{array}{c} q-p \quad q-p' \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \quad p' \end{array} = \\ & = T(q, p) \text{Im } D(q) T(q, p'). \quad (4.1) \end{aligned}$$

Как видно, условия унитарности не позволяют вычислить аномальные размерности и полностью определить амплитуду. Для этого следует наложить на полученные выражения требования операторной алгебры. Решение этой задачи наталкивается на технические трудности, связанные с необходимостью вычислить амплитуду (4.4) в координатном пространстве. Прежде чем переходить к разработке общих методов преодоления этих трудностей, мы рассмотрим простой частный случай, в котором они отсутствуют, — теорию в пространстве размерности $4 - \epsilon$.

5. Рассмотрение теории в пространстве размерности $4 - \epsilon$ с помощью условия унитарности

Рассмотрим n -компонентное поле φ_i в пространстве $4 - \epsilon$ и допустим, что можно достичь самосогласования, используя лишь два оператора в разложении $\varphi_i \varphi_j$. Эти два оператора, $O^{(0)}$ и $O^{(2)}$, предполагаются имеющими изотопические спины $I = 0$ и $I = 2$ и аномальные размерности $d^{(0,2)} = 2 + \delta^{(0,2)}$, где δ — некоторое малое (порядка ϵ) число. Поля φ_i предполагаются имеющими почти канонические размерности

$$\Delta = 1 - \epsilon/2 + O(\epsilon^2).$$

Главная задача этого раздела состоит в вычислении величин $\delta^{(i)}$ из операторной алгебры.

Согласно сделанным предположениям, s -канальная мнимая часть амплитуды рассеяния $A_{iklm}(q, p, p')$ состоит из двух членов типа (2.47):

$$\begin{aligned} \text{Disc}_q A_{iklm}(q, p, p') & \frac{1}{p^2(q-p)^2 p'^2(q-p')^2} = \\ & = a_0 \delta_{ik} \delta_{lm} T^{(0)}(q, p) T^{(0)}(q, p') \text{Im } D^{(0)}(q) + \\ & + a_2 \left(\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl} - \frac{2}{n} \delta_{ik} \delta_{lm} \right) T^{(2)}(qp) T^{(2)}(qp') \text{Im } D^{(2)}(q) \quad (5.1) \end{aligned}$$

(тензорная структура этой формулы соответствует s -канальному обмену состояниями с $I = 0$ и $I = 2$). Свойства $T^{(I)}$ для малых ϵ и δ весьма просты, поскольку, если отвлечься от внешних пропагаторов, они являются медленными функциями своих переменных. Это вытекает из того, что, например, для величины $\delta = -\epsilon$, которая соответствует свободным полям, вершинные части являются константами.

Для произвольного, но малого δ из приложения А получаем

$$T_0(q, p) \equiv T(s, v_1, v_2) = \frac{1}{v_1 v_2} \begin{cases} (\max(v_1, v_2))^{-\delta/2}, & s \ll v_{1,2}, \\ s^{-\delta/2}, & s \gg v_{1,2}; \end{cases}$$

$$\text{Im } D(s) = s^{\delta+\varepsilon/2};$$

$$s = q^2, \quad v_1 = p^2, \quad v_2 = (q - p)^2.$$

Если представить $A(q, p, p')$ в виде

$$\begin{aligned} A_{iklm}(q, p, p') &= c_0 \delta_{ik} \delta_{lm} A^0(s, t, v_{1,2}, w_{1,2}) + c_2 (\delta_{il} \delta_{km}) = \\ &= \left(\delta_{im} \delta_{kl} - \frac{2}{n} \delta_{ik} \delta_{lm} \right) A^{(2)}(s, t, v_{1,2}, w_{1,2}), \end{aligned}$$

получим, пользуясь дисперсионными соотношениями, что в области $v_1 \approx v_2 \equiv v \gg w_1 \approx w_2 \equiv w$ (или $p \gg p' \gg q$)

$$\begin{aligned} A_{(s)}^{(I)}(s, v, w) &= \int_0^\infty \frac{ds'}{s' - s} \text{Disc}_s A^{(I)}(s, v, w) \approx \\ &\approx \frac{1}{(vw)^{\delta/2}} \int_s^w \frac{ds'}{s'} (s')^{\delta+\varepsilon/2} + \frac{1}{v^{\delta/2}} \int_w^v \frac{ds'}{s'} (s')^{(\delta+\varepsilon)/2} + \int_v^\infty \frac{ds'}{s'} (s')^{\varepsilon/2} = \\ &= -\frac{1}{\delta + \varepsilon/2} \left\{ s^{\delta+\varepsilon/2} (vw)^{-\delta/2} + \frac{\delta}{\delta + \varepsilon} w^{(\delta+\varepsilon)/2} v^{-\delta/2} + \frac{\delta(\varepsilon + 2\delta)}{\varepsilon(\varepsilon + \delta)} v^{\varepsilon/2} \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

(в формуле (5.2) пренебрегается высшими степенями ε и δ).

Перекрестные переменные t и u в рассматриваемой области приблизительно равны v . Следовательно, вклад t - и u -каналов определяется интегралом

$$\int_v^\infty \frac{ds'}{s'} (s')^{\varepsilon/2} = -v^{\varepsilon/2} \frac{2}{\varepsilon}. \quad (5.3)$$

Полная амплитуда взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned} A^{(I)}(q, p, p') &= -\frac{a_I}{\delta_I + \varepsilon/2} \left\{ q^{2\delta_I + \varepsilon} (pp')^{-\delta_I} + \frac{\delta_I}{\delta_I + \varepsilon} (p')^{\delta_I + \varepsilon} p^{-\delta_I} \right\} - \\ &\quad - \frac{2}{\varepsilon} \left\{ a_I \frac{\delta_I}{\varepsilon + \delta_I} + \sum_{I'=0,2} c_{II'} a_{I'} \right\} p^{-\varepsilon}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь $c_{II'}$ — матрица, элементы которой дают примесь изотопического спина I в s -канале при обмене изотопическим спином I' в t - и u -каналах. Эта матрица легко вычисляется и имеет вид

$$\begin{aligned} c_{00} &= \frac{2}{n}, & c_{02} &= \frac{2u^2 + 2n - 4}{n^2}, \\ c_{20} &= 1, & c_{22} &= \frac{n - 2}{n}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Для нахождения неизвестных величин a_1 и δ_1 следует вычислить функции Грина в координатном пространстве и наложить на них условие операторной алгебры, которое сводится к следующему.

Рассмотрим функцию Грина

$$G_{iklm}(r, r', R) \equiv \langle T\varphi_i(r)\varphi_k(0)\varphi_l(R)\varphi_m(R+r') \rangle = \\ = G^{(0)}(r, r', R)\delta_{ik}\delta_{lm} + G^{(2)}(r, r', R)\left(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl} - \frac{2}{n}\delta_{ik}\delta_{lm}\right). \quad (5.6)$$

Тогда операторная алгебра

$$\varphi_i(r)\varphi_k(0) = r^{-2+\varepsilon} 1 \cdot \delta_{ik} + f_0 r^{\varepsilon+\delta_0} \delta_{ik} O^{(0)}(0) + f_2 r^{\varepsilon+\delta_2} O^{(2)}(0) \quad (5.7)$$

(где 1 — единичный оператор, а $O^{(0)}$ и $O^{(2)}$ — операторы с изоспином 0, 2 и аномальными размерностями $2 + \delta_0, 2$) дает соотношения

$$G^{(0)}(r, r', R) \approx (rr')^{-2+\varepsilon} + f_0^2 (rr')^{\varepsilon+\delta_0} R^{-4-2\delta_0} + \dots, \\ G^{(2)}(r, r', R) \approx f_2^2 (rr')^{\varepsilon+\delta_2} R^{-4-2\delta_2} + \dots \quad (5.8)$$

(здесь $r, r' \ll R$).

С другой стороны, преобразование унитарной амплитуды в координатное пространство дается формулой

$$G_{iklm}(r, r', R) = \\ = \delta_{ik}\delta_{lm}(rr')^{-2+\varepsilon} + (\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl})R^{-4+2\varepsilon} + \\ + \int \frac{d^4-\varepsilon p d^4-\varepsilon p' d^4-\varepsilon q}{p^2(q-p)^2 p'^2(q-p')^2} e^{i(pr+p'r'+qR)} A_{iklm}(q, p, p'). \quad (5.9)$$

Первый член в (5.9) является вкладом несвязных диаграмм. Формула (5.9) эквивалентна следующим:

$$G^{(0)}(r, r', R) = (rr')^{-2+\varepsilon} + \frac{2}{n} R^{-4+2\varepsilon} + \text{F.T.}\{A^{(0)}(q, p, p')\}, \\ G^{(2)}(r, r', R) = R^{-4+2\varepsilon} + \text{F.T.}\{A^{(2)}(q, p, p')\}. \quad (5.10)$$

Преобразования Фурье легко вычисляются, поскольку в области $r \sim r' \ll R$ играет роль лишь область $q \ll p' \ll p \ll r^{-1}$. Пользуясь этим, нетрудно получить формулу

$$\text{F.T.}\{A\} = R \frac{\partial}{\partial R} \int_{R^{-1}}^{r'^{-1}} \frac{dp'}{p'} (p')^{-\varepsilon} \left(\int_{p'}^{1/r} + \int_{p'}^{1/r'} \right) \frac{dp}{p} p^{-\varepsilon} A(q, p, p'),$$

из которой следует результат

$$\begin{aligned}
 G^{(0)}(r, r', R) &= (rr')^{-2+\varepsilon} + \frac{2}{n} R^{-4+2\varepsilon} + \\
 &+ \frac{a_0}{(\varepsilon + \delta_0)^2} \frac{(rr')^{\varepsilon+\delta_0}}{R^{4+2\delta_0}} - \frac{2a_0}{(\varepsilon + \delta_0)^2} R^{-4+2\varepsilon} + \\
 &+ \frac{2}{3} \ln \frac{R_2}{rr'} \left\{ a_0 \frac{\delta_0}{\varepsilon + \delta_0} + \sum_{I'=0,2} c_{0I'} a_{I'} \right\}, \\
 G^{(2)}(r, r', R) &= R^{-4+2\varepsilon} + \frac{a_2}{(\varepsilon + \delta_2)^2} \frac{(rr')^{\varepsilon+\delta_2}}{R^{4+2\delta_2}} - \\
 &- \frac{2}{(\varepsilon + \delta_2)^2} R^{-4+2\varepsilon} + \frac{2}{3} \ln \frac{R^2}{rr'} \left(a_2 \frac{\delta_2}{\varepsilon + \delta_2} + \sum_{I'} c_{2I'} a_{I'} \right). \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Для произвольных значений параметров гриновские функции (5.11) противоречат алгебре (5.7) и (5.8). Однако если подобрать параметры из уравнений

$$\begin{aligned}
 a_I \frac{\delta_I}{\varepsilon + \delta_I} + \sum c_{II'} a_{I'} &= 0, \\
 \frac{2}{n} &= \frac{2a}{(\varepsilon + \delta_0)^2}, \quad \frac{2a_2}{(\varepsilon + \delta_2)^2} = 1, \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

получится амплитуда, удовлетворяющая алгебре с

$$f_I^2 = \frac{a_I}{(\varepsilon + \delta_I)^2}.$$

Решая четыре уравнения для четырех параметров (две константы взаимодействия f_I и две аномальные размерности δ_I), получим результат

$$\delta_0 = -\frac{6}{n+8} \varepsilon, \quad \delta_2 = -\frac{n+6}{n+8} \varepsilon; \quad f_0^2 = \frac{1}{n}, \quad f_2^2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, существует единственный набор размерностей и констант взаимодействия, для которого унитарная перекрестно-симметричная амплитуда удовлетворяет алгебре. Заметим также, что формула (5.11) подтверждает теорему разд. 2 — двойной скачок (5.11) по r^2 и r'^2 совпадает с алгебраической амплитудой при произвольном выборе параметров. Уравнение (5.12) было получено из условия сокращения квазирегулярных членов унитарной амплитуды, которые не давали вклада в двойной скачок.

Для получения уравнений, аналогичных (5.12), в общем случае необходимо модифицировать примитивные вычислительные методы данного раздела. Для этих целей оказывается весьма полезным разложение по конформным парциальным волнам, к рассмотрению которого мы переходим.

6. Разложение по конформным парциальным волнам

Хорошо известно [8], что амплитуда рассеяния при нулевом переданном импульсе может быть разложена по лоренцевым парциальным волнам, соответствующим представлениям группы $O(4)$. Это разложение весьма удобно, поскольку оно диагонализует уравнение Бете–Солпитера и другие динамические уравнения. Однако в теории с конечной массой это разложение нельзя обобщить на случай конечных передач импульса.

В конформной теории поля такое обобщение оказывается возможным и весьма полезным для наших целей. Подобная возможность связана с тем, что конформное преобразование может изменить передачу импульса и, в частности, превратить амплитуду рассеяния на угол нуль в амплитуду на произвольный угол. Такая процедура однозначна, поскольку конформное преобразование зависит от четырех параметров, подбором которых можно получить амплитуду с любым заданным переданным импульсом.

Для построения искомого разложения подберем такие конформно-инвариантные выражения для четырехточечной функции, которые при нулевом переданном импульсе переходят в отдельные члены разложения $O(4)$. С этой целью рассмотрим величину $\mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(\nu)}$, которая определяется как трехточечная функция

$$\langle T O_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(\nu)}(z) \varphi(r_1) \varphi(r_2) \rangle,$$

где $O_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(\nu)}$ — фиктивный оператор размерности $d \equiv \nu + 2$. Конформная инвариантность фиксирует $\mathcal{T}^{(\nu)}$ с точностью до нормировки.

Заметим далее, что амплитуда

$$a^{(\nu j)}(r_{jk}) \equiv \int d^4 z \mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(\nu)}(r_1 r_2 z) \mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(\nu)}(r_3 r_4 z) \quad (6.1)$$

преобразуется как четырехточечная функция

$$\langle T \varphi(r_1) \varphi(r_2) \varphi(r_3) \varphi(r_4) \rangle,$$

поскольку формальный оператор

$$\int d^4 z O_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(\nu)}(z) O_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(-\nu)}(z)$$

конформно инвариантен (аналогичное наблюдение имеется в работе [9]). Покажем, что произвольная четырехточечная функция может быть представлена в виде

$$A(r_{ik}) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dv \psi_p(v) a_{vj}(r_{ik}) \quad (6.2)$$

и получим формулу обращения для этого интегрального преобразования. Для этого перепишем (6.2) в импульсном представлении:

$$A(q, p, p') = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dv \psi_j(v) \mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(v)}(q, p) \mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(-v)}(q, p'),$$

$$A(q, p, p') = \int A(r, r', R) e^{i(pr + p'r' + qR)} dr dr' dR, \quad (6.3)$$

$$\mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_j}(q, p) = \int \mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_j}(r, R) e^{i(pr + qR)} dr dR$$

(где $r_1 = 0, r_2 = r, r_3 = R, r_4 = R + r'$).

При нулевом переданном импульсе получаем

$$A(p, p', 0) = (pp')^{2\Delta-6} \sum_j U_j \left(\frac{pp'}{pp'} \right) \times$$

$$\times \int_{-i\infty}^{+i\infty} dv \psi_i(v) M_j(v) M_j(-v) \left(\frac{p}{p'} \right)^v. \quad (6.4)$$

Здесь U_j — полином Чебышева, а $M_j(v)$ определяется формулой (см. приложение Б)

$$\mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_j}(p, 0) = \int d\mathbf{r} e^{ip\mathbf{r}} \int \frac{d\mathbf{R}}{R^{v+2}} \frac{[v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_j}]}{|R - r|^{v+2}} =$$

$$= M_j(v) p^{2\Delta-6-v-j} [p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_j}]. \quad (6.5)$$

Интеграл (6.5) следует понимать как аналитическое продолжение из области его сходимости. При выводе (6.4) было использовано соотношение

$$p^{-j} [p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_j}] (p')^{-j} [p'_{\alpha_1} \dots p'_{\alpha_j}] = U_j \left(\frac{pp'}{pp'} \right).$$

Формула (6.4) является разложением $O(4)$ для A , парциальные волны которого, в свою очередь, разложены в интеграл Меллина по безразмерной переменной p/p' .

Таким образом, формула (6.4) решает поставленную задачу, давая конформно-инвариантное разложение, переходящее при нулевом переданном импульсе в разложение $O(4)$.

Формула обращения преобразования (6.2) находится с помощью формулы (6.4). Совершая обратное преобразование Меллина, находим

$$\psi_j(v) = \frac{1}{M_j(v) M_j(-v)} \int \frac{d^4 p'}{|p'|^4} U_j \left(\frac{pp'}{pp'} \right) \cdot \left(\frac{p'}{p} \right)^v (pp')^{6-2\Delta} A(p, p'). \quad (6.6)$$

Другая эквивалентная формула обращения получается из рассмотрения выражения

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{q}) = \sum_{j=0}^{\infty} \int d\nu \psi_j(\nu) \mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(\nu)}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(-\nu)}(\mathbf{r}', \mathbf{q}). \quad (6.7)$$

Повторяя предыдущие рассуждения, находим

$$\psi_i(\nu) = \frac{1}{N_j(\nu)N_j(-\nu)} \int \frac{d^4 r_3 d^4 r_4}{r_{34}^8} \left(\frac{r_{12}}{r_{34}} \right)^{\nu+2} (r_{12} r_{34})^{2\Delta} A(r_{ik}), \quad (6.8)$$

где N_j определяется формулой

$$\int d^4 R \mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(\nu)}(\mathbf{r}, R) = N_j(\nu) r^{2-2\Delta-j-\nu} [r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_j}].$$

Окончательный результат данного раздела состоит в разложении по конформным парциальным волнам (6.2) и в формулах обращения (6.6) и (6.8). Явные выражения для $M_j(\nu)$ и $N_j(\nu)$ будут даны в приложении Б.

7. Построение унитарной амплитуды для произвольного спина

В данном разделе будет вычислена спектральная функция для унитарной амплитуды. Наиболее прямой способ сделать это — положить в (4.4) $q = 0$ и использовать формулу (6.5). Однако этот метод весьма сложен технически при ненулевых значениях спина. Мы используем поэтому другой метод, основанный на теореме разд. 3.

Вначале будет построено конформно-инвариантное операторное разложение для $R(\varphi(x)\varphi(0))$ и $A(\varphi(x)\varphi(0))$ и вычислена величина

$$\langle R(\varphi(x)\varphi(0))A(\varphi(R)\varphi(R+r')) \rangle.$$

Затем мы подберем такую функцию $\psi(\nu)$, что двойной скачок (6.2) окажется равным полученному выражению. Если результирующая амплитуда будет иметь правильные аналитические свойства в координатном и импульсном пространствах, то, согласно теореме разд. 3, она будет удовлетворять условию унитарности и дисперсионным соотношениям.

Наиболее общий вид вклада данного оператора в запаздывающий коммутатор дается формулой

$$R(\varphi(x)\varphi(0)) = \sum_k a_{\alpha_1 \dots \alpha_j | \mu_1 \dots \mu_k}(x) \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_k} O_{\alpha_1 \dots \alpha_j}, \quad (7.1)$$

где a связана с функцией C очевидным соотношением

$$a(x) = \theta x_0 [C(x - i\eta) - C(x + i\eta)]. \quad (7.2)$$

Функция a , так же как и C , однозначно определяется из условия того, что величина

$$\langle R(\varphi(x)\varphi(0))O_{\alpha_1\dots\alpha_j}(z) \rangle$$

должна равняться вершинной части. Более удобно, однако, переписать (7.1) в явно конформно-ковариантном виде.

Эта задача уже рассматривалась Феррара, Гатто и Грилло [9], но для наших целей результаты их работы недостаточны. В [9] утверждалось, что вклад оператора O можно записать в виде

$$\varphi(x)\varphi(0) \sim \int T(x, z)O(z)d^4z, \quad (7.3)$$

где $T(x, z)$ — вершинная часть “теневого” оператора $\Omega(z)$ с размерностью $4 - d$. Это утверждение правильно лишь если понимать интеграл (7.3) в особом смысле. Именно, следует написать

$$O(z) = O(0) + z_\mu \partial_\mu O(0) + 1/2 z_\mu z_\nu \partial_\mu \partial_\nu O + \dots,$$

подставить это разложение в интеграл и каждый из интегралов возникающей суммы понимать в смысле аналитического продолжения из области его сходимости. Поскольку эти области различны для различных членов суммы, возникающий ряд Тейлора нельзя суммировать под знаком интеграла. В первоначальной записи (7.3) противоречит причинности, поскольку интегрирование происходит по всему пространству, а левая часть обязана коммутировать с оператором $O(y)$, если $y^2 < 0$ и $(x - y)^2 < 0$.

Таким образом, для обычного произведения невозможно написать удобные явно ковариантные формулы. Для запаздывающего коммутатора ситуация существенно иная. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} R(\varphi(x)\varphi(0)) &= \\ &= \text{const} \cdot \int d^4z \theta(x - z)\theta(z) \langle \varphi(x)\varphi(0)\Omega_{\alpha_1\dots\alpha_j}(z) \rangle O_{\alpha_1\dots\alpha_j}(z), \end{aligned} \quad (7.4)$$

где $O_{\alpha_1\dots\alpha_j}$ — оператор размерности d , $\theta(x) \equiv \theta(x_0)\theta(x^2)$; $\Omega_{\alpha_1\dots\alpha_j}$ — фиктивный оператор размерности $4 - d$, так что трехточечная функция в (7.4) дается (Б.1) Если бы (7.4) не содержало θ -функций, оно было бы явно ковариантно. Нетрудно видеть, что θ -функции не разрушают конформной инвариантности, поскольку под действием преобразования

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \alpha_\mu x^2 - 2(\alpha x)x_\mu \equiv x_\mu + \delta x_\mu, \\ x'^2 &= (1 - 2\alpha x)x^2 = x^2 + \delta x^2 \end{aligned}$$

они преобразуются как

$$\theta(x') = \theta(x) + \delta(x_0)\theta(x^2)\delta x_0 + \delta x^2\theta(x_0)\delta(x^2) = \theta(x). \quad (7.5)$$

Смысл полученного результата состоит в конформной инвариантности светового конуса.

Сравнивая (7.1) и (7.4), получаем

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_j | \mu_1 \dots \mu_k}(x) = \\ = \text{const} \cdot \frac{1}{k!} \int d^4 z z_{\mu_1} \dots z_{\mu_k} \theta(x-z) \theta(z) \langle \varphi(x) \varphi(0) \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_j}(z) \rangle. \quad (7.6)$$

Интеграл (7.6) сходится в обычном смысле при всех k , поскольку область интегрирования, определяемая θ -функциями, лежит между двух световых конусов. Можно проверить также, что благодаря наличию θ -функций уравнение (7.6) удовлетворяет условию причинности.

Установим теперь соответствие между алгебраической амплитудой, равной

$$\langle R(\varphi(r) \varphi(0)) A(\varphi(R) \varphi(R+r')) \rangle = \\ = \int d^4 z \theta(x-z) \theta(z) \langle \varphi(r) \varphi(0) \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_j}(z) \rangle \times \\ \times \langle O_{\alpha_1 \dots \alpha_j}(z) A(\varphi(R) \varphi(R+r')) \rangle \quad (7.7)$$

и обычным "полюсным" членом

$$\langle T \varphi(x) \varphi(0) \varphi(R) \varphi(R+y) \rangle = \int d^4 z \langle T \varphi(x) \varphi(0) \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_j}(z) \rangle \times \\ \times \langle T O_{\alpha_1 \dots \alpha_j}(z) \varphi(y) \varphi(R+y) \rangle \equiv (\mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(4-d)} \mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(d)}) \equiv a^{(v, j)}. \quad (7.8)$$

Покажем, что существует соотношение

$$a^{(v, j)}(r_{ab}) = N_j(-v) f_{vj} + N_j(v) f_{-vj}(r_{ab}), \quad (7.9)$$

где $f_{vj}(r_{ab})$ — T -произведение, соответствующее операторной амплитуде, а $N_j(v)$ — функции, введенные в разд. 4 и вычисленные в приложении Б. Для доказательства вычислим скачок по q^2 в импульсном представлении от амплитуды $a^{(vj)}$. При вычислении необходимо использовать два соотношения

$$\delta_q \mathcal{T}^{(v)}(q, p) = T^{(v)}(q, p) \delta_q D^{(v)}(q) = \text{const} \cdot T^{(v)}(q, p) D^{(v)}(q, p), \quad (7.10)$$

$$\mathcal{T}^{(+v)}(q, p) = \text{const} \cdot D^{(v)}(q) \mathcal{T}^{(-v)}(q, p). \quad (7.11)$$

Соотношение (7.10) есть условие унитарности для вершины, а соотношение (7.11) вытекает из отмеченного в разд. 7 факта конформной инвариантности

$$\int d^4 z O^{(v)}(z) O^{(-v)}(z)$$

и единственности трехточечной функции. Если, пользуясь (7.10), написать

$$\mathcal{T}^{(v)}(q, p) = F^{(v)}(q, p) + T^{(v)}(q, p)D^{(v)}(q)$$

(где $F^{(v)}$ регулярно при $q = 0$), соотношение (7.11) приведет к равенствам

$$\begin{aligned} F^{(v)}(q, p) &= T^{(-v)}(q, p), \\ \mathcal{T}^{(v)}(q, p) &= T^{(-v)}(q, p) + T^{(v)}(q, p)D^{(v)}(q). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Тензорные индексы, которые мы забывали писать при выводе (7.12), не меняют ситуации. Формула (7.12) проверена вычислением в приложении А, где дана явная формула для $\mathcal{T}(q, p)$ в случае нулевого спина. Подставляя (7.12) в (7.8), находим

$$\begin{aligned} a^{(v)}(q, p) &= T^{(-v)}(q, p)T^{(v)}(q, p') + T^{(v)}(q, p)T^{(-v)}(q, p') + \\ &+ T^{(v)}(q, p)D^{(v)}(q)T^{(v)}(q, p') + T^{(-v)}(q, p)D^{(-v)}(q)T^{(-v)}(q, p') \end{aligned} \quad (7.13)$$

(здесь использовано равенство $D^{(v)}(q)D^{(-v)}(q) = 1$). В формуле (7.13) сингулярными при $q = 0$ являются лишь два последних члена (напомним, что $T^{(v)}(q, p)$ аналитична при $q = 0$, а $D^{(v)}(q) \sim (q^2)^v$). Сравнивая с формулой (3.6) для алгебраической амплитуды f_{vj} и пользуясь дисперсионным соотношением, убеждаемся в справедливости формулы (7.9) с точностью до нормировочных множителей $N_j(v)$.

Для нахождения нормировочных множителей фиксируем нормировку f_{vj} условием

$$\begin{aligned} f_{vj}(x, y, R) &\underset{x, y \rightarrow 0}{\approx} x^{d-2\Delta} y^{d-2\Delta} \frac{1}{R^{2d}} U_j \left(\frac{x_\alpha g_{\alpha\beta}(R) y_\beta}{xy} \right), \\ g_{\alpha\beta}(R) &= \delta_{\alpha\beta} - 2R_\alpha R_\beta R^{-2}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Сравнивая с асимптотикой (7.14)

$$\begin{aligned} a^{(vj)} &\underset{x, y \rightarrow 0}{\approx} y^{d-2\Delta-j} \frac{y_{\alpha_1} \cdots y_{\alpha_j}}{R^{2d}} g_{\alpha_1\beta_1}(R) \cdots g_{\alpha_j\beta_j} \times \\ &\times \int d^4 z \langle T\varphi(x)\varphi(0)\Omega_{\alpha_1\alpha_j}(z) \rangle, \end{aligned} \quad (7.15)$$

где использовано равенство

$$n_\alpha = \frac{|R+y|R}{y} \left(\frac{R_\alpha}{R^2} - \frac{(R+y)_\alpha}{(R+y)^2} \right) \underset{y \rightarrow 0}{\approx} \frac{y_\beta}{y} g_{\alpha\beta}(R),$$

убеждаемся в справедливости формулы (7.9). Эта формула позволяет без явных вычислений построить конформное разложение для унитарной и алгебраической амплитуд.

Начнем с построения спектральной функции $\psi_j(v)$ для алгебраической амплитуды, т.е. будем искать такое $\psi_j(v)$, что

$$f_{vj}(r_{ab}) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \psi_{jv}(\mu) a_{vj}(r_{ab}) d\mu = 2 \int_{-i\infty}^{+i\infty} \psi_j(\mu) N_j(-\mu) f_{\mu j}(r_{ab}) d\mu, \quad (7.16)$$

где, как показано в приложении Б,

$$N_j(v) = \frac{1}{v(v+j+1)} \beta\left(1 + \frac{j-v}{2}\right) / \beta\left(1 + \frac{j+v}{2}\right) \quad (7.17)$$

($\beta(x) \equiv \Gamma^2(x)/\Gamma(2x)$). Функция $\psi_{jv}(\mu)$ должна быть четной функцией (это уже использовано в (7.16)) и, кроме того, $\psi_{jv}(\mu)N_j(-\mu)$ должна иметь в правой полуплоскости лишь один полюс при $\mu = v$, поскольку можно показать, что $f_{\mu j}(r_{ab})$ регулярна при $\text{Re} \mu > 0$; далее, $\psi(\mu)$ должна убывать при $\mu \rightarrow \infty$ достаточно быстро для сходимости интеграла и для возможности замкнуть контур направо.

Единственная функция, удовлетворяющая всем этим требованиям, есть

$$\begin{aligned} \psi_{jv}(\mu) &= \text{const} + \frac{\chi_j(\mu)\chi_j(-\mu)}{\mu^2 - v^2}, \\ \chi_j(\mu) &= \mu(j+1-\mu)\beta\left(1 + \frac{j-\mu}{2}\right). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Алгебраическая амплитуда обладает, как показано в приложении Б, аномальными особенностями в координатном пространстве, связанными с недостаточно быстрой сходимостью интеграла (7.16).

Перейдем теперь к конструированию спектральной функции для унитарной $U(r_{ab})$. Эта амплитуда не должна иметь аномальных особенностей, поэтому $\psi(\mu)$ должна убывать при $\mu \rightarrow \pm i\infty$ быстрее, чем в случае алгебраической амплитуды. Вместе с тем, в силу теоремы разд. 3, двойные скачки по x^2 и y^2 для этих амплитуд должны быть одинаковы. Следовательно, новые полюса $\{v_n\}\psi(\mu)$, обеспечивающие ее быстрое убывание, должны быть расположены таким образом, чтобы вычеты в этих полюсах, пропорциональные $f(x, y, R)$, не имели двойных скачков по x^2, y^2 . При малых x^2 и y^2 функция f_{vj} дается формулой (7.15), из которой очевидно, что двойные скачки обращаются в нуль, если

$$\frac{d}{2} - \Delta - \frac{j}{2} \equiv \frac{a}{4} + \frac{\mu}{2} - \Delta - \frac{j}{2} = n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.19)$$

Отсюда вытекает, что дополнительными возможными особенностями по μ являются двойные полюсы в точках (7.19).

Легко убедиться, что спектральная функция с наиболее быстрым

убыванием вдоль мнимой оси и с описанными свойствами есть

$$\psi_{j\delta}^U(\mu) = \frac{g_j(\mu)g_j(-\mu)}{\mu^2 - \delta^2},$$

где

$$g_j(\mu) = \mu(j+1-\mu)\beta \left(1 + \frac{j-\mu}{2}\right) \Gamma^2\left(\Delta - \frac{a}{4} - \frac{\mu}{2} + \frac{j}{2}\right). \quad (7.20)$$

Формула (7.20) решает задачу о нахождении унитарной амплитуды. Более строгий (но весьма громоздкий) ее вывод для $j=0$ дан в приложении Б. Нетрудно убедиться, что именно двойные полюса квадрата Г-функции в (7.20) явились источником логарифмических членов в формуле (5.11).

8. Построение перекрестно-симметричной алгебраической амплитуды и уравнения для аномальных размерностей

Формулы предыдущего раздела позволяют сконструировать перекрестно-симметричную амплитуду взаимодействия, которая будет отличаться от алгебраической лишь на логарифмические члены, связанные с двойными полюсами спектральных функций. Требование обращения в нуль вычетов в этих полюсах даст нам систему уравнений для аномальных размерностей и внутренних констант взаимодействия.

При проведении этой программы весьма существенно, что унитарные амплитуды по самому своему построению имеют правильные аналитические свойства в координатном пространстве, поэтому разложение полной амплитуды по унитарным должно сходиться во всей евклидовой области внешних переменных. (Расходимость рядов привела бы к аномальным особенностям). Это свойство отличает унитарные амплитуды от алгебраических, делая их более удобными для работы.

Итак, рассмотрим следующее разложение для амплитуды:

$$A = \sum_{j,n} C_{jn} [V_{jn}^{(s)}(r_{ik}) + V_{jn}^{(i)}(r_{ik}) + V_{jn}^{(u)}(r_{ik})], \quad (8.1)$$

где $V^{(s)}$ — амплитуда типа (4.4). Здесь j — спин оператора, n — “главное квантовое число” (которое различает операторы заданного спина, но разных размерностей; размерности считаются растущими с номером n). Как уже было сказано, ряд (8.1), если он представляет истинную амплитуду, должен сходиться для евклидовых r_{ik} (разумеется, в неевклидовой области он, вообще говоря, расходится; эта расходимость приводит к появлению у амплитуды мандельштамовских спек-

тральных функций). Это дает возможность вычислить асимптотику (8.1) при $x, y \ll R$. Имеем ($r_1 = 0$, $r_2 = x$, $r_3 = R$, $r = R + y$):

$$\begin{aligned}
 V_{jn}^{(s)}(r_{ik}) &= \int_{-i\infty}^{+i\infty} dv \frac{g_j(v)g_j(-v)N_j(-v)}{v^2 - (d_{jn} - 2)^2} f_{vj}(r_{ik}) = \\
 &= \int_{-i\infty}^{+i\infty} dv \frac{v(j+1+v)}{v^2 - (d_{jn} - 2)^2} \beta^2 \left(1 + \frac{j+v}{2}\right) \Gamma^2\left(\Delta - 1 + \frac{j+v}{2}\right) \times \\
 &\times \Gamma^2\left(\Delta - 1 + \frac{j-v}{2}\right) \left(\frac{xy}{R^2}\right)^{v+2} U_j\left(\frac{x_\alpha g_{\alpha\beta}(R)y_\beta}{xy}\right) x^{-2\Delta} y^{-2\Delta} \approx \\
 &\approx \left\{ \alpha_{jn} \left(\frac{xy}{R^2}\right)^{d_{jn}} U_j\left(\frac{x_\alpha g_{\alpha\beta}(R)y_\beta}{xy}\right) + \right. \\
 &\left. + \left(\frac{xy}{R^2}\right)^{2\Delta+j} \beta_{jn} \ln \frac{R^2}{xy} + \gamma_{jn} \left(\frac{xy}{R^2}\right)^{2\Delta+j} \right\} x^{-2\Delta} y^{-2\Delta}, \quad (8.2)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \alpha_{jn} &= \\
 &= (d_{jn} + j - 1) \beta^2 \left(\frac{j + d_{jn}}{2}\right) \Gamma^2\left(\Delta + \frac{j - d_{jn}}{2}\right) \Gamma^2\left(\Delta + \frac{j + d_{jn}}{2} - 2\right), \\
 &\quad \beta_{jn} \frac{\Gamma^2(2\Delta - 2 + j) \beta^2(j + \Delta)}{(2\Delta - 2 + j)^2 - (d_{jn} - 2)^2}, \\
 \gamma_{jn} &= \frac{d}{dv} \left\{ \frac{v(j+1+v)}{v^2 - (d_{jn} - 2)^2} \beta^2 \left(1 + \frac{j+v}{2}\right) \Gamma^2\left(\Delta - 1 + \frac{j+v}{2}\right) \right\} \times \\
 &\quad \times \Gamma^2\left(\Delta - 1 + \frac{j-v}{2}\right) \left(\Delta - 1 + \frac{j-v}{2}\right) \Big|_{v=2\Delta-2+j}
 \end{aligned}$$

Асимптотика в перекрестном канале дастся выражением

$$\begin{aligned}
 a_{vj}(r_{ik}) &= \int dz \frac{U_j(n_{12}n_{34})}{|r_1 - z^d| |r_2 - z|^d |r_3 - z|^{\tilde{d}} |r_4 - z|^{\tilde{d}}} \times \\
 &\quad \times r_{12}^{d-2\Delta} r_{34}^{\tilde{d}-2\Delta} \underset{\substack{r_{13} \rightarrow 0 \\ r_{24} \rightarrow 0}}{\approx} \frac{1}{R^{4\Delta}} \ln \frac{R^2}{xy}, \quad (8.3)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 n_{ik} &= \frac{|r_i - z| |r_k - z|}{r_{ik}} \left(\frac{r_i - z}{(r_i - z)^2} - \frac{r_k - z}{(r_k - z)^2} \right); \\
 d &\equiv 4 - \tilde{d} = v + 2, \quad R \approx r_{12}, \quad x \approx r_{13}, \quad y \approx r_{24}.
 \end{aligned}$$

Пользуясь формулами (8.3) и (7.20), находим вклад двух последних членов в (8.1):

$$V_{jn}^{(i)} + V_{jn}^{(u)} \approx \frac{2\rho_{jn}}{R^{4\Delta}} \ln \frac{R^2}{xy},$$

$$\rho_{jn} = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dv g_i(v) g_i(-v)}{v^2 - (d_{jn} - 2)^2}.$$

Нетрудно убедиться, что при дальнейшем разложении (8.3) по x и y будут возникать члены типа

$$x^{-2\Delta} y^{-2\Delta} \left(\frac{xy}{R^2} \right)^{2\Delta+l+m} \ln \frac{R^2}{xy} U_l \left(\frac{x_\alpha g_{\alpha\beta}(R) y_\beta}{xy} \right),$$

где l и m — целые положительные числа.

Таким образом, структура трех членов в формуле (8.1) при малых x и y следующая. Унитарная амплитуда в прямом канале (8.2) содержит вклад оператора со спином d_{jn} (член с d_{jn}) и, кроме того, имеет регулярные и логарифмические по x и y члены. Унитарные амплитуды в перекрестных каналах содержат логарифмические по x и y члены. Истинная амплитуда должна быть подчинена алгебре и не должна содержать регулярных и логарифмических членов. Следовательно, логарифмические члены в прямом канале должны сокращаться с соответствующими членами в перекрестных каналах (о регулярных членах речь будет идти немного позднее).

Напишем условие сокращения логарифмических членов с нулевым спином:

$$\sum_n C_{0n} \beta_{0n} + 2 \sum_{j,n} \rho_{jn} C_{jn} = 0.$$

Если ввести вместо C_{jn} константы взаимодействия (или нормировки тройных вершин) f_{jn} , получим формулу

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{0n}^2 \frac{\beta_{0n}}{\alpha_{0n}} + \sum_{j,n} f_{jn}^2 \frac{\rho_{jn}}{\alpha_{0n}} = 0. \quad (8.4)$$

Нетрудно видеть, что (8.4) есть точный вариант первого из приближенных уравнений (5.12). Для получения аналога второго из этих уравнений рассмотрим условие сокращения регулярных членов с нулевым спином. Для этого выделим из (8.1) вклад единичного оператора, или, что то же, несвязных диаграмм:

$$A = r_{12}^{-2\Delta} r_{34}^{-2\Delta} + r_{13}^{-2\Delta} r_{24}^{-2\Delta} + r_{14}^{-2\Delta} r_{34}^{-2\Delta} + \sum_{jn} C_{jn} \{ \dots \}. \quad (8.5)$$

Второй и третий члены в формуле (8.5) ведут себя пропорционально $R^{-4\Delta}$ при $x, y \rightarrow 0$. Следовательно, условие сокращения будет

иметь вид

$$2 + \sum \gamma_{0n} C_n = 0. \quad (8.6)$$

Это и есть точный аналог второго уравнения (5.12).

До сих пор мы рассматривали условия сокращения аномальных членов с нулевым спином и нулевым главным квантовым числом. Как видно из формулы (8.2), в амплитуде присутствуют и другие аномалии, связанные со следующими полюсами квадрата Γ -функции. Они дают вклад вида

$$U_j \left(\frac{x_\alpha g_{\alpha\beta}(R) y_\beta}{xy} \right) \left(\frac{xy}{R^2} \right)^{2\Delta+j+2m} \left[\beta_{jn}^{(m)} \ln \frac{R^2}{xy} + \gamma_{jn}^{(m)} \right] \quad (8.7)$$

($m = 0, 1, \dots$). Однако вклад точно такой же структуры возникает от перекрестно-канальных членов. Требуя сокращения аномалий, получим

$$\sum_n \beta_{jn}^{(m)} C_{jn} + 2 \sum_{l,n} \rho_{ln}^{(jm)} C_{ln} = 0 \quad (8.8)$$

и аналогично (8.6)

$$\sum \gamma_{jn}^{(m)} C_n + \sum \eta_{ln}^{(jm)} C_{ln} + 2\xi_{jm} = 0 \quad (8.9)$$

(здесь ξ_{jm} — проекция, соответствующая спину j и размерности

$$\Delta_m = 2\Delta + j + 2m$$

от несвязных диаграмм).

В случае разных входящих и выходящих частиц, т.е. для реакции $AB \rightarrow CD$, нетрудно написать обобщение уравнения (8.8):

$$\sum_n \mathcal{K}_{AB|CD}^{(jnm)} f_{AB}^{(jn)} f_{CD}^{(jn)} + \sum_{l,n} \Lambda_{AB|CD}^{(jm|lm)} (f_{AC}^{(ln)} f_{BD}^{(ln)} + f_{AD}^{(ln)} f_{BC}^{(ln)}) = 0. \quad (8.10)$$

Функции \mathcal{K} и Λ , весьма просто связанные с обобщением β и ρ на случаи разных входных частиц, нам удалось вычислить лишь для скалярных внешних частиц и для $m = 0$. Поэтому мы можем выписать явно лишь часть уравнений для размерностей и констант связи.

9. Обсуждение уравнений и дополнительные условия к решениям

В предыдущем разделе было показано, что требования операторной алгебры приводят к системе уравнений для констант взаимодействия и аномальных размерностей. К сожалению, явно удалось выписать лишь часть возникающих уравнений, которые оказались весьма сложными. Этому не приходится удивляться, поскольку изучаемые нами уравнения заменяют суммирование всех диаграмм Фейнмана.

Выписанные нами соотношения можно рассматривать как точные правила сумм, которым удовлетворяют аномальные размерности и константы связи. Было показано, что если они выполняются, то функции Грина удовлетворяют алгебре. Возникает вопрос о справедливости обратного утверждения. Нам не удалось доказать его, однако рассмотрение ряда моделей, в которых наши правила сумм выполняются, делает это утверждение правдоподобным.

Заметим, наконец, что к уравнениям необходимо добавить дополнительное условие о существовании сохраняющихся операторов с нормальными размерностями. Например, в канале с $j = 2$ обязан присутствовать тензор энергии-импульса с $d = 4$, константы связи которого со всеми другими полями универсальны. Это требование является дополнением к аксиомам Вайтмана, которые гарантируют существование лишь полного импульса, но не его плотности.

Общее исследование решений уравнений (8.4) и (8.6) и обсуждение возможности их экспериментальной проверки выходят за рамки настоящей работы.

Приложение А

Преобразование Фурье вершинной части

Для скалярного оператора O вершина

$$\langle TO(R)\varphi(r)\varphi(0) \rangle$$

имеет следующее преобразование Фурье:

$$T(q, p) = \int d^4 r e^{ipr} r^{d-2\Delta} \int \frac{d^4 R e^{iqR}}{R^d |R - r|^d}. \quad (A.1)$$

Для вычисления этого интеграла используем гауссову параметризацию пронагаторов, которая дает

$$T(q, p) = \text{const} \cdot \int_0^\infty dx dy dz \frac{(xy)^{d/2-1} z^{\Delta-d/2-1}}{(x+y+z)^2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{xyq^2 + yzp^2 + xz(q+p)^2}{x+y+z} \right\}. \quad (A.2)$$

Делая замену $z = v\rho$, $x = \rho\lambda$, $y = \rho(1-\lambda)$, вычисляя интегралы по v и ρ и используя свойства гипергеометрической функции, получаем

$$T(q, p) = N(d)T_{4-d}(q, p) + L(d)T_d(q, p)q^{2d-4}; \quad (A.3) \\ N(d) = \frac{\Gamma(d-2)}{\Gamma(-d)} \frac{\Gamma^2(-d/2)}{\Gamma^2(d/2+2)}, \quad L(d) = \frac{\Gamma(2-d)}{\Gamma(d)},$$

$$T_d(q, p) = \frac{1}{B(d/2, d/2)} \int_0^1 \frac{d\lambda [\lambda(1-\lambda)]^{d/2-1}}{[\lambda p^2 + (1-\lambda)(p+q)^2]^{2+d/2-\Delta}} \times \\ \times {}_2F_1\left(2 + \frac{d}{2} - \Delta, \Delta + \frac{d}{2} - 2, \frac{\lambda(1-\lambda)q^2}{\lambda p^2 + (1-\lambda)(p+q)^2}\right).$$

Приложение Б

Вычисление $N_j(v)$ и $M_j(v)$

Для вычисления N_j напишем явное выражение для трехточечной функции:

$$\langle TO_{\alpha_1 \dots \alpha_f}(0) \varphi(y) \varphi(z) \rangle = |y|^{-d} |z|^{-d} |y-z|^{d-2\Delta} [v_{\alpha_1 \dots \alpha_f}], \\ v_\alpha = \frac{|y||z|}{|y-z|} \left(\frac{y_\alpha}{y^2} - \frac{z_\alpha}{z^2} \right). \quad (\text{Б.1})$$

Умножим (Б.1) на светоподобный вектор ξ , положим

$$r^2 = (y-z)^2 = 1;$$

тогда в силу определения N_j получим

$$\int \frac{d^4 R}{(R^2 + i0)^{(v+2-j)/2} ((R-r)^2 - i0)^{(v+2-j)/2}} \times \\ \times \left(\frac{\xi R}{R^2} - \frac{\xi(R-r)}{(R-r)^2} \right)^j = N_j(v) (\xi r)^j. \quad (\text{Б.2})$$

Из (Б.2) находим

$$N_j(v) = \sum_{m_1+m_2=j} \frac{j!}{m_1!m_2!} J_{m_1 m_2}^j, \quad (\text{Б.3})$$

где

$$J_{m_1 m_2}^j = \int d^4 R \frac{(\xi R)^{m_1} (\xi(R-r))^{m_2}}{(R^2 - i0)^{(v+2-j+2m_1)/2} ((R-r)^2 - i0)^{(v+2-j+2m_2)/2}}. \quad (\text{Б.4})$$

Интеграл (Б.4) вычисляется с помощью гауссовой параметризации с учетом того, что в силу условия $\xi^2 = 0$ можно в числителе (Б.4) считать $R = R_0$ (где R_0 — стационарная точка гауссова интеграла). Несложные, но громоздкие вычисления дают

$$J_{m_1 m_2}^j = \Gamma(v) \beta \left(1 + \frac{j-v}{2} \right) \times \\ \times \Gamma^{-1} \left(\frac{2-v+m_1-m_2}{2} \right) \Gamma^{-1} \left(\frac{2-v+m_2-m_1}{2} \right). \quad (\text{Б.5})$$

Подстановка (Б.5) в (Б.3) и использование интегральных представлений для $1/\Gamma(z)$ дают результат (7.17).

Зная N_j , можно найти M_j с помощью формулы ($\kappa^2 = 1$)

$$\int d^4r [r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_j}] e^{i\kappa r} r^{-2\delta} = i^j 4^{-\delta} \frac{\Gamma(2 - \delta + j)}{\Gamma(\delta)} [\kappa_{\alpha_1} \dots \kappa_{\alpha_j}]. \quad (\text{Б.6})$$

Из (Б.6) получаем

$$M_j(v) = K_j(v) N_j(v),$$

$$K_j(v) = \frac{i^j}{2^{j+v}} \Gamma\left(3 - \Delta + \frac{j-v}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\Delta - 1 + \frac{j+v}{2}\right).$$

Приведем также формулу для N_{AB}^j в случае полей с разными размерностями Δ_A и Δ_B . В этом случае

$$N_{AB}^j(v) = \frac{1}{v(v+j+1)} \beta_{AB} \left(1 + \frac{j-v}{2}\right) \beta_{AB}^{-1} \left(1 + \frac{j+v}{2}\right),$$

$$\beta_{AB}(x) = B(x + \Delta_A - \Delta_B, x + \Delta_B - \Delta_A).$$

Литература

1. *Wilson K.G., Cogut J.B.*, Physics Reports, в печати.
2. *Поляков А.М.*, Препринт, ИТФ АН СССР, 1972.
3. *Wilson K.G.*, Phys. Rev., **179**, 1499, 1969.
4. *Kadanoff L.P.*, Phys. Rev. Lett., **23**, 1430, 1969.
5. *Поляков А.М.*, ЖЭТФ, **57**, 271, 1969.
6. *Wilson K., Fisher M.* Phys. Rev. Lett., **28**, 548, 1972.
7. *Шеебер С.*, Введение в квантовую теорию поля, ИИЛ, 1961.
8. *Toller M.*, Nuovo Cim., **37**, 631, 1965.
9. *Ferrara G., Gatto R., Grillo F.*, Lett. Nuovo Cim., **26**, 1363, 1971.

ДВУМЕРНЫЕ КВАНТОВЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Вергелес С.Н., Гряник В.М.

Ядерная физика. 1976. Т. 23. С. 1324–1334

Развит метод исследования квантовых аналогов классических систем, обладающих бесконечными наборами независимых интегралов движения (проинтегрированных методом обратной задачи). Метод демонстрируется на различных моделях. В модели

$$L = \int dx \left[:1/2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi: + (m^4/\lambda) (1 - : \text{ch}(\sqrt{\lambda}/m) \phi:) \right], \quad \lambda > 0,$$

все вычисления проделаны до конца, найдены S -матрицы, форм-факторы и функция Грина, исследованы асимптотики.

1. Введение

Прогресс, достигнутый в последние годы в исследовании двумерных классических теорий поля, во многом связан с применением нового метода решения нелинейных уравнений — метода обратной задачи рассеяния, предложенного Гарднером, Гринем, Крускалом и Миурой [1] и развитого в последующих работах [2–4]. Этот метод позволил полностью проинтегрировать некоторые системы и обнаружить следующие уникальные их свойства:

- а) наличие бесконечного набора независимых интегралов движения;
- б) отсутствие множественного рождения;
- в) рассеяние приводит только к перераспределению импульсов между частицами, т.е. в процессе рассеяния частицы только обмениваются импульсами;
- г) факторизация многочастичной S -матрицы.

В настоящей работе предлагается метод для нахождения точных S -матриц и функций Грина квантовых вариантов таких полевых систем¹⁾. Наиболее интересные с этой точки зрения системы описываются лагранжианами

$$L = \int dx \left[\frac{1}{2} : \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi: + \frac{m^4}{\lambda} \left(: \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi: - 1 \right) \right], \quad \lambda > 0, \quad (1)$$

¹⁾ Основные идеи этого метода были предложены А.М. Поляковым.

$$L = \int dx \left[\frac{1}{2} : \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi : + \frac{m^4}{\lambda} \left(1 - : \text{ch} \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi : \right) \right], \quad \lambda > 0, \quad (1a)$$

ϕ — однокомпонентное скалярное поле,

$$L = \int dx \left[\frac{i}{2} \left(\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\lambda}{2} (\psi^+ \psi)^2 \right], \quad (2)$$

ψ — комплексное однокомпонентное поле,

$$L = \int dx \left[\frac{i}{2} \left(\psi_\alpha^+ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \psi_\alpha^+}{\partial t} \psi_\alpha \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} - \frac{\lambda}{2} \psi_\alpha^+ \psi_\beta^+ \psi_\beta \psi_\alpha \right], \quad (3)$$

ψ_α — двухкомпонентное спинорное комплексное поле.

Допустим, что в соответствующих квантовополевых моделях сохраняется свойство а) и, как будет показано, из него вытекают и все остальные свойства²⁾.

Пусть C_n — какой-либо интеграл из рассматриваемых систем. Пусть имеется всего одна частица с импульсом k . Введем обозначение и далее будем предполагать, что $\omega(k) = \langle k | C_n | k \rangle$ — независимые функции k при $n = 0, 1, 2, \dots$. Пусть в состоянии in имеется m квантов с импульсами k_1, k_2, \dots, k_m ; рассмотрим матричный элемент интеграла C_n по этому состоянию. Очевидно, мы будем иметь

$$\langle k_1, k_2, \dots, k_m | C_n | k_1, k_2, \dots, k_m \rangle = \sum_{i=1}^m \omega_n(k_i), \quad (4)$$

так как в состоянии in частицы бесконечно далеки одна от другой и не взаимодействуют. Вообще говоря, существуют двумерные полевые модели, например электродинамика, где из-за наличия безмассовых частиц (фотонов) силы взаимодействия не убывают с ростом расстояния, но мы таких теорий не рассматриваем, силы в наших моделях короткодействующие. При $t \rightarrow +\infty$ наша система из m квантов переходит в систему из m' квантов с импульсами $p_1, p_2, \dots, p_{m'}$; в силу того что C_n — интеграл движения, мы будем иметь

$$\sum_{i=1}^m \omega_n(k_i) = \sum_{i=1}^{m'} \omega_n(p_i), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Если (5) рассматривать как уравнение относительно p_i , то будет единственное решение, когда $m = m'$ и набор импульсов конечных частиц равен набору импульсов начальных частиц, т.е. из свойства а) вытекают свойства б) и в).

²⁾ Подробные обсуждения интегралов движения в квантовых полностью интегрируемых системах см. в работах [5, 6].

Полезно проследить за этим свойством на графиках Фейнмана. Если C_n — интеграл движения, то выражение (4) от времени не зависит, и поэтому его фурье-преобразование по времени с частотой $\varepsilon \neq 0$ равно нулю:

$$\left\langle f \left| \int dt dx e^{i\varepsilon t} C_n^{int}(xt) S \right| i \right\rangle = 0. \quad (6)$$

Возьмем такие $|i\rangle$ и $|f\rangle$, чтобы хотя бы одно из них состояло более чем из двух частиц. Устремим ε к нулю и выделим главные по ε графики, в которых волнистая линия, соответствующая оператору C_n , будет ответвляться от внешних линий. Эти графики пропорциональны $1/\varepsilon$ за счет пропагаторов, соединяющих точку ответвления волнистой линии от внешних линий с остальной частью графика (рис. 1).

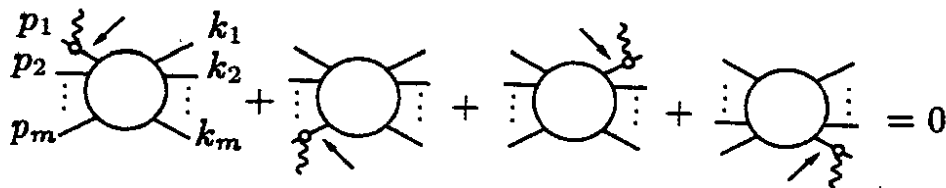


Рис. 1.

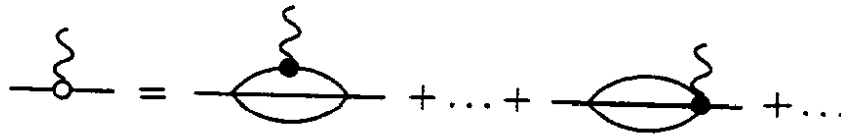


Рис. 2.

В равенстве (рис. 1), которое является графическим изображением интересующей нас суммы графиков, такие пропагаторы указаны стрелками. Через эти пропагаторы текут импульсы, которые на бесконечно малую величину $\sim \varepsilon$ смещены относительно массовой поверхности (уже перенормированной, так как учтены диаграммы во всех порядках по константе связи), т.е. значение этих пропагаторов берется почти в полюсе, и поэтому все они порядка $1/\varepsilon$. Эта ситуация аналогична той, которая возникает в электродинамике при излучении мягких фотонов (так называемая инфракрасная катастрофа).

Большие круги на рис. 1 представляют собой полную амплитуду перехода начального состояния (k_1, \dots, k_m) в конечное (p_1, \dots, p_m') , которую мы будем обозначать $A_{mm'}$. Маленькие кружки в местах ответвления волнистых линий означают сумму графиков, которые дают поправки к среднему от C_n по одному из состояний k_i или p_i . Например, первые поправки изображены графически на рис. 2.

Эти поправки приводят к тому, что волнистая линия дает множитель $\omega_n(k_i)$ или $\omega_n(p_i)$, если она ответвляется от внешней линии соответственно k_i или p_i . Ответвления волнистой линии от внутренних линий диаграмм дадут вклады в соотношение (6) более высокого порядка по ε .

Перепишем равенство в аналитическом виде:

$$(2\pi)^2 \delta \left(\sum_{i=1}^m k_i - \sum_{i=1}^{m'} p_i \right) \delta \left(\sum_{i=1}^m \omega_n(k_i) - \sum_{i=1}^{m'} \omega_n(p_i) \right) \times \\ \times \frac{1}{\varepsilon} \left[\sum_{i=1}^m \omega_n(k_i) - \sum_{i=1}^{m'} \omega_n(p_i) \right] A_{mm'}(k_i p_i) = 0. \quad (7)$$

Если $m \neq m'$ и импульсы конечных частиц не равны импульсам начальных, то выражение в квадратных скобках не может равняться нулю одновременно при всех n в силу независимости функций $\omega_n(k)$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ В этом случае $A_{mm'} = 0$, и мы опять приходим к свойствам б) и в).

Из сказанного выше следует такой вывод: если при $t \rightarrow -\infty$ система находится в некотором состоянии in, то при $t \rightarrow +\infty$ она перейдет в некоторое состояние out, которое может отличаться только фазой (зависящей от квантовых чисел системы) от состояния in.

2. S-матрицы

Установленные свойства (б) и (в) позволяют в принципе, используя свойство унитарности (УУ) и условие аналитичности (УА), провести до конца бутстрапные вычисления.

Приведем выкладки для системы (1). Вначале находится двухчастичная амплитуда, показанная на рис. 3, причем знак плюс означает,

Рис. 3

Рис. 4

что амплитуда взята на верхнем берегу правого разреза в s -плоскости, а знак минус — наоборот, $s = (k_1 + k_2)^2$, k_1, k_2 — двумпульсы рассеивающихся частиц. S -матричный элемент в релятивистской нормировке

$$S_{22} = (2\pi)^2 2k_1^0 2k_2^0 \sum_{\substack{\text{перестановки} \\ \text{по } i_1, i_2}} \delta(p_{i_1}^1 - k_1^1) \delta(p_{i_2}^1 - k_2^1) + \\ + i(2\pi)^2 \delta \left[\sum_{i=1}^2 (p_i^1 - k_i^1) \right] \delta \left[\sum_{i=1}^2 (p_i^0 - k_i^0) \right] A(s^+). \quad (8)$$

Графическая запись УУ имеет вид, изображенный на рис. 4. Линии,

которые пересекаются штрихом, лежат на массовой поверхности. Аналитическая запись такова:

$$A(s^+) - A(s^-) = i \frac{A(s^+)A(s^-)}{2\sqrt{s(s-4m^2)}}, \quad s > 4m^2. \quad (9)$$

При помощи кроссинг-симметрии и (9) легко найти скачок амплитуды на левом разрезе, а учтя то, что $A(s)$ — вещественно-аналитическая функция, имеем следующие соотношения:

$$\text{Im } A^{-1}(s) = -\frac{1}{4\sqrt{s(s-4m^2)}}, \quad s > 4m^2, \quad s < 0. \quad (10)$$

В соотношениях (10) $A(s)$ берется на верхнем берегу правого разреза и на нижнем берегу левого. С помощью дисперсионного соотношения восстанавливается $A^{-1}(s)$, причем возможные полюса амплитуды уже не дадут вклада в дисперсионное соотношение для $A^{-1}(s)$, но КДД-полюса необходимо учесть, если они есть.

S -матрица в системе (1) была впервые рассмотрена в работе [7], где двухчастичная амплитуда содержит КДД-полюса, и это делает ее отличной от нашей, начиная с третьего порядка по λ . Приведенное

$$B = \begin{array}{c} k_1 \quad k_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ k_2 \quad k_2 \end{array} + \begin{array}{c} k_1 \quad k_1 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ k_2 \quad k_2 \end{array} + \dots$$

Рис. 5.

ниже выражение для амплитуды было проверено при помощи ТВ до третьего порядка по λ включительно; мы считаем, что в системе (1) $A(s)$ КДД-полюсов не содержит:

$$A(s) = B \left/ \left[1 - \frac{iB}{4\sqrt{s(s-4m^2)}} \right] \right.; \quad (11)$$

B — вещественная константа; на рис. 5 изображены первые диаграммы из суммы t -канальных диаграмм; в аналитической записи это выглядит так: $B = \lambda + \lambda^2/8\pi m^2 + \dots$

В дальнейшем часто будет удобно работать с безразмерными величинами

$$a(z) = \frac{A(z)}{16m^2} = b \left/ \left[1 - \frac{ib}{\sqrt{z(z-1)}} \right] \right., \quad z = \frac{s}{4m^2}, \quad b = \frac{B}{16m^2}.$$

$a(z)$ в лакуне $0 < z < 1$ имеет два полюса: при

$$z = z_1 = 1/2(1 + \sqrt{1-4b^2}) \quad \text{и при} \quad z = z_2 = 1 - z_1.$$

Правый полюс — связанное состояние s -канала, а левый — u -канала. Когда константа b возрастает, полюса приближаются один к другому

и при $b = 1/2$ уходят в комплексную плоскость z на первый риманов лист. При этом имеется две возможности:

- 1) связанные состояния делаются нестабильными;
- 2) в системе (1) рождаются все новые и новые связанные состояния, пока система не перестроится существенно.

Первая возможность исключается, поскольку в системе нет настолько легких частиц, чтобы удовлетворить закону сохранения энергии-импульса. Следовательно, реализуется вторая возможность, и модель (1) при $b > 1/2$ не имеет смысла рассматривать предлагаемым методом. Введем следующие обозначения:

$$I_n = (2\pi)^n \sum_{\text{по перестановкам } (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)} \prod_{i=1}^n (2k_i^0) \delta(p_{\alpha_i}^1 - k_i^1),$$

$$\exp[2i\delta(z)] = \frac{\sqrt{z(z-1)} + ib}{\sqrt{z(z-1)} - ib}.$$

Тогда $S_{22} = I_2 \exp[2i\delta(z)]$; $2\delta(z)$ — та фаза, на которую умножается волновая функция двух частиц (вектор состояния) с импульсами k_1 и k_2 при изменении времени от $-\infty$ до $+\infty$.

Многочастичные S -матричные элементы для системы (2) впервые были построены в работе [8], а для системы (1) — в [7]. В обоих случаях S -матрицы такие, какими их можно было бы ожидать из следующего наглядного рассуждения. При $t \rightarrow -\infty$ самая быстрая частица имеет самую малую координату, вторая по скорости частица имеет координату, большую самой быстрой, но меньшую, чем все остальные частицы, и т.д. При $t \rightarrow +\infty$ частицы меняют свое относительное расположение на обратное. При этом каждая частица столкнется по одному разу со всеми остальными, и суммарная фаза S -матрицы будет равна сумме фаз попарных столкновений.

Это рассуждение подтверждается изучением диаграмм:

$$S_{nn} = I_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} \exp[2i\delta(z_{ij})], \quad z_{ij} = \frac{(k_i + k_j)^2}{4m^2}. \quad (12)$$

Такой вид S_{nn} был проверен до третьего порядка по λ включительно при сравнении с ТВ.

Обратим внимание на то, что в нерелятивистском пределе система (1) переходит в систему (2) с притяжением, а система (1а) в систему (2) с отталкиванием. Системы (1) и (2) с притяжением имеют связанные состояния (СС); в системе (2) они были исследованы в работах [8]. СС системы (1) в нерелятивистском пределе, т.е. когда импульсы и энергии связи малы по сравнению с массой, переходят в соответствующие СС системы (2). В настоящей работе вопрос о СС в системе (1) не рассмотрен до конца, но некоторые величины, относящиеся к СС в этой системе, мы приводим.

Физические величины, относящиеся к СС, можно получить из величин, описывающих обычные частицы, с помощью аналитического продолжения. При этом импульсы k частиц, из которых состоят СС, делаются комплексными (в системе покоя СС — чисто мнимыми). Инварианты, составленные из импульсов частиц, входящих в одно и то же СС, делаются меньше порогового значения $4m^2$ и принимают значения, при которых выражения (12) имеют полюса, причем в этих полюсах берутся вычеты по соответствующим инвариантам, и из получающихся выражений выделяются множители, соответствующие вершинам, в которые входят две линии, соответствующие обычным частицам, и одна линия, соответствующая связанному состоянию.

Аналитически продолжая трехчастичный матричный элемент (12), можно получить матричный элемент рассеяния обычной частицы на двухчастичном связанном состоянии, т.е. фазу, которая при этом накапливается. Для этого нужно положить $z_{23} = z_1$ и взять вычет в полюсе: $z_{12} = x + iy$, $z_{13} = x - iy$. Величины x и y выражаются через импульсы частицы k^1 и СС q^1 :

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{z_1} \sqrt{1 + \frac{(p^1)^2}{m^2}},$$

$$y = \frac{p^1}{2m} \sqrt{z_2},$$

где p^1 — импульс частицы в системе покоя СС. Тогда фаза γ , которую приобретают частица и двухчастичное СС, при рассеянии будет

$$\exp[2i\gamma(z)] = \frac{\sqrt{z(z-1)} + ib}{\sqrt{\bar{z}(\bar{z}-1)} - ib} \frac{\sqrt{\bar{z}(\bar{z}-1)} + ib}{\sqrt{z(z-1)} - ib}. \quad (13)$$

Аналитически продолжая четырехчастичный элемент S -матрицы (12), получаем матричный элемент рассеяния двух двухчастичных СС с импульсами q_1^1 и q_2^1 , причем полагаем $z_{12} = z_{34} = z_1$ и берем вычеты. Ответ удобно выразить через такие параметры:

$$v_i = \frac{q_i^1}{\sqrt{4m^2 z_1 + (q_i^1)^2}}, \quad \text{th } \theta_i = v_i, \quad v = \text{th } (\theta_2 - \theta_1),$$

$$\exp[2i\beta] = \frac{|v| + 2ib\sqrt{1-v^2}}{|v| - 2ib\sqrt{1-v^2}} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\frac{1}{1-v^2} (2z_1 - 1 - ib) - \frac{1}{4}} + ib}{\sqrt{\frac{1}{1-v^2} (2z_1 - 1 + ib) - \frac{1}{4}} - ib} \frac{\sqrt{\frac{1}{1-v^2} (2z_1 - 1 + ib) - \frac{1}{4}} + ib}{\sqrt{\frac{1}{1-v^2} (2z_1 - 1 - ib) - \frac{1}{4}} - ib}. \quad (13a)$$

Выражение (13a) в нерелятивистском пределе переходит в соответствующее выражение, приведенное в [8].

Система (1а) проще системы (1), так как в ней нет проблемы связанных состояний. Для системы (1а) S -матрица получается из выражения (12) путем замены $\lambda \rightarrow -\lambda$.

3. Форм-факторы

Для построения функции Грина нам понадобятся матричные элементы полевых операторов такого вида:

$$\langle 0 | \phi(00) | k_1 k_2 \dots k_n \rangle = f_n(k_1 k_2 \dots k_n).$$

Мы их называем форм-факторами. Легко написать соотношение “унитарности” для f_n :

$$f_n = \bar{f}_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} \exp(2i \delta_{ij}). \quad (14)$$

Черта над f означает комплексное сопряжение. Уравнение (14) имеет силу, когда все $z_{ij} > 1$.

Сначала мы определим форм-факторы для системы (1а). В ТВ видно, что каждый форм-фактор содержит в качестве множителя

$$f_3 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \diagdown \\ 3 \end{array} 2 + \text{перестановки по } k_1, k_2, k_3 \right] + \dots$$

Рис. 6.

“дерево” — его будем обозначать буквой D . Например, в первых порядках по λ имеем формулу-график рис. 6 или аналитически

$$f_3 = G_0(k_1 + k_2 + k_3) \times \left\{ -\lambda - \frac{i \lambda^2}{8 \pi^2} \left[\int dq G_0(q) G_0(k_1 + k_2 - q) + \dots \right] + \dots \right\}. \quad (15)$$

Для f_3 деревом будет $D = G_0(k_1 + k_2 + k_3)$. Сумма, стоящая в фигурных скобках, — величина существенно квантовая, комплексная, потому что включает в себя все петли из f_3 и определяется из линейного уравнения (14).

Деревья можно определить с помощью классического решения соответствующего уравнения. Выделим деревья из форм-факторов: $f_n = D_n g_n$. Деревья — вещественные величины, а g_n — комплексные, поэтому уравнение (14) является фактически уравнением для g_n .

Рассмотрим $\ln g_3(z_{12}, z_{13}, z_{23})$. Из (14) находим, что

$$\ln g_3(z_{ij}^+) - \ln g_3(z_{ij}^-) = \begin{cases} 2i [\delta(z_{12}) + \delta(z_{13}) + \delta(z_{23})], & z_{ij} > 1, \\ 0, & z_{ij} < 1. \end{cases} \quad (16)$$

Решение, аналитическое по z_{ij} , удовлетворяющее условию (18), есть

$$\ln g_3 = \Gamma(z_{12}) + \Gamma(z_{13}) + \Gamma(z_{23}) + \text{const},$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\delta(t) dt}{t - z - i\varepsilon}. \quad (17)$$

Проверкой соотношения (17) может стать сравнение $\ln g_3$ с логарифмом амплитуды A_{22} . Действительно, если все “ноги” форм-фактора поместить на массовую поверхность, для чего нужно, например, k_3 заменить на $-k_2$, то выражение в фигурных скобках в (15), которое есть g_3 , совпадает с A_{22} , причем $z_{12} = z$, $z_{13} = 1 - z$, $z_{23} = 0$ в (17). Иначе говоря, выражение

$$\Gamma(z) + \Gamma(1 - z) + \Gamma(0) + \text{const}$$

должно равняться $\ln A(z)$ при надлежащем выборе const в (17). Это действительно имеет место, потому что как выражение (17), так и $\ln A_{22}(z)$ аналитичны по z , имеют одинаковые разрезy $-\infty < z < 0$ и $1 < z < +\infty$, а скачки на разрезах совпадают для обоих выражений:

$$\begin{aligned} \ln A_{22}(z^+) - \ln A_{22}(z^-) = \\ = \Gamma(z^+) + \Gamma(1 + z^+) - \Gamma(z^-) - \Gamma(1 - z^-) = \begin{cases} 2\delta(z), & z > 1, \\ 0, & 0 < z < 1, \\ -2\delta(z), & z < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оба выражения совпадают с точностью до целой функции, а из того факта, что форм-фактор не обращается экспоненциально в бесконечность ни в одной точке, делаем вывод, что целая функция сводится к постоянной. Напишем окончательный ответ для f_3 :

$$\begin{aligned} f_3 = -Z^{3/2} G_0(k_1 + k_2 + k_3) \times \\ \times B \exp[-\Gamma(0)] \exp[\Gamma(z_{12}) + \Gamma(z_{13}) + \Gamma(z_{23})], \quad (18) \end{aligned}$$

Z — константа перенормировки поля. Если все $z_{ij} \rightarrow \infty$, то все петли в g_3 вымирают и $g_3 \rightarrow -\lambda$, а, с другой стороны, из (18) имеем:

$$g_3 \rightarrow -B \exp[-\Gamma(0)].$$

Следовательно,

$$\lambda = 16m^2 b \exp[-\Gamma(0)]. \quad (19)$$

В системе (1а) нет связанных состояний и λ ничем не ограничена. При $\lambda \gg m^2$ находим из (19)

$$b \simeq \left(\frac{\lambda}{16m^2} \right)^{2/3}. \quad (20)$$

Легко видеть, что (18) удовлетворяет уравнению (14).

Аналогично находятся произвольные форм-факторы

$$f_{2n+1} = -Z^{(2n+1)/2} m^2 \left(\frac{\lambda}{16m^2} \right)^n \left\{ G_0 \left(\sum_{i=1}^{2n+1} k_i \right) \times \right. \\ \times \left. \left[1 - m^2 G_0 \left(\sum_{i=1}^{2n-1} k_i \right) + \dots \right] \right\} \prod_{1 \leq i < j \leq 2n+1} \exp [\Gamma(z_{ij})], \\ n = 1, 2, 3 \dots \quad (21)$$

Выражение в фигурных скобках — дерево с вынесенной константой связи.

Форм-факторы вида $\langle k_1 \dots k_m | \varphi(00) | k_{m+1} \dots k_n \rangle$, из которых строятся многоточечные функции Грина, получаются из (21) аналитическим продолжением. Для этого нужно произвести такую замену в (21):

$$z_{ij} \rightarrow \begin{cases} z_{ij}, & \text{если } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m \\ & \text{или } m+1 \leq i \leq n, m+1 \leq j \leq n, \\ 1 - z_{ij}, & \text{если } 1 \leq i \leq m, m+1 \leq j \leq n \\ & \text{или } m+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

Перейдем к рассмотрению системы (1). Прежде всего проследим за скачками $\ln A(z)$, где $A(z)$ взято из (11).

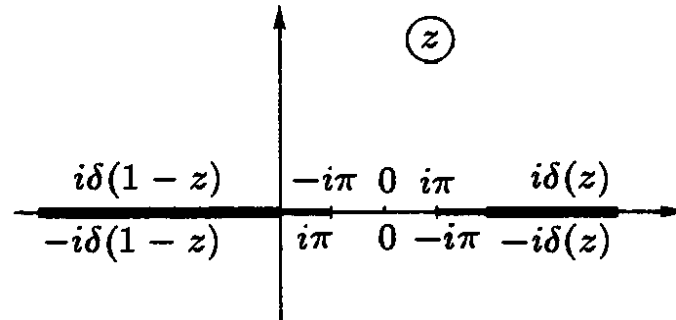


Рис. 7.

На рис. 7 изображена z -плоскость с разрезами от $-\infty$ до z_1 и от z_2 до $+\infty$; $\ln A$ имеет такие мнимые части на берегах разрезов, какие указаны на рис. 7.

Теперь рассмотрим выражение

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left[\ln \frac{z_{ij} - 1}{z_{ij} - z_1} + \Gamma(z_{ij}) \right] + \text{const}, \\ \Gamma(z) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\delta(t) dt}{t - z - i\epsilon} = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\arcsin[b/\sqrt{t(t-1)+b^2}] dt}{t - z - i\epsilon}. \quad (22)$$

Если в (22) положить $z_{12} = z$, $z_{13} = 1 - z$, $z_{23} = 0$, то у получившегося выражения будут такие же разрезы, как и на рис. 7, и такие же мнимые части на разрезах. Поэтому, проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, находим

$$f_3 = Z^{3/2} G_0(k_1 + k_2 + k_3) z_1 B \exp[-\Gamma(0)] \prod_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{z_{ij} - 1}{z_{ij} - z_1} \exp[\Gamma(z_{ij})]. \quad (23)$$

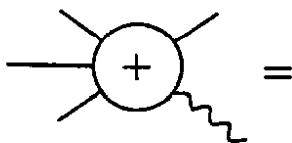
Из (23) находим связь $\lambda/16m^2 = z_1 b \exp[-\Gamma(0)]$. Выражение (23) удовлетворяет уравнению (14), оно переходит в двухчастичную амплитуду $A(z)$, если все "ноги" в (23) поместить на массовую поверхность.

Для произвольного матричного элемента поля φ между вакуумом и состоянием $2n + 1$ обычных частиц в системе (1) имеем

$$f_{2n+1} = Z^{(2n+1)/2} m^2 \left(\frac{\lambda}{16m^2} \right)^n \times \\ \times \left\{ G_0 \left(\sum_{i=1}^{2n+1} k_i \right) \left[1 - m^2 G_0 \left(\sum_{i=1}^{2n-1} k_i \right) + \dots \right] \right\} \times \\ \times \prod_{1 \leq i < j \leq 2n+1} \frac{z_{ij} - 1}{z_{ij} - z_1} \exp \Gamma(z_{ij}). \quad (24)$$

Форм-факторы (23) и (24) были проверены сравнением с ТВ до второго порядка по λ включительно.

Однако для построения функций Грина в системе (1) недостаточно форм-факторов (24), нужны еще матричные элементы поля между вакуумом и состояниями с произвольным числом обычных частиц и всевозможных связанных состояний. Такие форм-факторы можно получить из (24) аналитическим продолжением точно так же, как это делалось во втором разделе при нахождении амплитуд рассеяния обычных частиц на СС и СС на СС. Эта задача нами полностью не решена, но для матричного элемента поля между вакуумом и состоянием с одной обычной частицей и одним двухчастичным СС мы приводим ответ, который получается аналитическим продолжением f_3 :



$$= Z^{3/2} G_0(p) 4m^2 z_1 z_2 \sqrt{\frac{2}{b}} \sqrt[4]{1 - 4b^2} \exp[\Gamma(z_1) - \Gamma(0)] \times \\ \times \exp \left[\frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2} \delta(t) dt \right] \frac{(x - 1)^2 + y^2}{(x - z)^2 + y^2}; \quad (25)$$

здесь

$$p = \left(\sqrt{k^2 + m^2} + \sqrt{4m^2 z_1 + q^2}, k + q \right).$$

Волнистая линия означает двухчастичное СС с импульсом q ; x и y — те же, что и ранее.

4. Функции Грина

Из найденных форм-факторов строятся функции Грина. Например, для системы (1а) двухточечная гриновская функция в импульсном пространстве имеет вид

$$\begin{aligned} G(q) = & \frac{-Z}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^{2n+1} m^4}{(2n+1)!} \left(\frac{4\lambda}{\pi} \right)^{2n} \times \\ & \times \int \frac{d k_1^1 \dots d k_{2n+1}^1}{k_1^0 \dots k_{2n+1}^0} \delta \left(q^1 - \sum_{i=1}^{2n+1} k_i^1 \right) G_0 \left(\sum_{i=1}^{2n+1} k_i \right) \times \\ & \times \left[1 - m^2 G_0 \left(\sum_{i=1}^{2n-1} k_i \right) + \dots \right] \prod_{1 \leq i < j \leq 2n+1} \exp[2 \operatorname{Re} \Gamma(z_{ij})] \times \\ & \times \left\{ \sum_{i=1}^{2n+1} k_i^0 / \left[\left(\sum_{i=1}^{2n+1} k_i^0 \right)^2 - (q^0)^2 - i\varepsilon \right] \right\}. \quad (26) \end{aligned}$$

К сожалению, вычислить в явном виде функцию Грина (26) не удастся. Однако найти асимптотику (26) в физически интересной области $m^2 \ll q^2 \ll \lambda$ можно. Приведем результат:

$$\operatorname{Im} G = \begin{cases} \frac{Z^3}{\pi q^2} \ln \frac{q^2}{m^2}, & 1 \ll \frac{q^2}{m^2} \ll b; \\ \frac{Z^5}{2(2\pi)^3 q^2} \ln^2 \frac{q^2}{b} \ln \frac{m^2 b^2}{q^2}, & b \ll \frac{q^2}{m^2} \ll b^2; \\ \frac{Z^N m}{(q^2)^{3/2}}, & N \gg 1, \end{cases} \quad (27)$$

N — множественность, $N \sim [\ln(q^2/m^2)] \ln^{-1} b$. Под множественностью мы понимаем число физических частиц, на которые распадается “виртуальная” частица с “массой” q^2 .

В модели (1) распределение продуктов распада виртуальной частицы с “массой” q^2 равномерно по быстройтам с интервалом $\ln b$.

При помощи найденной мнимой части функции Грина можно оценить константу перенормировки. Для этого мы используем хорошо

известное в теории дисперсионных соотношений равенство

$$\frac{1}{\pi} \int \operatorname{Im} G(t) dt = 1.$$

В нашем случае интеграл фактически берется в пределах

$$m^2 < t < b^2,$$

при $b^2 < t$ он быстро сходится и получается такое уравнение:

$$Z + \frac{Z^3}{2\pi^2} \ln^2 b + \frac{Z^5}{12(2\pi)^4} \ln^4 b = 1,$$

из которого находим, что $Z \simeq \sqrt[3]{2}(\pi/\ln b)^{2/3}$. При помощи дисперсионного соотношения нетрудно полностью восстановить гриновскую функцию в системе (1а) по ее мнимой части. Двухточечный коррелятор поля φ при $m^2 \ll k^2 \sim \lambda$ имеет такие асимптотики:

$$\begin{aligned} & \frac{Z^3}{2\pi^2 k^2} \ln^2 \frac{k^2}{m^2} \quad \text{при} \quad 1 \ll \frac{k^2}{m^2} < \left(\frac{\lambda}{16m^2} \right)^{2/3}; \\ & \frac{Z^3}{2\pi^2 k^2} \left[\frac{4}{9} \ln^2 \frac{\lambda}{16m^2} + \frac{Z^2}{8\pi} \ln^4 \frac{k^2}{m^2} - \frac{Z^2}{4\pi} \ln^3 \frac{k^2}{m^2 (\lambda/16m^2)^{2/3}} \times \right. \\ & \quad \left. \times \ln \frac{m^2 (\lambda/16m^2)^{4/3}}{k^2} \right] \quad \text{при} \quad \left(\frac{\lambda}{16m^2} \right)^{2/3} \ll \frac{k^2}{m^2} \ll \left(\frac{\lambda}{16m^2} \right)^{4/3}. \end{aligned}$$

5. Заключение

В нашем подходе, основанном на условиях унитарности и аналитичности, квантовые теории поля остаются самосогласованными без введения солитонов. Имеется две возможности для объяснения этого факта. Первая состоит в том, что при столкновении обычных частиц не могут рождаться солитоны. Иными словами, если в системе вначале не было солитонов, то они и никогда и не возникнут; тогда эволюция системы будет такой, как будто солитонов не может быть вообще в данной системе. Вторая возможность заключается в том, что амплитуды переходов обычных частиц в солитоны экспоненциально малы и в теории возмущений их нет. Это означало бы, что существует несколько самосогласованных квантовополевых теорий с ординаковыми ТВ (одни с солитонами, другие без них), причем соответствующие величины в обеих теориях совпадают с экспоненциальной точностью. Найденные нами решения и были бы "бессолитонными" теориями. По нашему мнению, скорее всего реализуется первая возможность. Она более соответствует духу рассматриваемых теорий.

Авторы выражают глубокую признательность А.М. Полякову за полезные советы и постоянное внимание к работе.

Литература

1. *Gardner C., Green G., Kruskal M., Miura R.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 1095, 1967.
2. *Лакс П.Д.*, Математика, **1** (5), 128, 1969. *Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д.*, Функциональный анализ и его приложения, **5** (4), 18, 1971. *Фаддеев Л.Д.*, Современные проблемы математики. М.: "Мысль", 1974.
3. *Захаров В.Е., Манаков С.В.*, ТМФ, **19**, 332, 1974.
4. *Захаров В.Е., Таттаджан Л.А., Фаддеев Л.Д.*, ДАН СССР, **219**, 1334, 1974.
5. *Вергелес С.Н., Гряник В.М.*, Препринт, ИТФ, Черноголовка, 1975.
6. *Кулиш П.П.*, Препринт, ИФВЭ, Серпухов, 1974.
7. *Арефьева И.Я., Корелин В.Е.*, Письма в ЖЭТФ, **20**, 680, 1974.
8. *Березин Ф.А., Похил Г.Б., Финкельберг В.М.*, Вестник МГУ, сер. 1, 1964.

ТОЧНАЯ ДВУХЧАСТИЧНАЯ S -МАТРИЦА СОЛИТОНОВ В КВАНТОВОЙ МОДЕЛИ СИНУС-ГОРДОНА

Замолодчиков А.Б.

Commun. Math. Phys. 55 (1977). P. 183–186

Построены точные и явные формулы для квантовых S -матричных элементов солитон-антисолитонного рассеяния, которые удовлетворяют условиям унитарности и кроссинга и имеют правильные аналитические свойства. Эта S -матрица согласована с теорией возмущений в массивной модели Тирринга и с квазиклассическими результатами в модели синус-Гордона.

Как известно, модель синус-Гордона, т.е. модель поля $\phi(x)$ в $(1+1)$ -мерном пространстве-времени, описываемая лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m_0^2}{\beta^2} \cos(\beta \phi), \quad (1)$$

имеет бесконечное число законов сохранения как на классическом, так и на квантовом уровнях [1, 2]. Это приводит к жестким ограничениям на процессы рассеяния частиц в этой модели. А именно, множество частиц, составляющих конечное состояние рассеяния, и множество их импульсов совпадают с множествами частиц и импульсов начального состояния соответственно, т.е. частицы могут лишь обмениваться своими импульсами в процессе столкновения [2, 3, 9, 10].

Спектр частиц в модели (1) состоит из солитона, антисолитона (эти частицы мы будем обозначать как A и \bar{A}) и некоторого числа солитон-антисолитонных связанных состояний. Массы последних описываются формулой

$$m_k = 2m \sin \frac{k\gamma}{16}, \quad k = 1, 2, \dots < \frac{8\pi}{\gamma}, \quad (2)$$

где m — масса солитона и $\gamma = \beta^2 [1 - \frac{\beta^2}{8\pi}]^{-1}$. Это решение было получено путем полуклассического квантования двойного солитонного решения классического уравнения синус-Гордона, но оно представляется точным [5, 3]. В последующих рассуждениях мы будем всегда использовать (2) как точные значения масс частиц. Рассмотрим двухчастичное солитон-антисолитонное рассеяние. Соответствующий элемент S -матрицы состоит только из двух компонент $S_1(s)$ и $S_2(s)$

($s = (p_1 + p_2)^2$, где p_1 и p_2 — импульсы частиц в начальном состоянии), описывающих два возможных канала реакции: рассеяние вперед (прохождение) и рассеяние назад (отражение), соответственно. $S_1(s)$ и $S_2(s)$ являются аналитическими функциями комплексной переменной s на s -плоскости с двумя разрезами вдоль действительной оси $s \leq 0$ и $s \geq 4m^2$.

Так как для $A + \bar{A}$ и $A + A$ рассеяний существуют лишь двухчастичные условия унитарности, то пороги при $s = 0$ и $s = 4m^2$ дают квадратично-корневые точки ветвления функций $S_1(s)$ и $S_2(s)$ (в общем случае существует более сложная точка ветвления при $s = \infty$). Таким образом, удобно использовать переменную¹⁾

$$\theta = \ln \left[\frac{s - 2m^2 + \sqrt{s(s - 4m^2)}}{2m^2} \right]. \quad (3)$$

После подстановки (3) функции $S_1(\theta)$ и $S_2(\theta)$ становятся мероморфными функциями переменной θ . Преобразование (3) отображает физический лист комплексной s -плоскости на полосу $0 < \text{Im } \theta < \pi$, так что границы левого и правого разрезов физического листа s -плоскости отображаются на оси $\text{Im } \theta = 0$ и $\text{Im } \theta = \pi$, соответственно. Таким образом, $A + \bar{A}$ рассеяние (s -канальное) описывается значениями функций $S_1(\theta)$ и $S_2(\theta)$ на положительной полуоси $\text{Im } \theta = 0$, а $A + A$ рассеяние (u -канальное для прохождения) описывается значениями функции $S_1(\theta)$ на отрицательной полуоси $\text{Im } \theta = \pi$. u -канал для отражения совпадает с s -каналом. Следовательно, соотношение кроссинг-симметрии для $S_2(\theta)$ имеет вид

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta). \quad (4)$$

Условия унитарности для реакций $A + \bar{A}$ и $A + A$ могут быть представлены в следующей аналитической форме:

$$\begin{aligned} S_1(\theta) S_1(-\theta) + S_2(\theta) S_2(-\theta) &= 1, \\ S_1(\theta) S_2(-\theta) + S_2(\theta) S_1(-\theta) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$S_1(\theta) S_1(2\pi i - \theta) = 1. \quad (6)$$

Формула (2) означает, что на сегменте $0 < \text{Im } \theta < \pi$ комплексной оси θ -плоскости в точках

$$\theta_k = i\pi - ik \frac{\gamma}{8}, \quad k = 1, 2, \dots < \frac{8\pi}{\gamma} \quad (7)$$

имеются полюса, соответствующие солитон-антисолитонным связанным состояниям. Существуют отдельные значения γ (а именно, $\gamma = \frac{8\pi}{n}$, где n — целое положительное), для которых n -ное связанное

¹⁾ Переменная θ представляет собой “гиперболический угол” между импульсами p_1 и p_2 : $p_i^0 = m \text{ ch } \theta_i$, $p_i^1 = m \text{ sh } \theta_i$, $i = 1, 2$, $\theta = |\theta_1 - \theta_2|$.

состояние (7) становится несвязанным, т.е. соответствующий полюс уходит за пределы полосы $0 < \text{Im } \theta < \pi$.

Корепин и Фаддеев установили [3], что при этих значениях γ точное выражение для функции $S_1(\theta)$ имеет вид

$$S_1(\theta) = e^{in\pi} \prod_{k=1}^n \frac{e^{\theta - i\pi k/n} + 1}{e^{\theta} + e^{-i\pi k/n}}. \quad (8)$$

До некоторой степени это утверждение подтверждается полуклассическим вычислением функции $S_2(\theta)$ [8], которая исчезает при $\gamma = 8\pi/n^2$.

Считая равенство (8) точным, мы попытаемся получить явные выражения для $S_1(\theta)$ и $S_2(\theta)$ при произвольном γ . Сначала рассмотрим функцию $S_1(\theta)$. Так как при $A + \bar{A}$ рассеянии не существует резонансных состояний [5], то из формулы (7) следует, что $S_1(\theta)$ имеет полюса в точках $\theta_k = i\pi - i \frac{k\gamma}{8}$, $k = 1, 2, \dots$. Для $\gamma = \frac{8\pi}{n}$ функция $S_1(\theta)$ имеет нули в полосе $-\pi < \text{Im } \theta < 0$ в точках $-i \frac{k\pi}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ (см. (8)). Следовательно при произвольном γ функция $S_1(\theta)$ будет иметь нули в точках $\theta'_k = -ik \frac{\gamma}{8}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, при этом первый нуль ($k = 0$) будет простым, в то время как остальные будут двойными. Те же самые рассуждения для полос $-l\pi < \text{Im } \theta < -(l-1)\pi$, $l = 1, 2, \dots$ вместе с применением условия (6) позволяют определить структуру сингулярностей функции $S_1(\theta)$, показанную на рис. 1.

Аналитическое выражение, соответствующее рис. 1, имеет вид

$$S_1(\theta) = -\frac{i}{\pi} \text{sh} \left(\frac{8\pi}{\gamma} \theta \right) R(\theta) R(i\pi - \theta),$$

где

$$R(\theta) = \Gamma \left(1 + i \frac{8\theta}{\gamma} \right) \times \prod_{l=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2l \frac{8\pi}{\gamma} + i \frac{8\theta}{\gamma}) \Gamma(1 + 2l \frac{8\pi}{\gamma} + i \frac{8\theta}{\gamma})}{\Gamma((2l+1) \frac{8\pi}{\gamma} + i \frac{8\theta}{\gamma}) \Gamma(1 + (2l-1) \frac{8\pi}{\gamma} + i \frac{8\theta}{\gamma})}. \quad (10)$$

Требования (5) и (6) будут удовлетворены, если

$$S_2(\theta) = \frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{8\pi^2}{\gamma} \right) R(\theta) R(i\pi - \theta). \quad (11)$$

Это выражение автоматически удовлетворяет условию кроссинг-симметрии (4). Структура сингулярностей для (11) показана на рис. 2.

²⁾ Если предположить, что при $\gamma = \frac{8\pi}{n}$ отражение отсутствует, тогда (8) будет определяться равенствами (5)–(7) с точностью до знака.

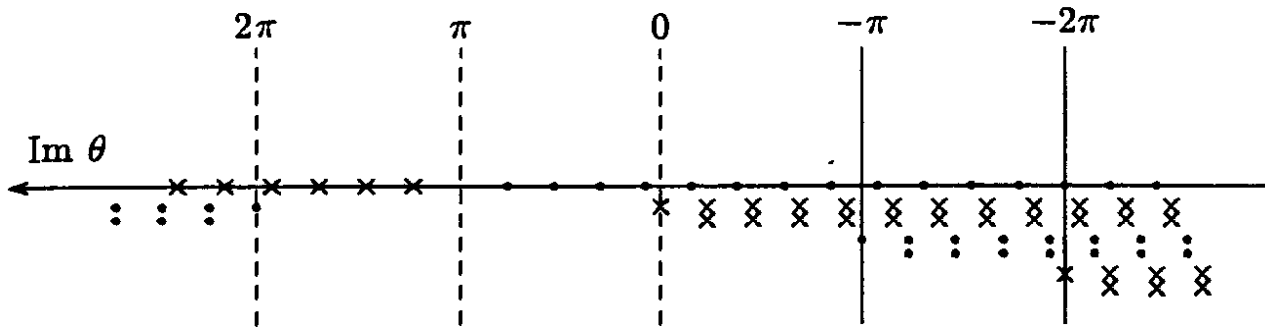


Рис. 1

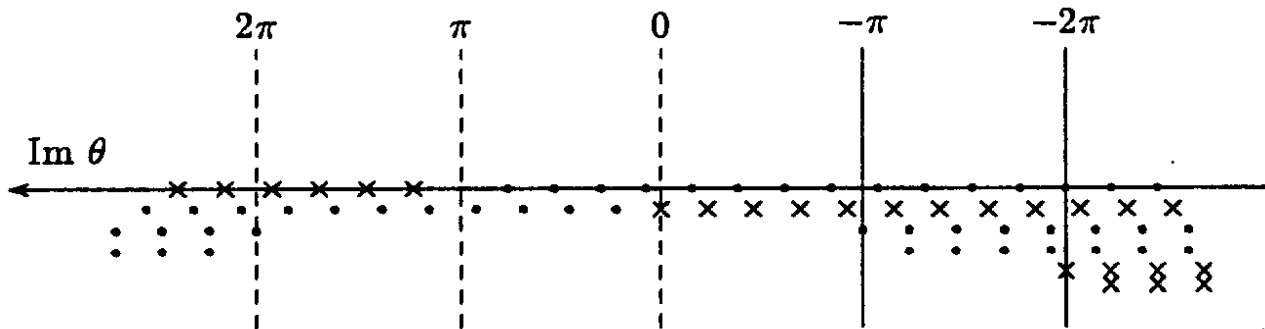


Рис. 2

Примечание. Крестики \times обозначают нули, точки \cdot обозначают полюса. На рис. 1 и рис. 2 некоторые из полюсов и нулей для большей ясности вынесены с комплексной оси. На самом деле все сингулярности имеют место при $\text{Re } \theta = 0$.

Для $\gamma \rightarrow 0$ функции (9) и (11) конвертируются в полуклассическое выражение для солитонной S -матрицы [3, 4, 8, 12].

Выражения (9)–(11) являются главным результатом этой статьи. Автор полагает, что эти формулы дают точную двухчастичную S -матрицу в квантовой модели солитонов синус-Гордона. Они проверяются двумя независимыми и нетривиальными способами. Первый основан на результате Колемана [6, 7], заключающемся в том, что модель синус-Гордона эквивалентна массивной модели Тирринга (ММТ), при этом солитоны соответствуют фундаментальным фермионам ММТ. При $\gamma \rightarrow 8\pi$ формулы (9), (11) можно разложить по степеням $2g/\pi = 8\pi/\gamma - 1$ и затем сравнить с результатами теории возмущения для ММТ. Такое сравнение было проведено до второго порядка по g и при этом наблюдалось совпадение.

Наинизшее из связанных состояний (2) ($k = 1$) является “фундаментальной частицей” (ФЧ) в модели (1) [5]. Поэтому другая проверка состоит в вычислении матричного элемента S -матрицы для ФЧ+ФЧ-рассеяния и в последующем сравнении этого элемента с теорией возмущения модели синус-Гордона (разложением по степеням β^2). Чтобы осуществить это, надо построить элемент S -матрицы для $A + A + \bar{A} + \bar{A}$ рассеяния, используя факторизацию многочастичной S -матрицы синус-Гордона [2, 9, 11] и явные выражения (9), (10).

Затем должны быть взяты вычеты в полюсах, соответствующих $\Phi\mathcal{C}$. В результате имеем

$$S(\theta') = \frac{\text{sh } \theta' + i \sin \gamma/8}{\text{sh } \theta' - i \sin \gamma/8}, \quad (12)$$

где $2m_1 \text{ch } \theta' = s - 2m_1^2$. Это выражение было приведено в работах [9, 10, 13] и проверено до третьего порядка по β^2 .

Автор выражает благодарность В.М. Грянику, М. И. Поликарпову, Ю.А. Симонову и К.А. Тер-Мартirosяну за полезные обсуждения.

Литература

1. *Тахтаджан Л.А., Фаддеев Л.Д.*, ТМФ, 21, 160–174 (1974).
2. *Кулиш П.П., Нусимов Е.Р.*, Письма в ЖЭТФ, 24, 247 (1976).
3. *Корепин В.Е., Фаддеев Л.Д.*, ТМФ, 25, 147–163 (1975).
4. *Корепин В.Е., Кулиш П.П., Фаддеев Л.Д.*, Письма в ЖЭТФ, 21, 302–305 (1975).
5. *Dashen F., Hasslacher B., Neveu A.*, Phys. Rev. D11, 3424–3450 (1975).
6. *Coleman S.*, Phys. Rev. D11, 2088–2097 (1975).
7. *Mandelstam S.*, Phys. Rev. D11, 3026–3030 (1975).
8. *Корепин В.Е.*, Письма в ЖЭТФ, 23, 224–228 (1976).
9. *Арефьева И.Я., Корепин В.Е.*, Письма в ЖЭТФ, 20, 680–683 (1974).
10. *Вергелес С.Н., Гряник В.М.*, ЯФ, 23, 1324–1334 (1976).
11. *Berg B., Karowski M., Thun H.J.*, Phys. Lett. 62B, 63–64 (1976); Phys. Lett. 62B, 187–189 (1976).
12. *Jackiw R., Woo G.*, Phys. Rev. D12, 1643 (1975).
13. *Shroer B., Truong T.T., Weiz P.*, Phys. Lett. 63B, 422–425 (1976).

ФАКТОРИЗОВАННЫЕ S -МАТРИЦЫ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ КАК ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ МОДЕЛЕЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Замолодчиков Ал.Б., Замолодчиков А.Б.

Annals of Physics. 120 (1979). P. 253–291

Рассматриваются общие свойства факторизованных S -матриц в двумерном пространстве-времени. Обсуждается связь между свойствами факторизации теории рассеяния и существованием бесконечного числа законов сохранения затравочной теории поля. Показано, что факторизация полной S -матрицы накладывает жесткие ограничения на двухчастичные матричные элементы: они должны удовлетворять специальным равенствам, так называемым уравнениям факторизации. Для S -матриц, обладающих изотопической $O(N)$ -симметрией, найдены общие решения уравнений унитарности, кроссинг-симметрии и факторизации. Оказывается, что эти решения имеют различные свойства для случаев $N = 2$ и $N \geq 3$. В случае $N = 2$ это общее решение зависит от одного параметра (типа константы связи), в то время как общее решение в случае $N \geq 3$ не имеет параметров, но аналитически зависит от N . Показано, что для $N = 2$ решение является точной S -матрицей солитонов в модели синус-Гордона (эквивалентно — в массивной модели Тирринга). Строится полная S -матрица этой модели. В случае $N \geq 3$ имеется два “минимальных” решения, т.е. обладающих минимальным набором сингулярностей. Показано, что одно из них является точной S -матрицей квантовой $O(N)$ -симметричной нелинейной σ -модели, а второе описывает рассеяние элементарных частиц в модели Гросса-Невью.

1. Введение

В общем случае двумерные релятивистские S -матрицы представляют собой очень сложный объект (не говоря уже о более высоких пространственных размерностях). Однако, в двумерном пространстве-времени возможна ситуация, когда полная S -матрица, будучи нетривиальной, оказывается достаточно простой. Это — случай факторизованного рассеяния. Вообще, факторизация двумер-

ной S -матрицы означает, что многочастичные S -матричные элементы имеют специальную структуру: они факторизуются на произведения некоторого числа двухчастичных S -матричных элементов так, как если бы произвольный многочастичный процесс рассеяния являлся последовательностью пространственно разделенных упругих двухчастичных столкновений, причем движение частиц между столкновениями свободно.

Факторизованная S -матрица была впервые открыта при изучении нерелятивистской задачи одномерного рассеяния частиц, взаимодействующих посредством δ -функционального парного потенциала [1–3]. Более того, факторизация типична для рассеяния солитонов нелинейных классических уравнений поля, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния [4–6]. Заметим, что все динамические системы, приводящие к факторизованным S -матрицам, имеют общее свойство — они обладают бесконечным множеством “близких к свободным” законов сохранения¹). Это множество законов сохранения рассматривается как необходимое и достаточное условие факторизации S -матрицы [7–11]. Различные точки зрения по этой проблеме представлены в пункте 2.

Представление многочастичных S -матричных элементов в терминах двухчастичных приводит к существенному упрощению и позволяет во многих случаях построить полную S -матрицу с той же точностью, с которой вычисляются сами двухчастичные S -матричные элементы. В настоящей статье мы строим некоторый класс релятивистских факторизованных S -матриц, инвариантных относительно изотопических $O(N)$ -преобразований. Для этого мы используем метод, впервые предложенный Каровским, Таном, Трионгом и Вейзом в работе [12] (в контексте модели синус-Гордона). Оказывается, что условие самосогласованности для факторизованной структуры полной S -матрицы приводит к специальному кубическому уравнению (далее называемому уравнением факторизации) для двухчастичных S -матричных элементов (см. пункт 2). Таким образом условия факторизации, унитарности и кроссинг-симметрии дают нетривиальную систему уравнений, которая лежит в основе обсуждаемого здесь метода. Общее решение этих уравнений имеет неоднозначность КДД типа: существует “минимальное решение” (т.е. решение, имеющее ми-

¹) Этот термин имеет следующее значение. В асимптотических состояниях, когда частицы находятся достаточно далеко друг от друга, законы сохранения становятся похожими на Законы сохранения в теории свободных частиц. Последние означают сохранение индивидуальных импульсов каждой частицы и могут быть сформулированы, например, как требование сохранения сумм степеней всех импульсов частиц [7]

$$\sum_a p_a^n; \quad n = 1, 2, \dots$$

нимальное множество сингулярностей), из которого общее решение получается путем добавления произвольного числа вспомогательных КДД-полюсов.

Существуют ли в двумерной квантовой теории поля (КТП) модели, приводящие к таким S -матрицам? Большинство из нелинейных классических уравнений поля имеет КТП-версию. Проблема факторизации квантовых S -матриц в таких моделях (которая тесно связана с проблемой “выживания” классических законов сохранения при квантовании) нетривиальна и требует специального изучения в каждом конкретном случае. В этой статье мы рассматриваем три модели с целью показать, каким образом они приводят к факторизованным $O(N)$ -симметричным S -матрицам.

(1) Квантовая модель синус-Гордона, т.е. модель одного скалярного поля $\phi(x)$ с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L}_{SG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m_0^2}{\beta^2} \cos(\beta \phi), \quad (1.1)$$

где m_0 — массовый параметр и β — константа связи.

Хорошо известно, что классическое уравнение синус-Гордона полностью интегрируемо [6]. Структура квантовой теории этой модели также хорошо изучена. Квазиклассическим методом был найден спектр масс в этой модели [13–15]. Этот спектр содержит частицы, переносящие так называемый “топологический заряд”²⁾ — квантовые солитоны и соответствующие антисолитоны — и некоторое число нейтральных частиц (квантовых дублетов), которые могут пониматься как связанные состояния солитон-антисолитонной пары; “элементарная частица” поля ϕ оказывается одним из этих связанных состояний. Установлено, что некоторые из квазиклассических результатов (такие как спектр масс дублетов) являются точными [15].

Другой точный результат был получен Колеманом [16] (см. также [17–19]). Квантовая модель синус-Гордона эквивалентна массивной модели Тирринга, т.е. модели заряженного фермионного поля, плотность лагранжиана которого

$$\mathcal{L}_{MTM} = i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - g/2 (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2, \quad (1.2)$$

если соотношение между константами связи задается формулой

$$g/\pi = 4\pi/\beta^2 - 1. \quad (1.3)$$

²⁾ В модели (1.1) топологический заряд q связан с асимптотическим поведением поля $\phi(x, t)$ при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$q = \beta/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{dx} dx = \beta/2\pi [\phi(\infty) - \phi(-\infty)].$$

При этом фундаментальные фермионы модели (1.2) эквивалентны солитонам модели (1.1).

Имеется значительное количество результатов, говорящих в пользу факторизации S -матрицы в квантовой модели синус-Гордона; они упоминаются в пункте 4.

(2) Квантовое киральное поле на сфере S^{N-1} ($N = 3, 4, \dots$) ($O(N)$ -симметричная нелинейная σ -модель), определяемое следующей плотностью лагранжиана и связями:

$$\mathcal{L}_{GF} = \frac{1}{2g_0} \sum_{i=1}^N (\partial_\mu n_i)^2; \quad \sum_{i=1}^N n_i^2 = 1, \quad (1.4)$$

где g_0 — затравочная константа связи. Эта модель $O(N)$ -симметрична, перенормируема и асимптотически свободна [20, 12]. Считается, что инфракрасная зарядовая сингулярность в этой модели приводит к разрушению голдстоуновского вакуума [22]. Правильный вакуум $O(N)$ -симметричен и невырожден: все частицы модели массивны и образуют $O(N)$ -мультиплеты. Эта ситуация, конечно, имеет место, если N достаточно велико [23, 24], но мы будем предполагать ее справедливость при $N \geq 3$.

В пункте 5 приводятся аргументы в пользу факторизации S -матрицы в модели (1.4). Первое доказательство наличия этого феномена основано на свойствах $1/N$ разложения в этой модели [23, 24]. А именно, в ведущем порядке по $1/N$ устанавливается отсутствие амплитуды рождения $2 \rightarrow 4$ и факторизация амплитуды рассеяния $3 \rightarrow 3$ [25]. Более строгое доказательство факторизации S -матрицы σ -модели вытекает из наличия недавно открытого бесконечного множества квантовых законов сохранения [26, 27]. В пункте 5 мы кратко изложим результаты работы [26].

(3) Модель Гросса-Невью, т.е. модель N -компонентного самоспряженного ферми-поля $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$ ($N \geq 3$) с четырехфермионным взаимодействием

$$\mathcal{L}_{GN} = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i \gamma_\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{g_0}{8} \left[\sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i \psi_i \right]^2, \quad (1.5)$$

где $\bar{\psi}_i = \psi_i \gamma_0$. Подобно упомянутой модели кирального поля, эта модель перенормируема, асимптотически свободна и точно $O(N)$ -симметрична.

Модель (1.5) была изучена Гроссом и Невью в пределе $N \rightarrow \infty$ [28]. Ими было найдено спонтанное нарушение дискретной γ_5 -симметрии (поле $\sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i \psi_i$ приобретает ненулевое вакуумное среднее), приводящее к динамическому возникновению массы. Дашен, Хасслахер и Невью

изучили эту модель в том же самом пределе $N \rightarrow \infty$, используя квазиклассический метод [29]. Они нашли богатый спектр связанных состояний фундаментальных фермионов этой модели и определили их массы.

Аргументы, которые мы используем для доказательства факторизации S -матрицы в модели Гросса–Невью, полностью аналогичны соответствующим аргументам для модели (1.4).

Наша статья построена следующим образом. В пункте 2 рассматриваются общие свойства факторизованного рассеяния, вводятся уравнения факторизации и выясняется их значение. Кроме того, предлагается подходящее алгебраическое представление факторизованной S -матрицы. Пункт 3 содержит общее решение уравнений аналитичности, унитарности и факторизации для S -матриц, имеющих $O(N)$ -изотопическую симметрию. “Минимальные” решения этих уравнений оказываются существенно различными для $N = 2$ и $N \geq 3$. В случае $N = 2$ решение зависит от одного параметра типа константы связи. Как показывается в пункте 4, это решение является точной S -матрицей для квантовых солитонов в модели синус-Гордона. В этом пункте мы также строим полную S -матрицу в модели синус-Гордона, которая включает все связанные состояния (дублеты). Для случая $N \geq 3$ “минимальные” решения в пункте 3 вообще не зависят ни от одного свободного параметра. Они соответствуют асимптотически свободным теориям поля с динамической трансмутацией (возникновением) массы. В пунктах 5 и 6 показывается, что одно из этих решений является S -матрицей модели (1.4), а другое – точной S -матрицей элементарных фермионов в модели (1.5).

2. Факторизованное рассеяние. Общие свойства.

Уравнения факторизации

Рассмотрим теорию двумерного рассеяния и предположим, что затравочная динамическая теория подчинена бесконечному множеству законов сохранения, причем соответствующие сохраняющиеся заряды Q_n , $n = 1, 2, \dots, \infty$, диагональны на одночастичных состояниях:

$$Q_n |p^{(a)}\rangle = \omega_n^{(a)}(p) |p^{(a)}\rangle. \quad (2.1)$$

В (2.1) p обозначает импульс частицы, а индекс (a) характеризует тип частицы (если теория содержит более одного типа частиц). Предположим далее, что собственные значения $\omega_n(p)$ образуют множество независимых функций. На самом деле, все известные системы с бесконечным числом законов сохранения допускают такой подбор зарядов Q_n , что $\omega_n(p)$, говоря упрощенно, будут степенями импульса p . Например, это означает, что для случая модели синус-Гордона эти

собственные значения будут иметь вид

$$\omega_{2n+1}^{(a)}(p) = p^{2n+1}; \quad \omega_{2n}^{(a)}(p) = (p^2 + m_a^2)^{1/2} p^{2n}, \quad (2.2)$$

где m_a — масса частицы (a). Приведенные выше законы сохранения называют “деформацией свободных законов”. В теории, подчиненной законам этого типа, соответствующая теория рассеяния удовлетворяет строгим правилам отбора (впервые указанным Поляковым). А именно:

(i) Пусть $\{m_a\}$ — спектр масс теории. Тогда число частиц с одной и той же массой m_a остается неизменным после столкновения.

(ii) Конечное множество дуимпульсов частиц такое же, как и исходное³⁾.

Сформулированные правила отбора становятся очевидными, если принять во внимание, что

$$\begin{aligned} (a) \quad Q_n |p_1^{(a_1)}, p_2^{(a_2)}, \dots, p_k^{(a_k)}, \text{ in (out)} \rangle = \\ = [\omega_n^{(a_1)}(p_1) + \dots + \omega_n^{(a_k)}(p_k)] |p_1^{(a_1)}, \dots, p_k^{(a_k)}, \text{ in (out)} \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$(b) \quad dQ_n/dt = 0,$$

и, следовательно,

$$\sum_{j \in \text{in}} \omega_n^{(a_j)}(p_j) = \sum_{j \in \text{out}} \omega_n^{(a_j)}(p_j). \quad (2.4)$$

Заметим, что все промежуточные состояния, в которых частицы находятся достаточно далеко друг от друга, также должны удовлетворять обоим правилам отбора (i) и (ii). Это замечание вместе со специальными свойствами двумерной кинематики указывает на то, что, если теория подчинена бесконечному множеству законов сохранения, то многочастичные элементы S -матрицы могут быть выражены через двухчастичные.

Чтобы пояснить этот момент, рассмотрим конфигурационное пространство системы из N частиц. В этом пространстве существует $N!$ несвязанных доменов, где все частицы находятся достаточно далеко друг от друга и можно пренебречь взаимодействием между ними. Пусть $\{x\} = \{x_1, \dots, x_N\}$ — координаты частиц и R — масштаб взаимодействия (последний мы полагаем конечным). Тогда каждый домен

³⁾ Может показаться, что условия (i) и (ii) означают диагональность S -матрицы в импульсном представлении. Это неверно, если теория содержит разные частицы (имеющие разные внутренние квантовые числа, например, частицы и античастицы) одной и той же массы. В этом случае возможен как обмен импульсами между частицами, так и другие недиагональные процессы.

может быть определен последовательностью неравенств

$$x_{P_1} < x_{P_2} < \dots < x_{P_N},$$

где $|x_{P_{i+1}} - x_{P_i}| \gg R$ и P — некоторая перестановка целых чисел $1, 2, \dots, N$. Мы обозначим такой домен через X_P .

Свободное движение частиц в этих доменах может быть описано при помощи волновых функций $\Psi(x_1, \dots, x_N)$; $\{x\} \in X_P$. Правила отбора (i) и (ii) означают теперь, что если рассеивающиеся частицы имеют импульсы $p_1 > p_2 > \dots > p_N$, то волновая функция в каждом домене является суперпозицией волн, причем множество волновых векторов выбирается согласно этим правилам:

$$\begin{aligned} \Psi_P(x_1, \dots, x_N) = \\ = \sum_{P'} C(P, P') \exp\{i p_{P_1} x_{P'_1} + \dots + i p_{P_N} x_{P'_N}\}; \quad \{x\} \in X_P. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь суммирование ведется по всем перестановкам P' из чисел p_1, \dots, p_N , допускаемым правилами (i) и (ii). В (2.5) также подразумевается симметризация (антисимметризация) координат тождественных частиц. Коэффициенты $C(P, P')$ являются функциями доменов X_P и перестановок P' . В частности, коэффициент $C(P, I)$ описывает падающую волну в домене X_P ; чтобы получить волновую функцию рассеяния, надо положить $C(P, I) = 0$, если $P \neq I$ и $C(I, I) = 1$ (здесь I — тождественное преобразование). Коэффициенты $C(P, \tilde{I})$ (\tilde{I} — обратное преобразование: $\tilde{I}(1, 2, \dots, N) = (N, N-1, \dots, 1)$) описывают выходящие волны этих доменов и, таким образом, являются элементами N -частичной S -матрицы. Например, в случае двух частиц с одинаковой массой волновая функция принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi_{x_1 \ll x_2}(x_1, x_2) &= e^{ip_1 x_1} e^{ip_2 x_2} + S_R(p_1, p_2) e^{ip_2 x_1} e^{ip_1 x_2}, \\ \Psi_{x_1 \gg x_2}(x_1, x_2) &= S_T(p_1, p_2) e^{ip_1 x_1} e^{ip_2 x_2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В уравнении (2.6) S_R и S_T — элементы двухчастичной S -матрицы, соответствующие отражению и рассеянию вперед.

Удобно представлять ситуацию как рассеяние N -мерной плоской волны на системе полупрозрачных гиперплоскостей $x_i = x_j$ (для любых i и j). Вдали от этих гиперплоскостей волна описывается при помощи (2.5); вблизи них движение будет более сложным из-за взаимодействия между частицами. Более того, если рассматривается релятивистская задача, то динамика в области взаимодействия частиц не может быть выражена в терминах волновых функций конечного числа переменных (поскольку возможно рождение виртуальных пар). Определение коэффициентов $C(P, P')$ в (2.5) требует экстраполяции волновой функции из одного домена свободного движения частиц в другие через границы между ними, где частицы находятся во взаимодействии. Решение проблемы взаимодействующих частиц вообще

является очень сложной задачей. Заметим, однако, что экстраполяция волновой функции может пройти через те области границы, где две частицы находятся близко, а другие — сколь угодно далеки от них и друг от друга (т.е. $|x_1 - x_2| \lesssim R$, и $|x_i - x_1| \gg R$, $|x_2 - x_i| \gg R$ и $|x_i - x_j| \gg R$; $i, j = 3, 4, \dots$). Эти области описывают двухчастичные столкновения и условия экстраполяции в них такие же, как и в двухчастичной задаче. Таким образом, в этом случае знание двухчастичных S -матричных элементов дает нам достаточную информацию для определения всех коэффициентов $C(P, P')$ и, следовательно, для получения многочастичной S -матрицы. Оказывается, что матричные элементы N -частичной S -матрицы представляются в виде произведения $N(N-1)/2$ двухчастичных матричных элементов. Относительно такой структуры говорят как о факторизованной S -матрице. Заметим, что возможность существования такой структуры возникает благодаря тому, что в каждом домене X_R волновая функция является суперпозицией конечного числа волн, что, в свою очередь, есть следствие существования бесконечного множества законов сохранения.

Конечно, наши рассуждения, связывающие факторизацию с существованием бесконечного числа законов сохранения, не являются строгим доказательством; полная ясность достигнута в недавней работе [11]. Все рассуждения, приведенные выше, имеют точный смысл в случае одномерной задачи нерелятивистских частиц, взаимодействующих через δ -функциональный потенциал [1-3].

Факторизованная S -матрица соответствует следующей простой картине рассеяния. В бесконечном прошлом частицы с импульсами $p_1 > p_2 > \dots > p_N$ расположены в пространстве в обратном порядке: $x_1 < x_2 < \dots < x_N$. В области взаимодействия частицы последовательно сталкиваются парами; между этими столкновениями они движутся как свободные реальные (не виртуальные) частицы. Множество импульсов частиц остается неизменным при каждом парном столкновении; если частицы имеют разные массы, то возможно только прохождение, столкновение же частиц с одинаковыми массами может дать в результате также отражение. После $N(N-1)/2$ парных столкновений частицы располагаются вдоль оси x в порядке возрастания импульсов. Это соответствует конечному состоянию рассеяния — разлетающимся частицам.

Пространственно-временная картина многочастичного факторизованного рассеяния может быть представлена пространственной диаграммой; один пример показан на рис. 1. Каждая прямая линия на диаграмме соответствует некоторому значению импульса, явно связанному с наклоном прямой (на этой диаграмме время предполагается текущим вверх). Двухчастичные столкновения представлены здесь точками, в которых прямые пересекаются друг с другом; каждому пересечению соответствуют двухчастичные амплитуды

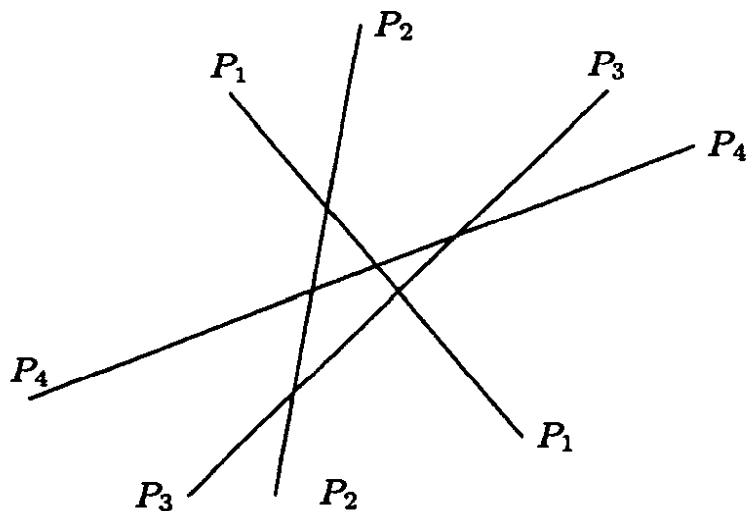


Рис. 1. Пространственно-временная картина, иллюстрирующая многочастичное факторизованное рассеяние

рассеяния. Элемент полной многочастичной S -матрицы изображенного на диаграмме процесса задается суммой произведений всех $N(N-1)/2$ двухчастичных амплитуд, соответствующих каждой вершине. Указанное суммирование производится по всем типам частиц, протекающих через внутренние линии диаграммы и приводящих к заданному конечному состоянию.

Необходимо отметить, что один и тот же процесс рассеяния может быть представлен при помощи нескольких различных диаграмм, в

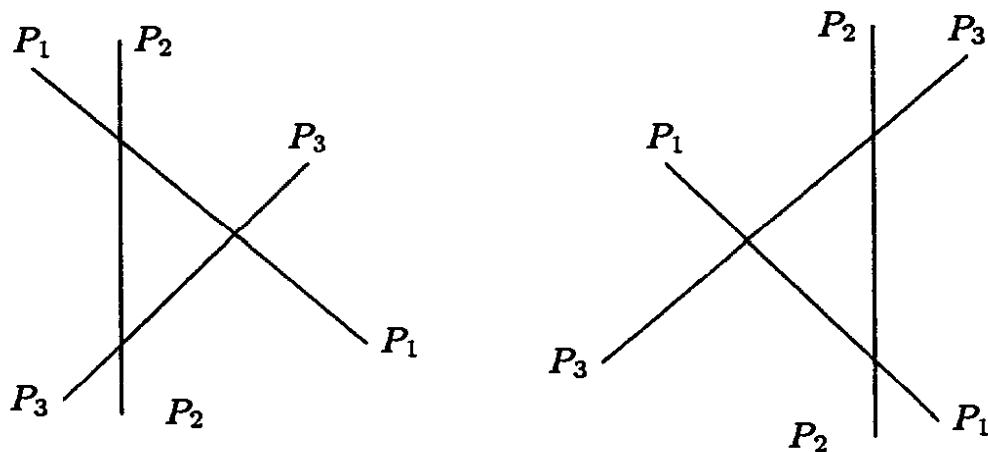


Рис. 2. Два возможных способа трехчастичного рассеяния

которых некоторые линии параллельно перенесены (как на рис. 2, а и рис. 2, б). Амплитуды этих диаграмм не должны складываться в многочастичный элемент S -матрицы. В терминах волновой функции в секторах X_P амплитуды, изображенные на рис. 2, а и рис. 2, б, соответствуют различным полуфронтам одной и той же уходящей волны. Они оба должны иметь одни и те же амплитуды и фазы (вследствие (i) и (ii)), т.е. быть когерентными. В результате этого требования двух-

частичные матричные элементы удовлетворяют специальным кубическим уравнениям, которые являются необходимыми условиями факторизации. В дальнейшем эти уравнения играют ключевую роль. Мы будем называть их уравнениями факторизации⁴).

В этой статье рассматриваются главным образом релятивистские рассеяния. Поэтому полезно ввести следующие обозначения. Мы будем использовать быстроты θ_a вместо импульсов p_a частиц (с массой m_a):

$$p_a^0 = m_a \operatorname{ch} \theta_a; \quad p_a^1 = m_a \operatorname{sh} \theta_a. \quad (2.7)$$

Тогда двухчастичные амплитуды $S(p_a, p_b)$ становятся функциями от разности быстрот сталкивающихся частиц $\theta_{ab} = \theta_a - \theta_b$, которая непосредственно связана с s -канальным инвариантом $s_{ab} = (p_a^\mu + p_b^\mu)^2$,

$$s_{ab} = m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \operatorname{ch} \theta_{ab} \quad (2.8)$$

(m_a и m_b — массы частиц).

Двухчастичные амплитуды $S(s)$ являются аналитическими функциями в комплексной s -плоскости с двумя разрезами вдоль действи-

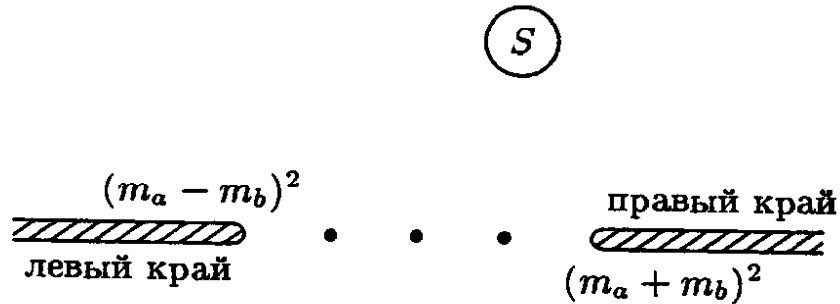
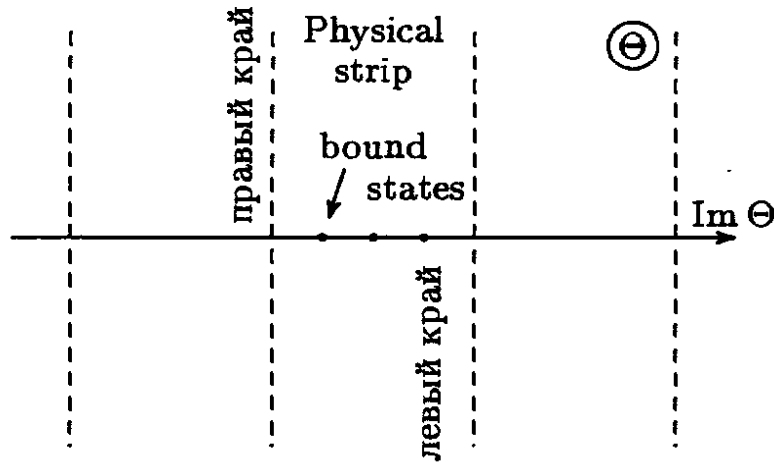


Рис. 3. Аналитическая структура двухчастичных амплитуд на физическом листе s -плоскости

тельной оси: $s \leq (m_a - m_b)^2$ и $s \geq (m_a + m_b)^2$ (см. рис. 3). Точки $s = (m_a - m_b)^2$ и $s = (m_a + m_b)^2$, будучи двухчастичными порогами рождения, являются квадратнокорневыми точками ветвления функции $S(s)$. В случае факторизованного рассеяния имеется только двухчастичная унитарность, поэтому естественно предположить, что функции $S(s)$ не имеют других точек ветвления. Если это предположение выполняется, то функция $S(\theta)$ является мероморфной. Отображение (2.8) преобразует физический лист s -плоскости в полосу $0 < \operatorname{Im} \theta < \pi$ (в случаях, когда не возникает недоразумений, мы будем опускать нижние индексы: $\theta \equiv \theta_{ab}$) в θ -плоскости, при этом края правого и левого разрезов физического листа отобразятся на оси $\operatorname{Im} \theta = 0$ и $\operatorname{Im} \theta = \pi$ соответственно (см. рис. 4). Оси $\operatorname{Im} \theta = l\pi$,

⁴) Уравнения факторизации и их физический смысл в задаче для нерелятивистских частиц, взаимодействующих через δ -функциональный потенциал, рассмотрены в работе [2]; в случае модели синус-Гордона эти вопросы изучались в работах [30, 31] и применялись в работе [12].


 Рис. 4. Структура θ -плоскости

$l = -1, \pm 2, \dots$, соответствуют краям разрезов других листов комплексной s -плоскости.

Функции $S(\theta)$ являются вещественными на мнимой оси θ -плоскости (вещественно аналитическими). В частности, при $\text{Im } \theta = 0$ выполняется соотношение $S(-\theta) = S^*(\theta)$. Преобразование кроссинг-симметрии

$$s \rightarrow 2m_a^2 + 2m_b^2 - s$$

соответствует в терминах переменной θ подстановке $\theta \rightarrow i\pi - \theta$.

В нерелятивистском пределе $p_a^1 \ll m_a$ скорости могут быть заменены нерелятивистскими скоростями

$$\theta_a \rightarrow v_a = p_a/m_a.$$

Все последующие выражения (кроме относящихся к соотношениям кроссинг-симметрии) могут применяться и в случае нерелятивистских S -матриц после замены $\theta_a \rightarrow v_a$, $\theta_b \rightarrow v_b$, $\theta_{ab} \rightarrow v_a - v_b$.

Общую структуру S -матрицы удобно описывать при помощи специальной алгебраической конструкции [30, 25]. Рассмотрим теорию факторизованного рассеяния, содержащую несколько типов частиц (A, B, C и т.д.; частицы одного и того же типа предполагаются тождественными; в этих рассуждениях статистика не важна). В нашей конструкции эти частицы представляются в виде некоммутативных символов $A(\theta), B(\theta), C(\theta), \dots$, где переменная θ есть скорость соответствующей частицы. Эти символы часто называют частицами.

Теория рассеяния формулируется следующим образом. Отождествим асимптотическое состояние в теории рассеяния с произведением всех частиц этого состояния. Порядок символов в таком произведении соответствует порядку расположения частиц вдоль пространственной оси x : in-состояния должны отождествляться с произведениями, размещенными в порядке убывания скоростей частиц, в то время как out-состояния — с произведениями, размещенными

ми в порядке возрастания быстрот частиц. Например, in-состояние трех частиц A , A и B , имеющих быстроты θ_1 , θ_2 и θ_3 соответственно ($\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$), приобретает вид $A(\theta_1) A(\theta_2) B(\theta_3)$.

В любом произведении можно изменить порядок сомножителей путем нескольких последовательных перестановок соседних частиц (для умножения символов предполагается ассоциативность). Каждая перестановка соответствует двухчастичному столкновению; это приводит к правилам коммутирования для символов $A(\theta)$, $B(\theta)$, ... Например, если частицы A и B имеют разную массу, то мы можем записать

$$A(\theta_1) B(\theta_2) = S_T^{AB}(\theta_{12}) B(\theta_2) A(\theta_1), \quad (2.9)$$

где $S_T^{AB}(\theta_{12})$ — амплитуда прохождения для реакции $AB \rightarrow AB$ (напомним, что в случае различных масс отражение запрещается условием (ii)). Если рассматриваются частицы разного типа (скажем, A и C), но с одинаковыми массами, то отражение допустимо, поэтому мы пишем:

$$A(\theta_1) C(\theta_2) = S_T^{AC}(\theta_{12}) C(\theta_2) A(\theta_1) + S_R^{AC}(\theta_{12}) A(\theta_2) C(\theta_1). \quad (2.10)$$

Отражение и прохождение неразличимы в случае тождественных частиц, таким образом

$$A(\theta_1) A(\theta_2) = S^{AA}(\theta_{12}) A(\theta_2) A(\theta_1) \quad (2.11)$$

Как было замечено выше (см. сноску на с. 116), если имеются различные частицы с одной и той же массой, то одни из них в процессе двухчастичного рассеяния могут превратиться в другие. Это означает, что в двухчастичном рассеянии открыты дополнительные каналы, и, следовательно, мы должны добавить соответствующие члены к правым частям уравнений (2.9), (2.10) и (2.11). Здесь мы не будем обсуждать этот вопрос. Несколько примеров такой ситуации приведены в следующем пункте.

Совместность коммутационных соотношений типа (2.9), (2.10), (2.11) в вычислениях с символами $A(\theta)$, $B(\theta)$ и т.д. и их ассоциативность требуют выполнения некоторых уравнений для двухчастичных амплитуд. Это — уравнения двух типов. Равенства первого типа возникают когда производят прямую, а затем обратную к ней перестановку символов и требуют, чтобы результат был равен исходной комбинации. Эти равенства совпадают с двухчастичными соотношениями унитарности. Многочастичные in-состояния могут быть переведены в out-состояния многими возможными последовательностями попарных перестановок, но результат при этом будет одним и тем же. Это приводит к равенствам второго типа. Ясно, что достаточно рассмотреть только трехчастичные состояния и потребовать совпадения результатов для двух допустимых последовательностей перестановок. Так мы получим все требуемые уравнения, которые, конечно, совпадают

с условиями тождественности треугольных диаграмм (см. рис. 2, а, б) и, таким образом, являются уравнениями факторизации.

Если удовлетворяются равенства обоих типов, то коммутационные соотношения позволяют однозначно перегруппировывать любые in-состояния в суперпозицию out-состояний и затем представлять этот процесс в виде факторизованной S -матрицы. Ее унитарность очевидна. Матрица S^{-1} получается в результате “переделки” out-состояний в in-состояния и отличается от S -матрицы знаком аргументов всех двухчастичных амплитуд: $\theta_{ab} \rightarrow -\theta_{ab}$. Это изменение знака приводит к комплексному сопряжению двухчастичных матричных элементов. Принимая во внимание симметрию S -матрицы, мы получаем: $S^+ = S^{-1}$.

3. Релятивистские S -матрицы с $O(N)$ -изосимметрией. Общее решение

Следуя общим рассуждениям предыдущего пункта, мы изучим теперь класс релятивистских факторизованных S -матриц, характеризующихся изотопической $O(N)$ -симметрией. Чтобы ввести $O(N)$ -симметрию, мы предположим существование изовекторного N -плета частиц A_i , $i = 1, 2, \dots, N$, с равными массами m и потребуем $O(N)$ -симметрию для двухчастичного рассеяния (благодаря факторизации, это гарантирует $O(N)$ -симметрию полной S -матрицы). А именно, мы предположим, что двухчастичная S -матрица имеет вид

$$\begin{aligned} {}_{ik}S_{jl} &= \langle A_j(p'_1) A_l(p'_2), \text{out} | A_i(p_1) A_k(p_2), \text{in} \rangle = \\ &= \delta(p_1 - p'_1) \delta(p_2 - p'_2) [\delta_{ik} \delta_{jl} S_1(s) + \delta_{ij} \delta_{kl} S_2(s) + \delta_{il} \delta_{jk} S_3(s)] \pm \\ &\quad \pm (i \leftrightarrow k, p_1 \leftrightarrow p_2), \quad (3.1) \end{aligned}$$

где $s = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2$ и $+$ ($-$) относится к бозонам (фермионам). Функции $S_2(s)$ и $S_3(s)$ являются амплитудами прохождения и отражения, соответственно, в то время как $S_1(s)$ описывает процессы типа “аннигиляции”:

$$A_i + A_i \rightarrow A_j + A_j \quad (i \neq j).$$

S -матрица (3.1) обладает кроссинг-симметрией, если амплитуды $S(s)$ удовлетворяют уравнениям

$$S_2(s) = S_2(4m^2 - s) \quad \text{и} \quad S_1(s) = S_3(4m^2 - s).$$

После введения переменных быстроты (2.7), (2.8) мы имеем дело с мероморфными функциями $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$ и $S_3(\theta)$, где $s = 4m^2 \text{ch}^2(\theta/2)$, а соотношения кроссинг-симметрии приобретают вид

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad (3.2a)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta), \quad (3.2b)$$

Теперь, чтобы описать полную факторизованную S -матрицу, введем, следуя общему методу пункта 2, символы $A_i(\theta)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Коммутационными соотношениями, соответствующими (3.1), будут

$$A_i(\theta_1) A_j(\theta_2) = \delta_{ij} S_1(\theta_{12}) \sum_{k=1}^N A_k(\theta_2) A_k(\theta_1) + \\ + S_2(\theta_{12}) A_j(\theta_2) A_i(\theta_1) + S_3(\theta_{12}) A_i(\theta_2) A_j(\theta_1). \quad (3.3)$$

Условия унитарности для двухчастичной S -матрицы (3.1)

$$S_2(\theta) S_2(-\theta) + S_3(\theta) S_3(-\theta) = 1, \quad (3.4a)$$

$$S_2(\theta) S_3(-\theta) + S_2(-\theta) S_3(\theta) = 0, \quad (3.4b)$$

$$N S_1(\theta) S_1(-\theta) + S_1(\theta) S_2(-\theta) + S_1(\theta) S_3(-\theta) + \\ + S_2(\theta) S_1(-\theta) + S_3(\theta) S_1(-\theta) = 0 \quad (3.4c)$$

получаются непосредственно.

Очевидно, что уравнений (3.2) и (3.4) не достаточно для определения функций $S(\theta)$. Дальнейшие ограничения возникают из уравнений факторизации (см. пункт 2). Чтобы получить уравнения факторизации, мы рассматриваем всевозможные трехчастичные in-произведения $A_i(\theta_1) A_j(\theta_2) A_k(\theta_3)$, переставляем их, чтобы получить out-произведения при помощи (3.3) и затем требуем, чтобы результаты, полученные двумя возможными последовательностями двухчастичных перестановок, совпадали. Возникающие уравнения, очевидно, различны для случаев $N = 2$ и $N \geq 3$ (при $N = 2$ существует меньшее число трехчастичных произведений). Поэтому удобно зафиксировать различие между этими двумя случаями. Для случая $N \geq 3$ мы переобозначим амплитуды S_1 , S_2 и S_3 через σ_1 , σ_2 и σ_3 , соответственно, сохраняя исходное обозначение для случая $N = 2$.

Уравнения факторизации имеют вид (они выводятся непосредственно, но несколько громоздко)

$$S_2 S_1 S_3 + S_2 S_3 S_3 + S_3 S_3 S_2 = S_3 S_2 S_3 + S_1 S_2 S_3 + S_1 S_1 S_2, \quad (3.5a)$$

$$S_3 S_1 S_3 + S_3 S_2 S_3 = S_3 S_3 S_1 + S_3 S_3 S_2 + S_2 S_3 S_1 + \\ + S_2 S_3 S_3 + 2 S_1 S_3 S_1 + S_1 S_3 S_2 + S_1 S_3 S_3 + S_1 S_2 S_1 + S_1 S_1 S_1 \quad (3.5b)$$

для $N = 2$ и

$$\sigma_2 \sigma_3 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_3 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3, \quad (3.6a)$$

$$\sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 + \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2, \quad (3.6b)$$

$$N \sigma_1 \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 + \\ + \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_3 \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 = \sigma_3 \sigma_1 \sigma_3 \quad (3.6c)$$

для $N \geq 3$. Имеется в виду, что в каждом слагаемом в (3.5) и (3.6) первым, вторым и третьим аргументами функции S (σ в (3.6)) являются θ , $\theta + \theta'$ и θ' , соответственно.

Оказывается, что уравнения факторизации накладывают достаточно жесткие ограничения. Они позволяют выразить явно все амплитуды через одну функцию.

Общие решения для обеих систем (3.5) и (3.6), удовлетворяющие условию вещественной аналитичности (все амплитуды вещественны, если θ — чисто мнимое число), получены в приложении А. Для системы (3.5) (т.е. для $N = 2$) этим решением будут

$$S_3(\theta) = i \operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi\delta}{\gamma}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right) S_2(\theta), \quad (3.7a)$$

$$S_1(\theta) = i \operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi\delta}{\gamma}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{4\pi(i\delta - \theta)}{\gamma}\right) S_2(\theta) \quad (3.7b)$$

с произвольными вещественными γ и δ . Общее решение системы (3.6) содержит только один свободный параметр λ и имеет вид

$$\sigma_3(\theta) = -\frac{i\lambda}{\theta} \sigma_2(\theta), \quad (3.8a)$$

$$\sigma_1(\theta) = -\frac{i\lambda}{i[(N-2)/2]\lambda - \theta} \sigma_2(\theta). \quad (3.8b)$$

Ограничения на амплитуды $S_2(\theta)$ и $\sigma_2(\theta)$ возникают из условий унитарности (3.4). Решения (3.7) и (3.8) тождественно удовлетворяют уравнениям (3.4b) и (3.4c), в то время как уравнение (3.4a) дает соотношение

$$S_2(\theta) S_2(-\theta) = \frac{\sin^2\left(\frac{4\pi\delta}{\gamma}\right) \operatorname{sh}^2\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right)}{\sin^2\left(\frac{4\pi\delta}{\gamma}\right) \operatorname{sh}^2\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi\delta}{\gamma}\right) \operatorname{ch}^2\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right)} \quad (3.9)$$

для $N = 2$ и

$$\sigma_2(\theta) \sigma_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2} \quad (3.10)$$

для $N \geq 3$.

До сих пор мы преднамеренно избегали использования соотношений кроссинг-симметрии (3.2). Хотя предыдущие рассуждения относятся к релятивистскому случаю, условия унитарности (3.4) и уравнения факторизации (3.5), (3.6) становятся справедливыми также для любых нерелятивистских $O(N)$ -симметричных факторизованных S -матриц после подстановки

$$\theta \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{k_1 - k_2}{m}, \quad (3.11)$$

где k_1 и k_2 — импульсы сталкивающихся частиц. Таким образом, общие решения (3.7), (3.9) и (3.8), (3.11) остаются справедливыми (после подстановки (3.11)) и в нерелятивистском случае. Это обстоятельство используется в конце пункта 4.

Уравнения (3.2) — сугубо релятивистские. Оказывается, они накладывают ограничения на свободные параметры в (3.7) и (3.8). Легко увидеть, что (3.2) выполняется лишь тогда, когда в (3.7) и (3.9)

$$\delta = \pi \quad (3.12)$$

и

$$\lambda = \frac{2\pi}{N-2} \quad (3.13)$$

в (3.8), (3.10). Таким образом, формулы для $N \geq 3$ на самом деле не содержат свободных параметров. Это обстоятельство окажется важным в пункте 5.

Уравнение (3.2а) (которое без сомнения справедливо для $\sigma_2(\theta)$, также как и для $S_2(\theta)$) вместе с (3.9) и (3.10) будет использовано для нахождения $S_2(\theta)$ и $\sigma_2(\theta)$. В обоих случаях $N = 2$ и $N \geq 3$ решение допускает лишь КДД-неоднозначность [32]: любое решение может быть получено путем умножения некоторого “минимального” решения на мероморфную функцию вида

$$f(\theta) = \prod_{k=1}^L \frac{\operatorname{sh} \theta + i \sin \alpha_k}{\operatorname{sh} \theta - i \sin \alpha_k}, \quad (3.14)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L$ — произвольные вещественные⁵⁾ числа. Именно “минимальные” решения, т.е. решения, имеющие минимальное число сингулярностей в θ -плоскости, будут для нас далее наиболее интересными. Для $N = 2$ такое решение представляется в виде

$$S_2(\theta) = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{4\pi^2}{\gamma}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right) \operatorname{sh}\left[\frac{4\pi(i\pi - \theta)}{\gamma}\right] U(\theta), \quad (3.15)$$

где

$$U(\theta) = \Gamma\left(\frac{8\pi}{\gamma}\right) \Gamma\left(1 + i \frac{8\theta}{\gamma}\right) \Gamma\left(1 - \frac{8\pi}{\gamma} - i \frac{8\theta}{\gamma}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(\theta) R_n(i\pi - \theta)}{R_n(0) R_n(i\pi)}, \quad (3.16)$$

$$R_n(\theta) = \frac{\Gamma(2n \frac{8\pi}{\gamma} + i \frac{8\theta}{\gamma}) \Gamma(1 + 2n \frac{8\pi}{\gamma} + i \frac{8\theta}{\gamma})}{\Gamma((2n+1) \frac{8\pi}{\gamma} + i \frac{8\theta}{\gamma}) \Gamma(1 + (2n-1) \frac{8\pi}{\gamma} + i \frac{8\theta}{\gamma})}.$$

В случае $N \geq 3$ существует, вообще говоря, два различных “минимальных” решения (исключительные случаи — это $N = 3$ и $N = 4$, когда эти два решения совпадают). Мы обозначим эти решения через

⁵⁾ Мы рассматриваем решения, имеющие сингулярности лишь на мнимой оси переменной θ , т.е. решения, содержащие лишь связанные и виртуальные состояния.

$\sigma_2^{(+)}(\theta)$ и $\sigma_2^{(-)}(\theta)$. Они могут быть записаны в виде

$$\sigma_2^{(\pm)}(\theta) = Q^{(\pm)}(\theta) q^{(\pm)}(i\pi - \theta), \quad (3.17)$$

где

$$Q^{(\pm)}(\theta) = \frac{\Gamma(\pm \frac{\lambda}{2\pi} - i \frac{\theta}{2\pi}) \Gamma(\frac{1}{2} - i \frac{\theta}{2\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} \pm \frac{\lambda}{2\pi} - i \frac{\theta}{2\pi}) \Gamma(-i \frac{\theta}{2\pi})}. \quad (3.18)$$

Разность между этими решениями является выражением КДД-типа (3.14):

$$\sigma_2^{(-)}(\theta) = \frac{\operatorname{sh} \theta + i \sin \lambda}{\operatorname{sh} \theta - i \sin \lambda} \sigma_2^{(+)}(\theta). \quad (3.19)$$

В следующем пункте мы укажем соотношение между решениями (3.15) и (3.17), а также некоторыми двумерными моделями квантовой теории поля. А именно, мы покажем, что решение (3.15) вместе с формулами (3.7a), (3.7b) является точной S -матрицей квантованных солитонов в модели синус-Гордона, в то время как решения $\sigma_2^{(+)}(\theta)$ и $\sigma_2^{(-)}(\theta)$ для $N \geq 3$ дают точные S -матрицы для квантованного кирального поля (1.4) и для “фундаментальных” фермионов модели Гросса-Невью (1.5), соответственно.

4. Точная S -матрица в квантованной модели синус-Гордона

Квантованная модель синус-Гордона (1.1) является наиболее известным примером релятивистской квантовой теории поля, приводящей к факторизованному рассеянию. Имеется множество результатов, подтверждающих факторизацию S -матрицы в модели синус-Гордона. Полная интегрируемость классического уравнения синус-Гордона [6] означает существование бесконечного числа законов сохранения в классической теории, которые являются “деформацией свободных законов сохранения”. Аналогичное множество законов сохранения имеется также в “классической” массивной модели Тирринга (которая соответствует “древесному” приближению для лагранжиана (1.2) [33, 34]). Важная проблема законов сохранения в квантовой теории изучалась в работе [34], где было показано, что эти законы “выживают” при квантовании в рамках теории возмущений (во всех порядках теории возмущений). Отсутствие множественного рождения частиц и факторизация многочастичной квантовой S -матрицы, что есть следствие законов сохранения, ранее было продемонстрировано при помощи прямых вычислений в теории возмущений для модели синус-Гордона Арефьевой и Корепиным [8]⁶). Этот же резуль-

⁶) Кроме этого в [8] были предложены явные выражения для факторизованной S -матрицы “элементарных” частиц в модели синус-Гордона (см. также [9, 10]).

тат может быть получен в рамках теории возмущений в массивной модели Тирринга, т.е. для рассеяния солитонов [35, 36]. Относительно факторизации солитонной S -матрицы имеются также аргументы в квазиклассическом приближении [14]. Мы используем здесь упомянутые (перечисленные) выше результаты и рассматриваем полную S -матрицу в модели синус-Гордона как факторизованную.

Связанные состояния квантовых солитонов (квантовые дублеты) и солитонное рассеяние изучались в квазиклассическом приближении в работах [13–15, 37, 38]. Мы выписываем здесь необходимые нам ниже некоторые квазиклассические формулы.

Двухчастичная амплитуда рассеяния $S(\theta)$ для солитонов одного знака и амплитуда прохождения $S_T(\theta)$ для солитон-антисолитонного рассеяния, вычисленные в главном квазиклассическом приближении, имеют вид [13, 14, 37]

$$S_T^{(\text{sem})}(\theta) = S^{(\text{sem})}(\theta) \exp\left\{i \frac{8\pi}{\beta^2}\right\},$$

$$S^{(\text{sem})}(\theta) = \exp\left\{\frac{8}{\beta^2} \int_0^\pi \log\left[\frac{e^{\theta-i\eta} + 1}{e^\theta + e^{-i\eta}}\right] d\eta\right\} \quad (4.1)$$

(параметр β был введен в (1.1)). Это легко связывается с параметрами классического солитонного рассеяния. Вычисление однопетлевых поправок приводит к замене $\beta^2 \rightarrow \gamma'$ в (4.1) (см. [46]), где ⁷⁾

$$\gamma' = \beta^2 \left[1 - \frac{\beta^2}{8\pi}\right]^{-1}.$$

Квазиклассическая солитон-антисолитонная амплитуда отражения (которая вычисляется при помощи классической траектории в мнимом времени, см. [38]) имеет вид

$$S_R^{(\text{sem})}(\theta) = i \sin\left(\frac{8\pi^2}{\gamma'}\right) \exp\left(-\frac{8\pi}{\gamma'} |\theta|\right) S_T^{(\text{sem})}(\theta) \quad (4.2)$$

Вывод квазиклассического спектра масс квантовых дублетов был сделан в работах [13–15]. С точностью до первых двух шагов в квази-

⁷⁾ Сингулярность в теории синус-Гордона при $\beta^2 = 8\pi$ обсуждалась Колеманом [16]. Как было показано в [16], гамильтониан в этой теории становится неограниченным снизу при $\beta^2 \geq 8\pi$, если используется стандартная техника перенормировки. Это явление имеет ультрафиолетовую природу. Едва ли это означает крах теории при $\beta^2 \geq 8\pi$, скорее указывает на недостаток свойства сверхперенормируемости и указывает на то, что необходимо другое правило перенормировки при $\beta^2 \geq 8\pi$. На протяжении этой статьи мы ограничиваем наши рассуждения случаем $\beta^2 < 8\pi$.

классическом приближении этот спектр задается формулой

$$m_n^{(\text{sem})} = 2m \sin\left(\frac{n\gamma'}{16}\right), \quad n = 1, 2, \dots < \frac{8\pi}{\gamma'}, \quad (4.3)$$

где m — солитонная масса. Авторы работы [15] привели некоторые аргументы в пользу того, что формула (4.3) является не квазиклассической, а точной. Независимая поддержка этой гипотезы была сделана в работах [10, 39, 40]. Точное решение для S -матрицы, полученное в этом пункте, также подтверждает точность спектра (4.3).

Начнем построение квантовой S -матрицы в модели синус-Гордона с указания на то, что модель обладает $O(2)$ -изотопической симметрией. В терминах массивного поля Тирринга ψ эта симметрия вполне очевидна; она соответствует фазовой инвариантности

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$$

в (1.2). С точки зрения лагранжиана синус-Гордона $O(2)$ -симметрия имеет более сложную природу: она является вращательной симметрией параметра беспорядка (см. [41] относительно концепции параметра беспорядка). Детальное изучение такого подхода находится за пределами интересов настоящей статьи. Для наших целей достаточно лишь заметить, что солитон и антисолитон в модели (1.1) могут быть объединены в изовекторный $O(2)$ -дублет. Следуя соглашению пункта 3, мы обозначаем вещественные компоненты этого дублета символом $A_i(\theta)$, $i = 1, 2$. Тогда сами солитон и антисолитон представляются следующими комбинациями:

$$A(\theta) = A_1(\theta) + i A_2(\theta); \quad \bar{A}(\theta) = A_1(\theta) - i A_2(\theta). \quad (4.4)$$

В терминах частиц $A(\theta)$ и $\bar{A}(\theta)$ коммутационные правила (3.3) принимают вид

$$\begin{aligned} A(\theta_1) \bar{A}(\theta_2) &= S_T(\theta_{12}) \bar{A}(\theta_2) A(\theta_1) + S_R(\theta_{12}) A(\theta_2) \bar{A}(\theta_1), \\ A(\theta_1) A(\theta_2) &= S(\theta_{12}) A(\theta_2) A(\theta_1), \\ \bar{A}(\theta_1) \bar{A}(\theta_2) &= S(\theta_{12}) \bar{A}(\theta_2) \bar{A}(\theta_1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

В (4.5) $S_T(\theta)$ и $S_R(\theta)$ являются амплитудами прохождения и отражения для солитон-антисолитонного рассеяния, в то время как $S(\theta)$ является амплитудой рассеяния для тождественных солитонов. Они просто связаны с амплитудами $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$ и $S_3(\theta)$ из (3.3)

$$\begin{aligned} S(\theta) &= S_3(\theta) + S_2(\theta), \\ S_T(\theta) &= S_1(\theta) + S_2(\theta), \\ S_R(\theta) &= S_1(\theta) + S_3(\theta). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из (3.2) видно, что

$$S(\theta) = S_T(i\pi - \theta); \quad S_R(\theta) = S_R(i\pi - \theta). \quad (4.7)$$

Факторизация и $O(2)$ -симметрия солитонной S -матрицы в модели синус-Гордона позволяют нам применить немедленно результаты предыдущего пункта. Из (3.7a), (3.7b), (3.12) и (3.15) следует, что

$$S_T(\theta) = -i \frac{\text{sh}(\frac{8\pi}{\gamma} \theta)}{\sin(\frac{8\pi^2}{\gamma})} S_R(\theta), \quad (4.8a)$$

$$S(\theta) = -i \frac{\text{sh}(\frac{8\pi}{\gamma} (i\pi - \theta))}{\sin(\frac{8\pi^2}{\gamma})} S_R(\theta), \quad (4.8b)$$

где (с точностью лишь до КДД-неоднозначностей (3.14))

$$S_R(\theta) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{8\pi^2}{\gamma}\right) U(\theta) \quad (4.9)$$

и $U(\theta)$ задается при помощи (3.16).

Расположение нулей и полюсов функций $S_T(\theta)$ и $S_R(\theta)$ из (4.8) и (4.9) показано на рис. 5. Заметим, что полюса функции $S_T(\theta)$

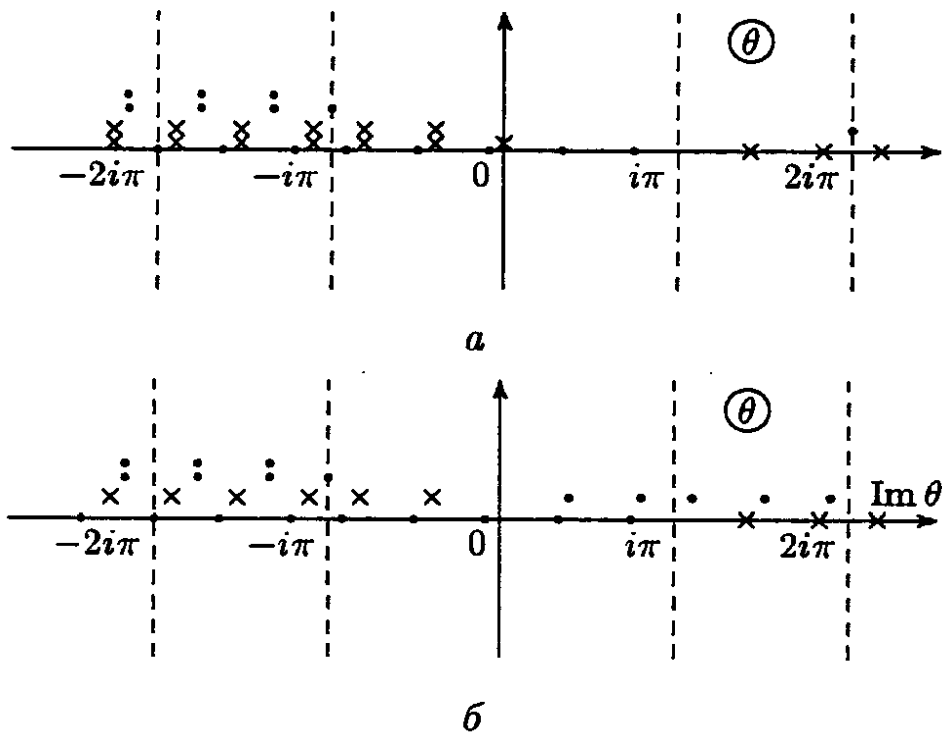


Рис. 5. Солитон-антисолитонная амплитуда рассеяния. Расположение полюсов (точки) и нулей (крестики) в θ -плоскости. (а) Амплитуда прохождения $S_T(\theta)$. (б) Амплитуда отражения $S_R(\theta)$. Некоторые из точек и крестиков для ясности смещены с мнимой оси; на самом деле все сингулярности находятся при $\text{Re } \theta = 0$

расположены эквидистантно (с интервалами $\gamma/8$) в физической полосе $0 < \text{Im } \theta < \pi$. Эти точки находятся в согласии с квазиклассическим спектром масс (4.3). Соответствие является точным, если

$$\gamma = \gamma'. \quad (4.10)$$

Таким образом, полный спектр связанных состояний (4.3) уже содержится в “минимальном” решении (4.9), (3.16), при этом КДД-полюса отсутствуют. Это решение автоматически удовлетворяет также другому необходимому требованию для точной S -матрицы в теории синус-Гордона. Если $\gamma = 8\pi$ ($\beta^2 = 4\pi$), то в массивной модели Тирринга взаимодействие исчезает и S -матрица должна совпасть с единицей. В самом деле, когда $\gamma = 8\pi$, из (4.8), (4.9) и (3.16) имеем

$$S_T(\theta) \equiv S(\theta) \equiv 1, \quad S_R(\theta) \equiv 0.$$

Уже эти два замечательных свойства “минимального” решения (вместе с его очевидно эстетическим видом) могут стать причиной выбора этого решения в качестве точной S -матрицы квантованных синус-Гордон-солитонов. Ниже мы приводим ряд проверок, которые подтверждают правильность такого выбора.

Если $\gamma \rightarrow 8\pi$, то формулы (4.8), (4.9) и (3.16) могут быть разложены по степеням $2g/\pi = 8\pi/\gamma - 1$ и коэффициенты разложения можно сравнить с результатами диаграммного исчисления в массивной модели Тирринга (1.2). Такое сравнение с точностью до g^3 было проведено в работе [42], при этом было обнаружено требуемое совпадение.

Другая проверка состоит в сравнении с полуклассическими формулами (4.1), (4.2). Полуклассический предел для лагранжиана (1.1) соответствует $\beta^2 \rightarrow 0$. При фиксированном θ и $\beta^2 \rightarrow 0$ точное решение (4.8a) переходит в полуклассическое решение (4.2). Более того, можно легко проверить, что асимптотики точных амплитуд $S(\theta)$ и $S_T(\theta)$ при $\gamma \rightarrow 0$ совпадают с (4.1). Чтобы сделать это, представим точную амплитуду $S_T(\theta)$ из (4.8a), (4.9) в виде

$$S_T(\theta) = \prod_{l=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{l\gamma}{16\pi} - i\frac{\theta}{2\pi}) \Gamma(\frac{l-1}{16\pi} \gamma - i\frac{\theta}{2\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{l\gamma}{16\pi} - i\frac{\theta}{2\pi}) \Gamma(-\frac{1}{2} + \frac{l-1}{16\pi} \gamma - i\frac{\theta}{2\pi})} \times \\ \times \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{l\gamma}{16\pi} + i\frac{\theta}{2\pi}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{l-1}{16\pi} \gamma + i\frac{\theta}{2\pi})}{\Gamma(1 + \frac{l\gamma}{16\pi} + i\frac{\theta}{2\pi}) \Gamma(1 + \frac{l-1}{16\pi} \gamma + i\frac{\theta}{2\pi})}. \quad (4.11)$$

Заменяя в (4.11) бесконечное произведение суммой в экспоненте, а затем при $\gamma \rightarrow 0$ суммирование — интегрированием, мы в точности воспроизведем (4.1).

Чем больше параметр связи, тем больше масса каждого связанного состояния (4.3) (измеренная в солитонных массах). n -ое связанное состояние приобретает солитон-антисолитонную массу, когда $\gamma = 8\pi/n$, и при $\gamma \geq 8\pi/n$ оно исчезает из спектра, превращаясь в виртуальное состояние. При $\gamma \geq 8\pi$ все связанные состояния (4.3), включая “элементарные” частицы лагранжиана синус-Гордона (1.1), становятся несвязанными (напомним, что “элементарная” частица — это одно из состояний (4.3), соответствующих $n = 1$ [15, 14]). Таким образом, если $\gamma \geq 8\pi$, то спектр содержит только солитоны и антисолитоны.

Значения $\gamma \geq 8\pi$ соответствуют $g \leq 0$ в (1.2), т.е. отталкиванию между солитоном и антисолитоном.

Заметим, что при $\gamma = 8\pi/n$ амплитуда отражения (4.9) тождественно обращается в нуль (это свойство содержится уже в полуклассической формуле (4.2)), в то время как амплитуда прохождения $S_T(\theta)$ приобретает в результате специфического сокращения полюсов и нулей на рис. 5 простой вид

$$S_T(\theta) = e^{i\pi n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\theta - i(\pi k/n)} + 1}{e^{\theta} + e^{-i(\pi k/n)}}. \quad (4.12)$$

Это выражение вместе с гипотезой о его точной природе при $\gamma = 8\pi/n$ было впервые представлено Корепиным и Фаддеевым [14]. Общие формулы (4.8), (4.9), (3.16) для произвольного γ были даны в работе [43]⁸⁾.

Правила коммутирования (4.5) вместе с точными выражениями (4.8), (4.9) и (3.16) для двухчастичных амплитуд представляют S -матрицу для произвольного числа солитонов и антисолитонов. Чтобы получить полную S -матрицу синус-Гордона, необходимо пополнить ее элементами, описывающими рассеяние любого числа солитонов и связанных состояний (4.3). Мы обозначим последние частицы через B_n ; $n = 1, 2, \dots < 8\pi/\gamma$.

Оказывается, что частицы B_n с четными (нечетными) n имеют положительную (отрицательную) C -четность. Это можно увидеть, если рассмотреть солитон-антисолитонные амплитуды с определенной s -канальной C -четностью:

$$S_+(\theta) = \frac{1}{2} [S_T(\theta) + S_R(\theta)], \quad (4.14a)$$

$$S_-(\theta) = \frac{1}{2} [S_T(\theta) - S_R(\theta)]. \quad (4.14b)$$

Амплитуда $S_+(\theta)$ имеет только четное подмножество $n = 2, 4, \dots$ полюсов связанных состояний при $\theta = i\pi - in(\gamma/8)$, в то время как амплитуда $S_-(\theta)$ — только нечетное подмножество $n = 1, 3, \dots$ (как и должно быть, эти полюса амплитуд $S_{\pm}(\theta)$ обладают положительными вычетами). В частности, “элементарная” частица модели синус-Гордона B_1 является C -нечетной.

Так как частицы B_n проявляются как полюса солитон-антисолитонных амплитуд, то произвольный элемент S -матрицы, включающий эти частицы, может быть вычислен как вычет подходящей многочастичной солитонной амплитуды. В терминах алгебраического фор-

⁸⁾ Вывод, представленный в [43], основан на некоторых специальных предположениях, таких как точность спектра масс (4.3) и исчезновение отражения при $\gamma = 8\pi/n$. Вывод, опирающийся на уравнения факторизации и не использующий эти предположения, впервые был дан в [12].

мализма, рассмотренного в пункте 2, это означает, что алгебра (3.5) частиц $A(\theta)$ и $\bar{A}(\theta)$ должна быть пополнена новыми символами $B_n(\theta)$, $n = 1, 2, \dots < 8\pi/\gamma$, и при этом должны быть определены правила коммутирования B_n с A и \bar{A} , а также B_n с B_m . Указанная процедура вычисления вычетов соответствует следующему определению символов $B_n(\theta)$ при помощи A и \bar{A} :

$$B_n \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) = \lim_{\theta_1 - \theta_2 \rightarrow i(n\gamma/8)} [A(\theta_2) \bar{A}(\theta_1) + \bar{A}(\theta_2) A(\theta_1)] \quad (4.15a)$$

для четных n и

$$B_n \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) = \lim_{\theta_1 - \theta_2 \rightarrow i(n\gamma/8)} [A(\theta_2) \bar{A}(\theta_1) - \bar{A}(\theta_2) A(\theta_1)] \quad (4.15b)$$

для нечетных n .

Это определение имеет формальный характер и должно быть использовано для получения правил коммутирования B_n с A и B_n с B_m . Рассмотрим, например, произведение $A(\theta_1) \bar{A}(\theta_2) A(\theta_3)$. Используя (4.5) и переходя к пределу $\theta_1 - \theta_2 \rightarrow in(\gamma/8)$, при помощи (4.15) мы получаем

$$\begin{aligned} A(\theta_1) B_n(\theta_2) &= S^{(n)}(\theta_{12}) B_n(\theta_2) A(\theta_1), \\ \bar{A}(\theta_1) B_n(\theta_2) &= S^{(n)}(\theta_{12}) B_n(\theta_2) \bar{A}(\theta_1), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где

$$S^{(n)}(\theta) = \frac{\text{sh } \theta + i \cos \frac{n\gamma}{16}}{\text{sh } \theta - i \cos \frac{n\gamma}{16}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\sin^2(\frac{n-2l}{32} \gamma - \frac{\pi}{4} + i \frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{n-2l}{32} \gamma - \frac{\pi}{4} - i \frac{\theta}{2})} \quad (4.17)$$

— амплитуда двухчастичного рассеяния

$$A + B_n \rightarrow A + B_n.$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующим правилам коммутирования:

$$B_n(\theta_1) B_m(\theta_2) = S^{(n,m)}(\theta_{12}) B_m(\theta_2) B_n(\theta_1), \quad (4.18)$$

где $S^{(n,m)}(\theta)$ — двухчастичная амплитуда рассеяния

$$B_n + B_m \rightarrow B_n + B_m.$$

Ее вид выражается следующей точной формулой:

$$\begin{aligned} S^{(n,m)}(\theta) &= \frac{\text{sh } \theta + i \sin(\frac{n+m}{16} \gamma)}{\text{sh } \theta - i \sin(\frac{n+m}{16} \gamma)} \frac{\text{sh } \theta + i \sin(\frac{n-m}{16} \gamma)}{\text{sh } \theta - i \sin(\frac{n-m}{16} \gamma)} \times \\ &\times \prod_{l=1}^{m-1} \frac{\sin^2(\frac{m-n-2l}{32} \gamma + i \frac{\theta}{2}) \cos^2(\frac{m+n-2l}{32} \gamma + i \frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{m-n-2l}{32} \gamma - i \frac{\theta}{2}) \cos^2(\frac{m+n-2l}{32} \gamma - i \frac{\theta}{2})}; \\ &n \geq m. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Амплитуды (4.17) и (4.18) оказываются $2\pi i$ -периодическими функциями переменной θ (действительно, это свойство диктуется кросс-синг-симметрией и двухчастичной унитарностью амплитуд $S^{(n)}(\theta)$)

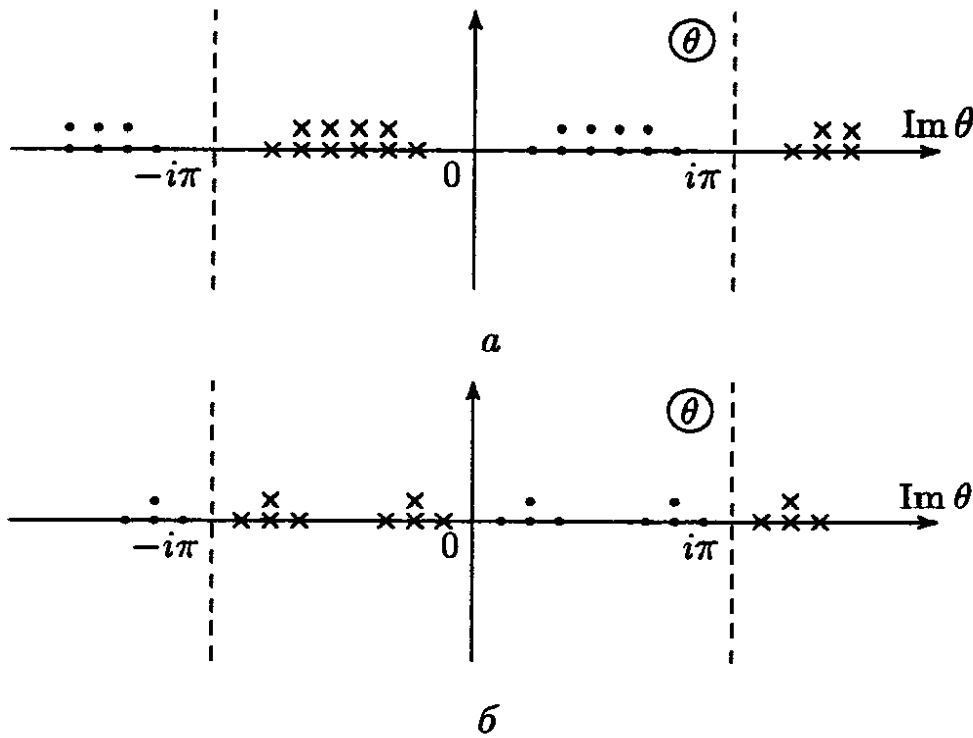


Рис. 6. Полюса и нули солитон-связанного состояния и амплитуды рассеяния связанное состояние-связанное состояние. (а) Амплитуда $S^{(n)}(\theta)$ для $n = 5$. (б) Амплитуда $S^{(n,m)}(\theta)$ для $n = 4$, $m = 2$

и $S^{(n,m)}(\theta)$). Расположение полюсов и нулей этих амплитуд показано на рис. 6. Обратим внимание на множество двойных полюсов

$$\theta_l = i \frac{\pi}{2} + \left[\frac{2l - n}{16} \right] \gamma, \quad l = 1, 2, \dots, n - 1$$

амплитуд $S^{(n)}(\theta)$ для $n \geq 2$; эти “избыточные” полюса не соответствуют никаким связанным состояниям. Одиночные полюса

$$\theta = i \frac{\pi}{2} + in \frac{\gamma}{16} \quad \text{и} \quad \theta = i \frac{\pi}{2} - in \frac{\gamma}{16}$$

являются s -канальными и u -канальными солитонными полюсами, соответственно: на s -плоскости эти полюса соответствуют $s = m^2$ и $u = m^2$ (m — масса солитона).

В амплитуде $S^{(n,m)}(\theta)$ лишь полюса

$$\theta = i \left[\frac{n + m}{16} \right] \gamma \quad \text{и} \quad \theta = i\pi - i \left[\frac{n + m}{16} \right] \gamma$$

соответствуют реальным частицам B_{n+m} , а все остальные полюса избыточны. Появление полюсов B_{n+m} в амплитуде $S^{(n,m)}(\theta)$ позволяет нам интерпретировать любую частицу B_l при $l \geq 2$ как связан-

ное состояние $B_n + B_m$ с $n + m = l^9$) и, следовательно, интерпретировать B_l как связанное состояние l “элементарных” частиц B_1 . Возможность такой интерпретации была указана в [15].

В случае $m = n = 1$ уравнение (4.19) дает двхчастичную амплитуду “элементарных” частиц

$$S^{(1,1)}(\theta) = \frac{\text{sh } \theta + i \sin(\gamma/8)}{\text{sh } \theta - i \sin(\gamma/8)}. \quad (4.20)$$

Это выражение можно разложить по степеням β^2 и сравнить с результатами β^2 -теории возмущений для лагранжиана (1.1). Формула (4.20) вместе с ее проверкой при помощи теории возмущений была представлена в работах [8–10] как решение уравнений аналитичности и унитарности для частицы B_1 .

Формулы (4.16)–(4.19) являются решением проблемы связанных состояний в модели синус-Гордона. Вместе с (4.5), (4.8)–(4.10) и (3.16) они дают полную квантовую S -матрицу в этой модели.

Для завершения этого пункта рассмотрим нерелятивистскую $O(2)$ -симметричную S -матрицу. После подстановки (3.11) общее решение уравнений факторизации вместо (4.8) принимает вид (см. приложение А)

$$S_T(k) = -i \frac{\text{sh}(\frac{8\pi k}{\gamma m})}{\sin(\pi \kappa)} S_R(k), \quad (4.21a)$$

$$S(k) = -i \frac{\text{sh}(i\pi \kappa - \frac{8\pi k}{\gamma m})}{\sin(\pi \kappa)} S_R(k), \quad (4.21b)$$

где $\kappa = 8\delta/\gamma$. Так как теперь мы не можем требовать какой-либо кроссинг-симметрии, то γ и κ являются независимыми параметрами. Условие унитарности тогда дает следующее уравнение:

$$S_R(k) S_R(-k) = \frac{\sin^2(\pi \kappa)}{\text{sh}^2(\frac{8\pi k}{\gamma m}) + \sin^2(\pi \kappa)}. \quad (4.22)$$

При этом “минимальное” решение (4.22) имеет вид

$$S_R(k) = \frac{\sin(\pi \kappa)}{i \text{sh}(\frac{8\pi k}{\gamma m})} \frac{\Gamma(-i\frac{8k}{\gamma m} - \kappa) \Gamma(-i\frac{8k}{\gamma m} + \kappa + 1)}{\Gamma(-i\frac{8k}{\gamma m}) \Gamma(1 - i\frac{8k}{\gamma m})}. \quad (4.23)$$

Формулы (4.21)–(4.23) дают с очевидностью нерелятивистский предел солитонной S -матрицы синус-Гордона. Более того, амплитуды (4.23) и (4.21a) являются в точности амплитудами отражения и

⁹⁾ Можно проверить, что определение

$$B_{n+m} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) = \lim_{\theta_1 - \theta_2 \rightarrow i[(n+m)/16]\gamma} B_m(\theta_2) B_n(\theta_1)$$

согласуется с (4.14) и полностью самосогласованно [31].

прохождения для рассеяния на потенциале

$$V_A \bar{A}(x) = -\frac{m}{64} \frac{\gamma^2 G}{\operatorname{ch}^2(\frac{m\gamma}{8} x)}, \quad (4.24)$$

в то время как амплитуда (4.21b) описывают рассеяние на потенциале

$$V_A A(x) = \frac{m}{64} \frac{\gamma^2 G}{\operatorname{sh}^2(\frac{m\gamma}{8} x)}, \quad (4.25)$$

где $G = \kappa^2 - \kappa + \frac{3}{4}$. Известно, что система из $N + M$ нерелятивистских частиц двух различных типов, описываемая гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{d^2}{dx_i^2} - \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^M \frac{d^2}{dy_j^2} + \sum_{i < i'}^N 2 V_A A(x_i - x_{i'}) + \\ + \sum_{j < j'}^M 2 V_A A(y_j - y_{j'}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M 2 V_A \bar{A}(x_i - y_j), \quad (4.26)$$

полностью интегрируема, т.е. обладает бесконечным числом законов сохранения, и ее S -матрица является факторизованной [44, 45]. Таким образом, система (4.26) описывает как раз нерелятивистскую динамику квантованных солитонов синус-Гордона. В работе [38] указана аналогия между рассеянием солитонов в модели синус-Гордона и рассеянием частиц на потенциале $\sim -1/\operatorname{ch}^2 x$.

5. $O(N)$ -симметричная нелинейная σ -модель с $N \geq 3$

Теперь мы рассмотрим задачу о том, какая квантовая теория поля служит динамическим фундаментом $O(N)$ -симметричной факторизованной S -матрицы, рассмотренной в пункте 3, для $N \geq 3$.

Прежде всего напомним о существенном различии общего решения из пункта 3 для $N \geq 3$ и $N = 2$. Для $N = 2$ решение зависит от свободного параметра, который может быть интерпретирован как константа связи (в частности, "режим слабой связи" может быть достигнут специальным выбором этого параметра), в то время как для $N \geq 3$ решение (имеющее единственную неоднозначность вида (3.14)) не содержит свободных параметров, но аналитически зависит от группы симметрии ранга N ¹⁰) и может быть разложено по степеням $1/N$.

Независимость от константы связи всех наблюдаемых свойств кроме полного масштаба является удивительной характеристикой асимптотически свободных теорий с динамическим возникновением масс (на самом деле это явление есть следствие перенормируемости [28]).

¹⁰) В этом случае предел слабой связи достигается при $N \rightarrow \infty$.

Таким образом, естественно предположить, что именно теория такого вида описывает динамику факторизованного рассеяния из пункта 3 для $N \geq 3$.

Чтобы гарантировать тот факт, что некоторая квантовая теория поля действительно приводит к S -матрице из пункта 3, необходимо установить выполнение следующих ее свойств:

(а) Рассматриваемая модель является моделью массивных частиц с $O(N)$ -симметричным спектром. При этом спектр содержит изовекторный N -плет.

(б) Полная S -матрица этой теории факторизована.

Если эти свойства имеют место, то для получения точной S -матрицы такой теории еще должна быть решена задача КДД-неоднозначности (3.14).

Рассмотрим $O(N)$ -симметричную киральную модель поля (1.4). Обычная теория g -возмущений для модели (1.4) основана на голдстоуновском вакууме и приводит в двумерном пространстве к инфракрасной катастрофе. Таким образом, она вряд ли применима для получения наблюдаемых свойств, таких как спектр и S -матрица. Однако для этих моделей существует другой мощный инструмент, а именно $1/N$ -разложение. Для модели (1.4) этот метод был развит в работах [23, 24] (см. приложение Б). Он базируется на точном решении в пределе $N \rightarrow \infty$, которое, очевидно, удовлетворяет требованию (а): при $N \rightarrow \infty$ модель содержит только изовекторный N -плет свободных массивных частиц¹¹⁾. Взаимодействие этих частиц имеет порядок $1/N$, и $1/N$ -разложение является в точности теорией возмущений этого взаимодействия. Свойство (а) остается справедливым в любом порядке этой теории возмущений. Таким образом, это свойство с очевидностью верно для достаточно больших N . Не ясно, сохранится ли свойство (а) для небольших N , скажем $N = 3, 4$. Однако мы будем полагать, что ситуация, характерная для больших N , будет также справедливой и для всех $N \geq 3$. Результат этого пункта до некоторой степени подтверждает сделанное предположение.

Вернемся к свойствам рассеяния нашей модели. Существование бесконечного числа законов сохранения для классической модели было открыто Полмейером [47]. Однако, так как квантовый вакуум принципиально отличается от классического, то связь между классическими и квантовыми законами сохранения не может быть непосредственной. В частности, конформная инвариантность, которая существенно использовалась в выводе Полмейера, конечно, нарушается в квантовом случае вследствие перенормировки константы связи.

Наличие в квантовой модели (1.4) высших законов сохранения было показано Поляковым в работе [26]. Здесь мы коротко излагаем этот

¹¹⁾ Отсутствие других частиц при больших N показано в работе [48].

результат Полякова.

Уравнения движения, соответствующие лагранжиану (1.4), имеют вид

$$n_{,\sigma\tau}^i + \omega n^i = 0, \quad \sum_{i=1}^N (n^i)^2 = 1, \quad (5.1)$$

где ω — лагранжево поле (см. приложение Б), а индексы σ и τ означают производные по переменным

$$\sigma = x^0 + x^1; \quad \tau = x^0 - x^1. \quad (5.2)$$

Из уравнений (5.1) в классической теории следует, что

$$\left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma}^i)^2 \right]_{\tau} = \left[\sum_{i=1}^N (n_{,\tau}^i)^2 \right]_{\sigma} = 0. \quad (5.3)$$

Эти уравнения, существенным образом используемые Полмейером [47], означают сохранение энергии-импульса, а также конформной инвариантности в классической теории. В квантовом случае конформная симметрия нарушается аномалией тензора энергии-импульса и вследствие этого вместо (3.5) мы имеем равенства

$$\left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma}^i)^2 \right]_{\tau} = b \omega_{,\sigma}, \quad \left[\sum_{i=1}^N (n_{,\tau}^i)^2 \right]_{\sigma} = b \omega_{,\tau}, \quad (5.4)$$

где b — константа, которую легко связать с функцией Гелл-Манна и Лоу. Конечно, из соотношений (5.4) следует сохранение в квантовой теории энергии-импульса, так как они являются соотношениями бездивергентного типа.

Чтобы получить следующий закон сохранения, рассмотрим, следуя Полякову, производные

$$\left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma\sigma}^i)^2 \right]_{\tau} \quad \text{и} \quad \left[\sum_{i=1}^N (n_{,\tau\tau}^i)^2 \right]_{\sigma}.$$

В классической теории имеем, например,

$$\left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma\sigma}^i)^2 \right]_{\tau} = - \left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma}^i)^2 \omega \right]_{\sigma} + 3 \sum_{i=1}^N (n_{,\sigma}^i)^2 \omega_{,\sigma}. \quad (5.5)$$

В квантовом случае это соотношение деформируется аномалиями. Легко видеть, что наиболее общим квантовым вариантом (5.5) будет уравнение

$$\left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma\sigma}^i)^2 \right]_{\tau} = (3 + \alpha) \left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma}^i)^2 \right]_{\sigma} \omega_{,\sigma} + (\dots)_{\sigma}, \quad (5.6)$$

где слагаемое, пропорциональное α , является аномальным. Кроме того можно рассмотреть производную выражения $\left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma}^i)^2 \right]_{\tau}$ и получить, совершенно аналогично (5.6), в квантовом случае равенство

$$\left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma}^i)^2 \right]_{\tau} = (2b + \alpha') \left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma}^i)^2 \right] \omega_{,\sigma} + (\dots)_{\sigma}. \quad (5.7)$$

Теперь непосредственно строится новый закон сохранения

$$\left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma\sigma}^i)^2 - \frac{3 + \alpha}{2b + \alpha'} \left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma}^i)^2 \right]^2 \right]_{,\tau} = (\dots)_{,\sigma}. \quad (5.8)$$

Последующие законы сохранения строятся без труда. Уравнение

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma\sigma\sigma}^i)^2 + a_1 \left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma\sigma}^i)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma}^i)^2 \right] + \right. \\ & \left. + a_2 \left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma}^i)^2 \right]^3 + a_3 \left[\sum_{i=1}^N (n_{,\sigma\sigma}^i n_{,\sigma}^i)^2 \right]^2 \right]_{,\tau} = (\dots)_{,\sigma} \end{aligned} \quad (5.9)$$

может быть удовлетворено так же, как и (5.8), путем подходящего выбора параметров a_1 , a_2 и a_3 . Высшие законы сохранения этого бесконечного ряда требуют более тщательного исследования; они были построены в недавней работе [27]. Здесь мы не обсуждаем весь этот бесконечный ряд. Как показано в [26], двух первых законов сохранения (5.4) и (5.8) уже достаточно, чтобы ограничить S -матрицу до процессов, удовлетворяющих правилам отбора (i) и (ii), сформулированных в пункте 2. Согласно общему рассмотрению пункта 2, отсюда следует факторизация S -матрицы в модели (1.4).

Поучительно проследить за последним свойством S -матрицы кирального поля в $1/N$ -теории возмущений [25]. Сделаем это в поряд-

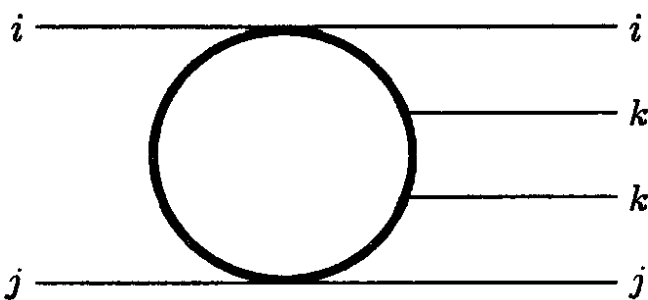


Рис. 7. Амплитуда $2 \rightarrow 4$

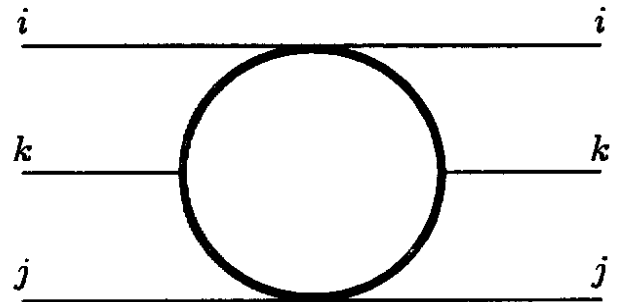


Рис. 8. Амплитуда $3 \rightarrow 3$

ке $1/N^2$ (в порядке $1/N$ эти свойства тривиальны, так как определяются кинематикой). В этом порядке нас интересуют амплитуды $2 \rightarrow 4$ (рис. 7) и связанные амплитуды $3 \rightarrow 3$ (рис. 8).

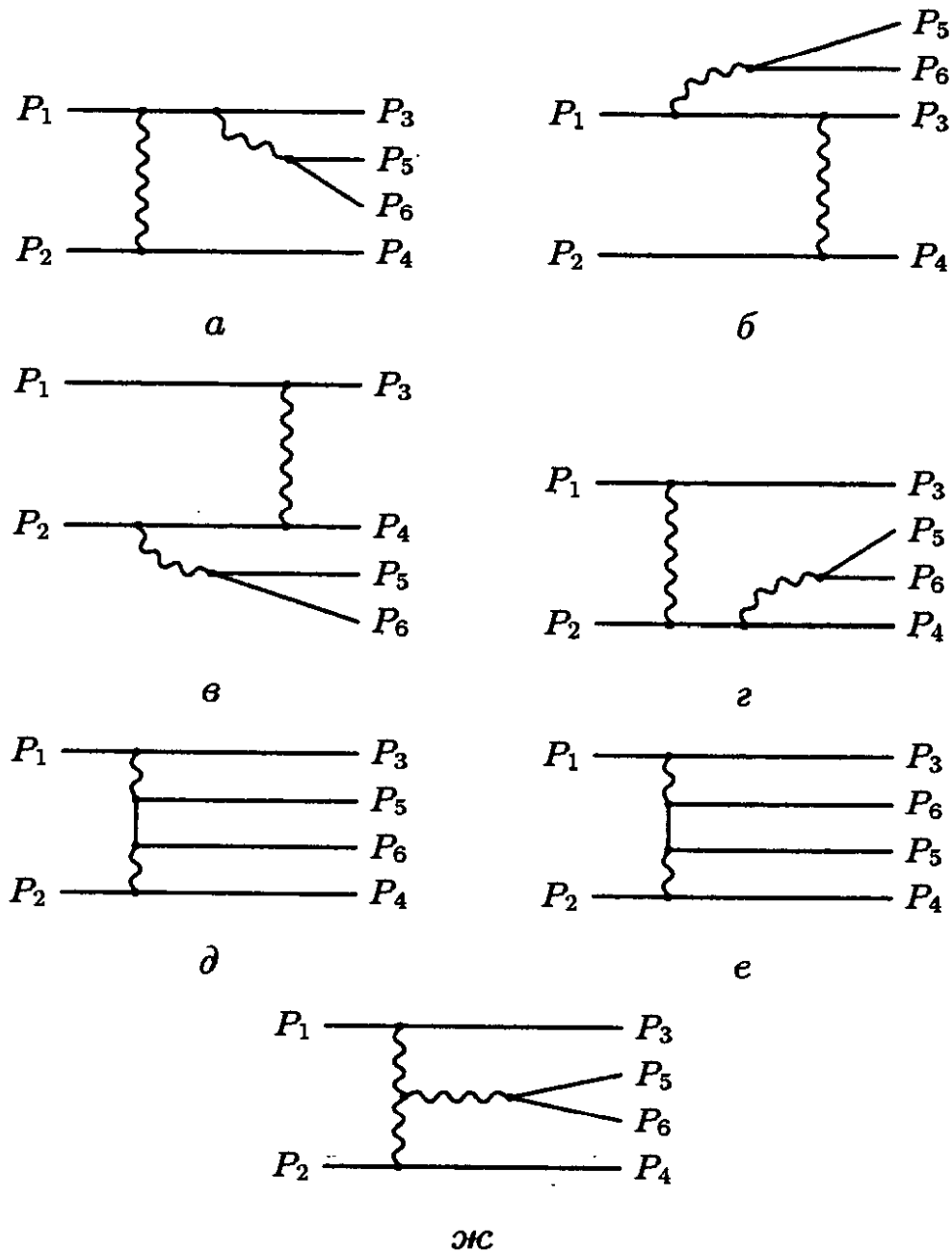


Рис. 9. Диаграммы порядка $1/N^2$, дающие вклад в амплитуду на рис. 7, в случае $i \neq j \neq k \neq i$

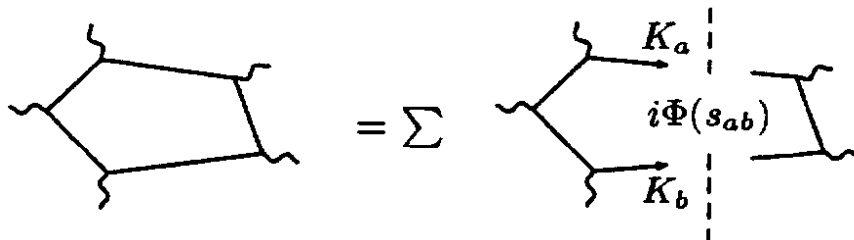


Рис. 10. “Правило разрезания” для вычисления произвольной однопетлевой диаграммы

Используя диаграммную технику $1/N$ -разложения (см. приложение Б), можно представить амплитуды $2 \rightarrow 4$ суммой диаграмм, показанных на рис. 9 (для простоты мы рассматриваем лишь слу-

чай $i \neq j \neq k \neq i$; общий случай включает больше диаграмм, но результат — тот же). Чтобы продемонстрировать полное взаимное сокращение диаграмм на рис. 9, полезно принять во внимание явное выражение для произвольной двумерной однопетлевой диаграммы [8]. Разрезание схематически показано на рис. 10: произвольная бозонная петля является суммой слагаемых, каждое из которых соответствует некоторому разрезанию петли по двум линиям.

Вклад от каждого разрезания равен произведению двух “древесных” диаграмм, отделенных на рис. 10 друг от друга пунктирной линией, на функцию

$$i \Phi(s_{ab}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 p}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p + k_a + k_b)^2 - m^2 + i\epsilon)}, \quad (5.10)$$

где $s_{ab} = (k_a + k_b)^2$, причем импульсы k_a и k_b разрезанных линий определяются условием $k_a^2 = k_b^2 = m^2$. При фиксированном s_{ab} последнее уравнение имеет два решения, связанных заменой $k_a \leftrightarrow k_b$, при этом на рис. 10 оба решения должны быть приняты во внимание.

Легко видеть, что все возможные разрезы треугольной петли в диаграмме на рис. 9, *ж* в точности сокращают остальные диаграммы

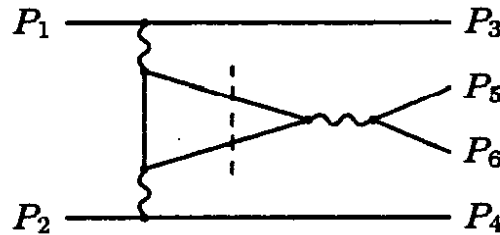


Рис. 11. Разрезание тройной вершины ω' на рис. 9, *ж*

на рис. 9. Рассмотрим, например, разрез, показанный на рис. 11. Имеем два решения уравнения $k_1^2 = k_2^2 = m^2$:

$$k_1 = p_5; \quad k_2 = p_6 \quad \text{и} \quad k_1 = p_6; \quad k_2 = p_5.$$

Множитель $i \Phi(s_{56})$ в этом разрезании равен $-1/D(s_{56})$, где D — пропагатор поля ω' (волнистая линия). Поэтому разрезание на рис. 11 сокращает диаграммы на рис. 9, *д* и *е*. Остальные разрезы этой петли сокращают диаграммы на рис. 9, *а–г*.

Факторизация связной амплитуды $3 \rightarrow 3$ в порядке $1/N^2$ может быть установлена аналогично. Соответствующие диаграммы изображены на рис. 12 (снова мы рассматриваем лишь случай $i \neq j \neq k \neq i$). Очевидно, что в кинематических областях, где пропагаторы, изображенные сплошными линиями на рис. 12, *а–е*, несингулярны, все возможные разрезания петли на рис. 12, *ж* полностью сокращают вклады от остальных диаграмм. Сингулярности на массовой поверхности пропагаторов сплошных линий на рис. 12, *а–е* требуют отдельного рассмотрения.

Мы показали, что квантовая модель (1.4) удовлетворяет свойствам (а) и (б). Следовательно, одно из решений (3.8), (3.13), (3.17), заданное выбором КДД-полюсов (3.14), может быть использовано для описания рассеяния в этой модели. Мы не знаем, каким путем строго устранить неопределенность, связанную с КДД-полюсами, но выбор “минимального” решения, а именно $\sigma_2(\theta) = \sigma_2^{(+)}(\theta)$ из (3.17), представляется наиболее естественным. Ниже мы приводим аргументы в пользу этого выбора.

Во-первых заметим, что вообще добавление КДД-полюсов (3.14) приводит к дополнительным полюсам во всех трех каналах двухчастичного рассеяния: изоскалярному, тензорно-антисимметричному и тензорно-симметричному¹²⁾. Такое сильное изоспиновое вырождение состояний представляется неестественным. “Минимальное” решение $\sigma_2(\theta) = \sigma_2^{(+)}(\theta)$ не имеет полюсов в физической полосе $0 < \text{Im } \theta < \pi$ и потому “элементарные” изовекторные частицы A_i в модели (1.4) не создают связанных состояний.

Далее, вычисление двухчастичных амплитуд в модели (1.4) при помощи техники $1/N$ -разложения (см. приложение Б) в порядке $1/N$ приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \begin{array}{c} P_1 \text{-----} P_1 \\ P_2 \text{-----} P_2 \end{array} + \begin{array}{c} P_1 \text{-----} P_1 \\ P_2 \text{-----} P_2 \end{array} \text{ (с волнистой линией)} = 1 - \frac{2\pi i}{N \text{sh } \Theta}, \\ \sigma_3 &= \begin{array}{c} P_1 \text{-----} P_2 \\ P_2 \text{-----} P_1 \end{array} \text{ (с волнистой линией)} = -\frac{2\pi i}{N\Theta}, \\ \sigma_1 &= \begin{array}{c} P_1 \diagdown \quad P_1 \diagup \\ P_2 \diagup \quad P_2 \diagdown \end{array} \text{ (с волнистой линией)} = -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \Theta)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Знаки в (5.12) означают, что взаимодействие между A_i -частицами является отталкивательным (по крайней мере, для больших N). Следовательно, A_i -частицы не могут создать связанных состояний. Легко проверить, что выражения (5.12) действительно совпадают с первыми членами $1/N$ -разложения точного решения (3.8), (3.13), (3.17) при $\sigma_2(\theta) = \sigma_2^{(+)}(\theta)$. Таким образом, этот выбор согласован с $1/N$ -разложением в модели (1.4).

Интересно сравнить решение в пункте 3 с результатами обычного g -разложения в модели (1.4). Считая, что S -матрица (3.8), (3.17) соответствует некоторой перенормируемой асимптотически свободной

¹²⁾ Единственное исключение — это добавление одного КДД-полюса к $\sigma_2^{(+)}(\theta)$ при $\alpha_1 = \lambda$, когда связанные состояния появляются лишь в изоскалярном и тензорно-антисимметричном каналах. Этот случай соответствует $\sigma_2(\theta) = \sigma_2^{(-)}(\theta)$ (см. (3.19) и рассматривается в следующем пункте.

теории поля, можно разложить амплитуды рассеяния, являющиеся функцией одной переменной

$$\ln \frac{s}{m^2} = \ln \frac{s}{\mu^2} + \int_{\mu^2}^{g(\mu)} \frac{dg}{\beta(g)} \quad (5.13)$$

в асимптотический ряд по степеням $g(\mu)$. Используя первый член для функции Гелл-Манна и Лоу $\beta(g)$ в σ -модели [20]

$$\beta(g) = -\frac{N-2}{4\pi} g^2 + O(g^3), \quad (5.14)$$

получаем с точностью до g^2 ($g \equiv g(\mu)$)

$$\begin{aligned} \sigma_2(s) &= 1 - i \frac{g^2}{8} + O(g^3), \\ \sigma_3(s) &= -i \frac{g}{2} + i \frac{N-2}{8\pi} g^2 \ln \frac{s}{\mu^2} + O(g^3), \\ \sigma_1(s) &= i \frac{g}{2} - i \frac{N-2}{8\pi} g^2 \ln \frac{s}{\mu^2} - \frac{N-2}{8} g^2 + O(g^3). \end{aligned} \quad (5.15)$$

В (5.15) выписана асимптотика при $s \rightarrow \infty$, при этом степенные члены по s опущены.

Обычная теория возмущений (разложение по g) основана на голдстоуновском вакууме и использует $(N-1)$ -плет голдстоуновских частиц вместо N -плета массивных A_i -частиц. В такой теории возмущений диаграммные петлевые вычисления приводят к инфракрасным расходимостям. Однако все инфракрасные расходимости взаимно сокращаются в диаграммах, дающих вклад в амплитуду рассеяния голдстоуновских частиц в порядке g^2 . Следовательно, можно считать, что вычисление этих диаграмм приводит к правильной ультрафиолетовой асимптотике реальной амплитуды рассеяния A_i -частиц. Это вычисление является непосредственным и приводит к (5.15).

6. S -матрица для “элементарных” фермионов в модели Гросса–Невью

Другой пример асимптотически свободной теории, обладающей свойствами (а) и (б) пункта 5 и потому приводящей к факторизованной S -матрице пункта 3 с $N \geq 3$ — это модель Гросса–Невью (1.5).

Бесконечное множество нетривиальных законов сохранения для классического варианта модели (1.5) было найдено в недавней работе [49]. Эти классические законы сохранения по своей структуре аналогичны законам сохранения в нелинейной σ -модели, найденным Полмейером. Снова конформная инвариантность классической теории (1.5) (которая нарушается в квантовом случае) играет ключевую

роль в выводе этих сохраняющихся токов. Однако естественно ожидать, что высшие законы сохранения имеют место также и в квантовой теории (1.5). Дашен, Хаслахер и Невью [29] исследовали классические полевые уравнения, определяющие точку стационарной фазы эффективного действия (Б.5') (см. приложение Б). Им удалось найти явно серии зависящих от времени решений. Отсюда почти наверняка следует полная интегрируемость системы, определяемой этими уравнениями.

Чтобы убедиться, что квантовая теория (1.5) действительно обладает высшими законами сохранения, выведем первый нетривиальный закон, используя метод Полякова [26]. Дальнейшее рассмотрение будет проводиться параллельно рассуждениям пункта 5 для случая σ -модели.

Удобно использовать уравнения движения для модели (1.5) непосредственно в терминах правых и левых компонент майорановского "биспинора" $\psi_i(x) = (\psi_i^r(x), \psi_i^l(x))$

$$i \psi_{i,\tau}^r = \omega \psi_i^l, \quad i \psi_{i,\sigma}^l = -\omega \psi_i^r; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6.1)$$

где $\omega = g_0 \sum_{i=1}^N \psi_i^r \psi_i^l$. Сохранение энергии-импульса и конформная инвариантность уравнений в классическом случае, аналогично (5.3), приводит к соотношению

$$\left(\sum_{i=1}^N \psi_i^r \psi_{i,\sigma}^r \right)_{,\tau} = \left(\sum_{i=1}^N \psi_i^l \psi_{i,\tau}^l \right)_{,\sigma} = 0 \quad (6.2)$$

которое в квантовой теории должно быть, конечно, заменено на

$$\left(\sum_{i=1}^N \psi_i^r \psi_{i,\sigma}^r \right)_{,\tau} = -b \omega_{,\sigma}^2, \quad \left(\sum_{i=1}^N \psi_i^l \psi_{i,\tau}^l \right)_{,\sigma} = -b \omega_{,\tau}^2. \quad (6.3)$$

Используя эти квантовые уравнения, легко проверить, что при соответствующем выборе параметра C удовлетворяются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^N \psi_{i,\sigma}^r \psi_{i,\sigma\sigma}^r + C \left(\sum_{i=1}^N \psi_i^r \psi_{i,\sigma}^r \right)^2 \right]_{,\tau} &= (\dots)_{,\sigma}, \\ \left[\sum_{i=1}^N \psi_{i,\tau}^l \psi_{i,\tau\tau}^l + C \left(\sum_{i=1}^N \psi_i^l \psi_{i,\tau}^l \right)^2 \right]_{,\sigma} &= (\dots)_{,\tau}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Эти уравнения как раз и являются первым нетривиальным законом сохранения в модели Гросса-Невью.

Из существования высших законов сохранения следует, что S -матрица в модели Гросса-Невью обладает свойством (б) пункта 5 [26].

С другой стороны, это свойство S -матрицы в модели Гросспа-Невью можно получить при помощи $1/N$ -разложения [50]. Техника $1/N$ -разложения для этой модели была развита в работе [28] (она коротко описана в приложении Б). В основном она аналогична такой же технике, примененной в случае нелинейной σ -модели. В частности, диаграммное рассмотрение в предыдущем пункте может быть повторено слово в слово для модели Гросса-Невью.

Однако имеется существенная разница между $1/N$ -техниками в σ -модели и в модели Гросса-Невью. Укажем на дополнительный знак минус в (Б.9') по сравнению с (Б.9), который связан с фермионной природой ψ_i -полей (см. приложение Б). Это приводит к существенно-му различию между двумя теориями рассеяния. Например, для модели (1.5) вместо (5.12) мы имеем

$$\begin{aligned}\sigma_2^{\text{GN}}(\theta) &= 1 + \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \\ \sigma_3^{\text{GN}}(\theta) &= \frac{2\pi i}{N \theta} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \\ \sigma_1^{\text{GN}}(\theta) &= \frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).\end{aligned}\quad (6.5)$$

Знак в уравнении (6.5) соответствует притягательному взаимодействию “элементарных” фермионов (которые мы по-прежнему обозначаем A_i , $i = 1, 2, \dots, N$). Поэтому должны существовать связанные состояния частиц A_i .

Проблема связанных состояний в модели (1.5) изучалась в квазиклассическом приближении при больших N в работе [29]. Был найден богатый спектр $O(N)$ -мультиплетов связанных состояний. Имеются как изовекторный и изоскалярный мультиплеты, так и ряд антисимметрично-тензорных мультиплетов высшего ранга. Квазиклассический спектр обладает сильной изоспиновой вырожденностью: разные изоспиновые мультиплеты объединяются в супермультиплеты, определенные “главным квантовым числом” n , которое соответствует числу связанных “элементарных” фермионов. Квазиклассические массы зависят лишь от этого числа

$$m_n^{\text{sem}} = m \frac{\sin(\frac{\pi n}{N})}{\sin(\frac{\pi}{N})}, \quad n = 1, 2, \dots < \frac{N}{2}, \quad (6.6)$$

где m — масса A_i -частицы.

Кроме A_i -частиц и их связанных состояний существуют и другие частицы — “кинки” поля $\omega(x)$ [29]. Их квазиклассические массы имеют значения

$$M_{\text{kink}} = \frac{m}{2 \sin(\frac{\pi}{N})}, \quad (6.7)$$

и существование этих “кинков” объясняет значение верхней границы для n в уравнении (6.6).

Качественная структура квазиклассического спектра связанных состояний (которая становится точной при $N \rightarrow \infty$) указывает нам на выбор решения (3.8), (3.13), (3.17) с $\sigma_2(\theta) = \sigma_2^{(-)}(\theta)$ в качестве точной S -матрицы “элементарных” фермионов в модели Гросса–Невью. Оказывается, что $1/N$ -разложение этого решения совпадает с (6.5). Более того, рассмотрим двухчастичные амплитуды A_i -рассеяния с определенным изоспином в s -канале

$$\sigma_{(\text{isoscalar})} = N \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -\frac{(\theta + i\lambda)(\theta + i\pi)}{\theta(i\pi - \theta)} \sigma_2^{(-)}(\theta), \quad (6.8a)$$

$$\sigma_{(\text{antisymm})} = \sigma_2 - \sigma_3 = \frac{\theta + i\lambda}{\theta} \sigma_2^{(-)}(\theta), \quad (6.8b)$$

$$\sigma_{(\text{symm})} = \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{\theta - i\lambda}{\theta} \sigma_2^{(-)}(\theta). \quad (6.8c)$$

Как видно из (6.8), связанные состояния существуют лишь в изоскалярном и антисимметрично-тензорном каналах. Мы обозначаем эти частицы через B и B_{ij} . Они имеют массы

$$m_B = m_{B_{kj}} \equiv m_2 = m \sin\left(\frac{2\pi}{N-2}\right) \left[\sin\left(\frac{\pi}{N-2}\right) \right]^{-1}. \quad (6.9)$$

Высшие связанные состояния появляются как полюса многочастичных амплитуд. Изучение этих полюсов (полностью параллельно такому же изучению, проведенному в работе [10] для связанных состояний “элементарных” частиц в модели синус-Гордона) приводит к спектру A_i -многочастичных связанных состояний, который качественно согласуется с квазиклассическим спектром, полученным Дашеном, Хаслахером и Невью [29]. Полуклассическая изоспиновая вырожденность оказывается точной, при этом точная массовая формула

$$m_n = m \sin\left(\frac{\pi n}{N-2}\right) \left[\sin\left(\frac{\pi}{N-2}\right) \right]^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots < \frac{N-2}{2}, \quad (6.10)$$

отличается от соответствующей полуклассической формулы (6.6) лишь на подстановку $N \rightarrow N-2$. Естественно предположить, что вся качественная картина полуклассического спектра остается неизменной в точном решении, если делается подстановка $N \rightarrow N-2$. В частности, для любого N существуют “кинк”-частицы; формула (6.10) в терминах кинк-масс запишется в виде

$$m_n = 2 M_{\text{kinck}} \sin\left(\frac{\pi n}{N-2}\right), \quad n = 1, 2, \dots < \frac{N-2}{2}. \quad (6.11)$$

Из формулы (6.11) следует, что связанные состояния последовательно исчезают из спектра вместе с уменьшением N и при $N \leq 4$ в системе не остается других частиц кроме “кинков”. В частности, не существует “фундаментальных” фермионов A_i при $N = 3, 4$. Таким образом, представленная выше точная S -матрица “фундаментальных” фермионов в модели Гросса–Невью имеет прямое физическое значение лишь при $N > 4$, обращаясь при $N = 3, 4$ в фикцию.

Чтобы построить полную S -матрицу Гросса–Невью для любого $N \geq 3$, необходимо вычислить факторизованную S -матрицу для “кинков”. При этом возникает существенная проблема: какому представлению внутренней группы симметрии принадлежат “кинки”? Есть аргументы в пользу того, что эти частицы образуют $O(N)$ -изоспиновые мультиплеты (Е. Виттен, частное сообщение). Во всяком случае, проблема получения полной S -матрицы в модели Гросса–Невью остается открытой.

Дальнейшее развитие проблем, обсуждаемых в данной статье, см. в работах [51–54].

Приложение А

В этом приложении мы выводим решения уравнений (3.5) и (3.6) [12, 25].

(1) Рассмотрим систему (3.5). Удобно ввести отношения

$$h(\theta) = \frac{S_2(\theta)}{S_3(\theta)}; \quad g(\theta) = \frac{S_1(\theta)}{S_3(\theta)}. \quad (\text{A.1})$$

Тогда уравнения (3.5a), (3.5b) перепишутся в виде

$$h(\theta) + h(\theta') - h(\theta + \theta') = g(\theta') h(\theta + \theta') - h(\theta') g(\theta + \theta') + g(\theta') g(\theta + \theta') h(\theta), \quad (\text{A.2})$$

$$[1 + h(\theta + \theta') + g(\theta + \theta')] [1 - g(\theta) g(\theta')] + h(\theta) h(\theta') = (1 + g(\theta) + h(\theta)) (1 + g(\theta') + h(\theta')). \quad (\text{A.3})$$

Подставляя $\theta = 0$ или $\theta' = 0$ в (A.3) и (A.2), мы получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} [1 - g^2(\theta)] h(0) &= 0, \\ [1 + g(\theta)] [(1 + g(\theta) + h(\theta)) g(0) + h(0)] &= 0, \\ [1 + g(\theta)] [h(0) - g(0) h(\theta)] &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения могут быть удовлетворены тремя возможными способами: (а) $g(\theta) \equiv 1$; $h(\theta) \equiv -1$; (б) $g(\theta) \equiv -1$, $h(\theta)$ произвольно; (в) $g(0) = h(0) = 0$. Первые два случая для нас неинтересны, так как (а)

противоречит унитарности (3.4b), а в случае (б) не удовлетворяются соотношениям кроссинг-симметрии (3.2b). Таким образом

$$g(0) = h(0) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Дифференцируя (A.2) и (A.3) по θ' и полагая затем $\theta' = 0$, мы получим

$$h'(\theta) = (1 + g(\theta)) (\alpha - \beta h(\theta)); \quad (\text{A.5})$$

$$h'(\theta) + g'(\theta) = (1 + g(\theta)) [\alpha + \beta h(\theta) + \beta (1 + g(\theta))], \quad (\text{A.6})$$

где $\alpha = h'(0)$ и $\beta = g'(0)$. Эти уравнения можно легко представить в виде

$$g(\theta) = \beta h(\theta) \frac{h(\theta) + 1}{\alpha - \beta h(\theta)}; \quad (\text{A.7})$$

$$h'(\theta) = \beta h^2(\theta) + \alpha. \quad (\text{A.8})$$

Решением (A.8) и (A.7) будет

$$h(\theta) = -i \operatorname{tg} \left(\frac{4\pi\delta}{\gamma} \right) \operatorname{th} \left(\frac{4\pi\theta}{\gamma} \right); \quad (\text{A.9})$$

$$g(\theta) = \operatorname{th} \left(\frac{4\pi\theta}{\gamma} \right) \operatorname{cth} \left[\frac{4\pi}{\gamma} (i\delta - \theta) \right], \quad (\text{A.10})$$

где

$$\alpha = -i (4\pi/\gamma) \operatorname{tg}(4\pi\delta/\gamma); \quad \beta = -i (4\pi/\gamma) \operatorname{ctg}(4\pi\delta/\gamma).$$

Из условия вещественной аналитичности амплитуды рассеяния следует, что $h(\theta)$ и $g(\theta)$ должны быть вещественными, если $\operatorname{Re} \theta = 0$. Следовательно, γ и δ являются вещественными параметрами. Формулы (A.9) и (A.10) эквивалентны уравнениям (3.7).

(2) Вернемся к системе (3.6). Используя обозначение

$$h(\theta) = \sigma_2(\theta)/\sigma_3(\theta),$$

преобразуем (3.6a) к виду

$$h(\theta) + h(\theta') = h(\theta + \theta'). \quad (\text{A.11})$$

Следовательно

$$\sigma_3(\theta) = -i \frac{\lambda}{\theta} \sigma_2(\theta), \quad (\text{A.12})$$

где λ — произвольный вещественный параметр. Подстановка (A.12) в (3.6b) приводит к следующему уравнению:

$$\rho(\theta + \theta') \rho(\theta') = \frac{i\lambda}{\theta} [\rho(\theta') - \rho(\theta + \theta')], \quad (\text{A.13})$$

где $\rho(\theta) = \sigma_1(\theta)/\sigma_2(\theta)$. Решением (A.13) является

$$\rho(\theta) = -\frac{i\lambda}{i\kappa - \theta}, \quad (\text{A.14})$$

где κ — другой вещественный параметр. Теперь уравнение (3.6с) дает ограничение

$$\kappa = i \frac{N-2}{2} \lambda, \quad (\text{A.15})$$

откуда мы получаем (3.8).

Приложение Б

Это приложение предназначается для развития диаграммной техники $1/N$ -разложения в моделях (1.4) и (1.5) [23, 24, 28].

Все последующие вычисления проводятся одновременно для обеих моделей (1.4) и (1.5). Чтобы избежать недоразумений, переменные, соответствующие моделям (1.4) и (1.5), мы снабдим индексами GF (киральное поле) и GN (поле Гросса–Невью). Кроме того, все номера формул, относящихся к модели (1.5), будут иметь штрих.

Следуя [23, 28], введем вспомогательное лагранжево поле и запишем

$$\mathcal{L}'_{\text{GF}} = \frac{1}{2g_0} \sum_{i=1}^N [(\partial_\mu n_i)^2 + \omega(x) n_i^2] - \frac{\omega(x)}{2g_0}; \quad (\text{B.1})$$

$$\mathcal{L}'_{\text{GN}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [i \bar{\psi}_i \partial_\mu \gamma^\mu \psi_i - \omega(x) \bar{\psi}_i \psi_i] - \frac{\omega^2(x)}{2g_0}. \quad (\text{B.1}')$$

Порождающий функционал для гриновских функций поля $n_i(x)$ ($\psi_i(x)$ в случае (1.5)) может быть представлен в виде

$$Z[J] = \frac{I[J]}{I[0]}, \quad (\text{B.2})$$

где

$$I_{\text{GF}}[J] = \int \prod_x \left[d\omega(x) \prod_i dn_i(x) \right] \times \\ \times \exp \left\{ i \int d^2x \left[\mathcal{L}'_{\text{GF}}[n_i, \omega] + (g_0)^{1/2} \sum_{i=1}^N J_i(x) n_i(x) \right] \right\}, \quad (\text{B.3})$$

$$I_{\text{GN}}[J] = \int \prod_x \left[d\omega(x) \prod_i d\psi_i(x) \right] \times \\ \times \exp \left\{ i \int d^2x \left[\mathcal{L}'_{\text{GN}}[\psi_i, \omega] + \sum_{i=1}^N \bar{J}_i(x) \psi_i(x) \right] \right\}. \quad (\text{B.3}')$$

Интегрирование по $n_i(x)$ в выражении (Б.3) (по $\psi_i(x)$ в (Б.3')) может быть проведено точно и в результате дает соотношение (несуществен-

ный множитель, сокращенный в (Б.2), опущен)

$$I_{GF}[J_i] = \int \prod_x d\omega(x) \times \\ \times \exp \left\{ i S_{GF}^{(eff)}[\omega] + \frac{i}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) J_i(x') G_{GF}(x, x' | \omega) \right\}, \quad (Б.4)$$

$$J_{GN}[J_i] = \int \prod_x d\omega(x) \times \\ \times \exp \left\{ i S_{GN}^{(eff)}[\omega] + \frac{i}{2} \int d^2x d^2x' \bar{J}_i(x) G_{GN}(x, x' | \omega) J_i(x') \right\}, \quad (Б.4')$$

где

$$S_{GF}^{(eff)} = i \frac{N}{2} \text{tr} \ln [\partial_\mu^2 - \omega(x)] - \int d^2x \frac{\omega(x)}{2g_0}, \quad (Б.5)$$

$$S_{GN}^{(eff)} = -i \frac{N}{2} \text{tr} \ln [\gamma_\mu \partial^\mu - \omega(x)] - \int d^2x \frac{\omega^2(x)}{2g_0} \quad (Б.5')$$

и $G_{GF}(x, x' | \omega)$ и $G_{GN}(x, x' | \omega)$ — гриновские функции дифференциальных операторов:

$$\partial_\mu^2 - \omega(x), \quad (Б.6)$$

$$\gamma_\mu \partial^\mu - \omega(x), \quad (Б.6')$$

соответственно.

Вычисляя интеграл (Б.4) ((Б.4')) при помощи теории возмущений, мы получим ряды по $1/N$ в модели (1.4) ((1.5)). Должна быть учтена точка стационарной фазы этого интеграла при $\omega = \tilde{\omega}$:

$$\tilde{\omega}_{GF} = m_{GF}^2 = \Lambda^2 \exp \left\{ -\frac{4\pi}{Ng_0} \right\}, \quad (Б.7)$$

$$\tilde{\omega}_{GN} = m_{GN} = \Lambda \exp \left\{ -\frac{2\pi}{Ng_0} \right\}, \quad (Б.7')$$

а функционалы $S_{GF}^{(eff)}[\omega]$ и $G_{GF}(x, x' | \omega)$ ($S_{GN}^{(eff)}[\omega]$ и $G_{GN}(x, x' | \omega)$) должны быть разложены по степеням $\omega' = \omega - \tilde{\omega}$ ¹³⁾.

От интегралов (Б.4) и (Б.4') легко перейти к простой диаграммной технике, элементы которой изображены на рис. 13, а, б, где знак $+$ ($-$) в высших вершинах соответствует случаю модели кирального (Гросса–Невью) поля.

¹³⁾ На самом деле, в (Б.4') существует две симметричных точки стационарной фазы $\tilde{\omega} = \pm m_{GN}$. Система садится в одну из них согласно эффекту Хиггса. В результате происходит спонтанное нарушение дискретной γ_5 -симметрии [28].

$$\begin{aligned}
 \frac{i}{K} \quad j &= \delta_{ij} G(K) \\
 \text{wavy line over } K^2 &= D(K^2) \\
 \frac{i}{\text{curly line}} \quad j &= i\delta_{ij} \\
 a \\
 \text{wavy line} &= \pm \text{triangle} ; \dots ; \\
 \text{wavy line} \vdots n &= \pm \text{hexagon} \vdots n ; \dots ; \\
 б
 \end{aligned}$$

Рис. 13. Элементы $1/N$ -диаграммной техники для моделей кирального поля и Гросса-Невью.

Функции, соответствующие сплошным и волнистым линиям на рис. 13, для случаев (1.4) и (1.5) будут различными:

$$G_{\text{GF}}(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (\text{Б.8})$$

$$G_{\text{GN}}(k) = i \frac{\hat{k} + m}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (\text{Б.8}')$$

и

$$[D_{\text{GF}}(k^2)]^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 p}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon) ((p+k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}, \quad (\text{Б.9})$$

$$\begin{aligned}
 [D_{\text{GN}}(k^2)]^{-1} &= \\
 &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \text{tr} \int \left[\frac{d^2 p}{(\hat{p} - m + i\varepsilon) (\hat{p} + \hat{k} - m + i\varepsilon)} - \frac{d^2 p}{(\hat{p} - m + i\varepsilon)^2} \right].
 \end{aligned} \quad (\text{Б.9}')$$

В формулах (Б.9) и (Б.9'), а также в основной части статьи нижние индексы GF и GN при массах частиц опущены.

Мы благодарны Л.Д. Фаддееву, М.С. Маринову, А.М. Полякову и К.А. Тер-Мартirosяну за интересные обсуждения и полезные замечания.

Литература

1. Березин Ф.А., Похил Г.П. и Финкельберг В.М., Вестн. Моск. Унив., Мат. Мех., 1 (1964), 21.
2. McGuire J.B., J. Math. Phys., 5 (1964), 622.
3. Gardner C.S., Green T.M., Kruskal M.D. and Miura R.M., Phys. Rev. Lett., 19 (1967), 1095.
4. Захаров В.Е., ЖЭТФ, 60 (1970), 993; Захаров В.Е. и Шабат А.Б., ЖЭТФ, 61 (1971), 118.
5. Тахтаджан Л.А. и Фаддеев Л.Д., ТМФ, 21 (1974), 160;
6. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C. and Segur H., Phys. Rev. Lett., 31 (1975), 125; McLaughlin D., J. Math. Phys., 16 (1975), 96.
7. Кулиш П.П., ТМФ, 26 (1976), 188.
8. Арефьева И.Я. и Корепин В.Е., Письма в ЖЭТФ, 20 (1974), 680.
9. Бергелес С.Н. и Гряник В.М., ЯФ, 23 (1976), 1324.
10. Schroer B., Truong T.T. and Weisz P.H., Phys. Lett. B, 63 (1976), 422.
11. Jagolnitzer D., Saclay, preprint DPh-T/77-130, 1977.
12. Karowski M., Thun H.-J., Truong T.T. and Weisz P.H., Phys. Lett. B 67 (1977), 321.
13. Корепин В.Е., Кулиш П.П. и Фаддеев Л.Д., Письма в ЖЭТФ, 21 (1975), 302.
14. Корепин В.Е. и Фаддеев Л.Д., ТМФ, 25 (1975), 147.
15. Dashen R., Hasslacher B. and Neveu A., Phys. Rev. D, 11 (1975), 3424.
16. Coleman S., Phys. Rev. D, 11 (1975), 2088.
17. Mandelstam S., Phys. Rev. D, 11 (1975), 3026.
18. Schroer B., Phys. Rep. C 23, N 3 (1976).
19. Schroer B. and Truong T.T., Phys. Rep. D, 15 (1977), 1684.
20. Polyakov A.M., Phys. Lett. B, 59 (1975), 87.
21. Муздал А.А., ЖЭТФ, 69 (1975), 1457.
22. Brezin E., Zinn-Justin J. and Le Guillou J.C., Phys. Rev. D, 14 (1976), 2615.
23. Brezin E., Zinn-Justin J., Phys. Rev. B 14 (1976), 3110.
24. Bardeen W.A., Lee B.W. and Shrock R.E., Phys. Rev. D, 14 (1976), 985.
25. Zamolodchikov A.B. and Zamolodchikov Al.B., preprint JINR E2-10857, 1977.
26. Polyakov A.M., preprint ICTP, 112, 1977.
27. Арефьева И.Я., Кулиш П.П., Нусимов Е.Р. и Пачева С.Ж., ЛОМИ-препринт E-I-1978.
28. Gross D. and Neveu A., Phys. Rev. D, 10 (1974), 3235.
29. Dashen R., Hasslacher B. and Neveu A., Phys. Rev. D, 12 (1975), 2443.
30. Замолодчиков А.Б., ИТЭФ-препринт, 12, 1977.

31. *Karowski M. and Thun H.-J.*, Nucl. Phys. B (1977), 295.
32. *Castillejo L., Dalitz R.H. and Dyson F.J.*, Phys. Rev., 101 (1956), 453.
33. *Арефьева И.Я.*, ТМФ, 26 (1976), 306.
34. *Кулиш П.П. и Нусимов Е.Р.*, ТМФ, 29 (1976), 161.
35. *Berg B., Karowski M. and Thun H.-J.*, Phys. Lett. B (1976), 63, 187.
36. *Berg B.*, Nuovo Cimento, 41 (1977), 58.
37. *Jackiw R. and Woo G.*, Phys. Rev. D, 12 (1976), 1643.
38. *Коренин В.Е.*, Письма в ЖЭТФ, 23 (1976) 224; ТМФ, 34 (1978), 3.
39. *Luter A.*, Phys. Rev. B, 14 (1976), 2153.
40. *Nussinov S.*, Phys. Rev. D, 14 (1976), 647.
41. *Kadanoff L. and Ceva H.*, Phys. Rev. B, 3 (1970), 3918.
42. *Weisz P.H.*, Nucl. Phys. B, 112 (1977), 1.
43. *Zamolodchikov A.B.*, Commun. Math. Phys., 55 (1977), 183.
44. *Calogero F.*, Lett. Nuovo Cimento, 13 (1975), 411.
45. *Olshanetsky M.A. and Perelomov A.M.*, Lett. Math. Phys., 1 (1976), 187; Invent. Math., 37 (1976), 94; ИТЭФ-препринт 172, 1976.
46. *Jaekel M.T.*, Nucl. Phys. B, 118 (1977), 506.
47. *Pohlmeyer K.*, Commun. Math. Phys., 46 (1976), 2u7.
48. *Banks T. and Zaks A.*, Nucl. Phys. B, 128 (1977), 333.
49. *Neveu A. and Papanicolaou N.*, IAS Princeton preprint COO-2220-116, 1977.
50. *Zamolodchikov A.B. and Zamolodchikov Al.B.*, Phys. Lett. B, 72 (1978), 481.
51. *Shankar R. and Witten E.*, Harvard preprint 77/AO76, 1977.
52. *Berg B., Karowski M., Kurak V. and Weisz P.*, preprint FUB/HEP 26/77, 1977.
53. *Berg B., Karowski M., Kurak V. and Weisz P.*, DESY preprint 78/09, 1978.
54. *Luscher M.*, Copenhagen preprint, NBI-HE-77-44, 1977.

ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Белавин А.А.

Функциональный анализ и его приложения. 1980. Т. 14. С. 18–26

Статья устроена по следующему плану. В первой части, носящей вводный характер, описаны уравнения треугольников (или уравнения Янга — Бакстера), которые являются закодированным выражением скрытой симметрии одномерных квантовых или классических интегрируемых систем [1]–[12], а также двумерных решеточных статистических моделей типа Бакстера [4], [8], [10]. Во второй части введен принцип инвариантности относительно дискретной подгруппы группы Лоренца, действующей независимо на состояния частиц с различными импульсами. Далее показано, что этот принцип приводит к определению всех элементов двухчастичной S -матрицы, удовлетворяющей уравнению треугольников. Таким образом показано, что скрытая симметрия систем заключается в инвариантности относительно действия указанной выше группы. В третьей части приведены примеры двухчастичных S -матриц, построенные из требования инвариантности (точнее, автоморфности) относительно действия дискретной подгруппы. В четвертой части обсуждаются возможные обобщения данного подхода, в том числе и многомерные.

1. Уравнения треугольников и интегрируемые системы

Впервые уравнения треугольников были получены Янгом [3] при рассмотрении задачи о нерелятивистских различных частицах с парным δ -функциональным взаимодействием. Янг установил, что для самосогласованности Бёте-анзатца двухчастичные амплитуды рассеяния должны подчиняться некоторым функциональным соотношениям (уравнения треугольников). Впоследствии такие же уравнения возникли в релятивистской теории рассеяния [9]–[11] как условия факторизации многочастичной S -матрицы. Факторизация S -матрицы обеспечивает сохранение числа частиц и наборов импульсов. Уравнения факторизации в релятивистской теории, включающей N различных

сортов частиц, имеют вид

$$\begin{aligned} S_{i_1 i_2}^{k_1 k_2}(u_1 - u_2) S_{k_1 i_3}^{j_1 k_3}(u_1 - u_3) S_{k_2 k_3}^{j_2 j_3}(u_2 - u_3) = \\ = S_{i_2 i_3}^{k_2 k_3}(u_2 - u_3) S_{i_1 k_3}^{k_1 j_3}(u_1 - u_3) S_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}(u_1 - u_2); \quad (1) \end{aligned}$$

здесь $S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(u_1 - u_2)$ — двухчастичная S -матрица, i_1, i_2, i_3 (j_1, j_2, j_3) обозначают сорта начальных (конечных) частиц и принимают значения от 1 до N . По повторяющим значкам k_1, k_2, k_3 в (1) происходит суммирование от 1 до N . Величины u_1, u_2, u_3 обозначают быстроты трех сталкивающихся частиц, связанные с энергией (импульсом) соотношением $E = m \operatorname{ch} v$ ($p = m \operatorname{sh} u$). Для дальнейшего нам будет удобна более компактная запись уравнения (1). Из (1) видно, что величины $S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$ перемножаются как тензорные произведения матриц. Введем вместо $S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$ обозначение S^{12} , где индексы 1 и 2 обозначают, что S^{12} является матрицей в 1-м и 2-м векторных пространствах. Еще более ясно это можно записать, введя $(I_\mu^1)_{i_1}^{j_1}, (I_\mu^2)_{i_2}^{j_2}, (I_\mu^3)_{i_3}^{j_3}$ — базис матриц $N \times N$ в 1-м, 2-м и 3-м пространствах. (Например, I_μ — матрицы Паули для $N = 2$.) Тогда $S^{12}(u) = w_{\mu\nu}(u) I_\mu^1 \otimes I_\nu^2 \otimes 1^3$. Теперь уравнение (1) принимает вид

$$\begin{aligned} S^{12}(u_1 - u_2) S^{13}(u_1 - u_3) S^{23}(u_2 - u_3) = \\ = s^{23}(u_2 - u_3) S^{13}(u_1 - u_3) S^{12}(u_1 - u_2). \quad (2) \end{aligned}$$

В ряде работ [4]–[6] Бакстер рассмотрел решеточные статистические двумерные модели. В этих моделях флуктуирующие переменные располагаются на ребрах и принимают N значений. Статистический вес данной конфигурации определяется как произведение вершинных весов $S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$, где i_1, i_2, j_1, j_2 — значения переменных на ребрах, прилегающих к данной вершине. Трансфер-матрица модели определяется следующим образом:

$$\hat{T}_{(i)}^{(j)}(u) \equiv \hat{T}_{i_1 \dots i_M}^{j_1 \dots j_M}(u) = S_{i_1 k}^{j_1 k_1}(u) S_{i_2 k_1}^{j_2 k_2}(u) \dots S_{i_M k_{M-1}}^{j_M k_M}. \quad (3)$$

Бакстер показал, что если (1) выполнено, то

$$[\hat{T}(u), \hat{T}(v)] = 0. \quad (4)$$

Выполнение соотношения (4) позволило Бакстеру найти свободную энергию восьмивершинной модели. Семейство коммутирующих $\hat{T}(u)$ связано с одномерными квантовыми спиновыми цепочками типа одномерной модели Гейзенберга. Для гамильтониана последней имеет место следующая связь с $\hat{T}(u)$:

$$\hat{H}_{\text{Гейзенб.}} = \left. \frac{d \ln \hat{T}(u)}{du} \right|_{u=0}. \quad (5)$$

Благодаря (4), модель обладает серией интегралов движения

$$[\hat{H}_{\text{Гейзенб.}}, \hat{T}(u)] = 0 \quad (6)$$

и является полностью интегрируемой на квантовом уровне. В работах Л.Д. Фаддеева, Е.К. Склянина и Л.А. Тахтаджяна [7, 8] был развит квантовый метод обратной задачи, позволяющий находить собственные векторы и собственные значения энергии для $\hat{T}(u)$, используя свойство (1). Связь между факторизованной теорией рассеяния и решаемыми решеточными теориями была установлена А.Б. Замолотчиковым [10].

Укажем, наконец, связь решений уравнений (1) с классическими системами, интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния. Впервые эта связь была установлена Е.К. Скляниным [13] для случая модели Бакстера. Будем считать $S^{12} = 1 + \hbar X^{12}$, где $\hbar \ll 1$. Тогда первый не исчезающий член в (1) или (2) имеет вид

$$[X^{12}(u), X^{13}(u+v)] + [X^{12}(u), X^{23}(v)] + [X^{13}(u+v), X^{23}(v)] = 0. \quad (7)$$

Введем явную параметризацию величин $X^{12}(u)$:

$$X^{12}(u) = v_{\mu\nu}(u) I_{\mu}^1 I_{\nu}^2; \quad (8)$$

здесь I_{μ} — базис некоторой подалгебры Ли, принадлежащей $\mathfrak{gl}(N)$, с коммутационными соотношениями со структурными константами $F_{\mu\nu}^{\lambda}$:

$$[I_{\mu}, I_{\nu}] = F_{\mu\nu}^{\lambda} I_{\lambda}. \quad (9)$$

Соотношения (7) представляют собой функциональные уравнения на величины $v_{\mu\nu}(u)$. Предположим, что (7) имеет нетривиальное решение. Введем динамические величины S_{μ} со скобками Пуассона

$$\{S_{\mu}, S_{\nu}\} = F_{\mu\nu}^{\lambda} S_{\lambda}. \quad (10)$$

Тогда в силу (7) и (10) величины

$$Q^1(u) \equiv v_{\mu\nu}(u) S_{\mu} I_{\nu}^1, \quad Q^2(u) \equiv v_{\mu\nu}(u) S_{\mu} I_{\nu}^2$$

удовлетворяют уравнениям

$$\{Q^1(u) \otimes Q^2(u+v)\} + [Q^1(u) \otimes 1^2, X^{12}(v)] + \\ + [1^1 \otimes Q^2(u+v), X^{12}(v)] = 0. \quad (11)$$

Из (11) следует, что для любых целых n и l

$$\{\text{Tr } Q^n(u), \text{Tr } Q^l(v)\} = 0. \quad (12)$$

Теперь можно включить динамику, вводя функцию гамильтониана H как след некоторой степени матрицы $Q(u_0)$ при фиксированном значении параметра $u = u_0$. Уравнения

$$\dot{S}_{\mu} = \{S_{\mu}, H\}, \quad (13)$$

как видно из (12), обладают рядом интегралов движения. Чтобы получить одномерные системы, надо ввести величины $S_\mu(x)$, зависящие не только от времени, но и от координаты x , определив между ними скобки Пуассона следующим образом:

$$\{S_\mu(x), S_\nu(y)\} = F_{\mu\nu}^\lambda S_\lambda(x) \delta(x - y). \quad (14)$$

Тогда оператор \hat{L} определяется как

$$\hat{L}(u) = \frac{\partial}{\partial x} + v_{\mu\nu}(u) S_\mu(x) I_\nu. \quad (15)$$

Вводя матрицу монодромии $M(x, x_0; u)$ ($M(x_0, x_0; u) = 1$) как решение уравнения

$$\hat{L}(u)M(x, x_0; u) = 0, \quad (16)$$

получим из уравнения, аналогичного (11), что

$$\{\text{Tr } M(x, x_0; u), \text{Tr } M(x, x_0; v)\} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, любое нетривиальное решение уравнений (1) приводит к существованию интегрируемых квантовых классических или статистических систем. Вопрос состоит в том, как обнаружить решения этих уравнений. На первый взгляд удивительно, что такие решения вообще существуют, так как число уравнений в (1) намного превосходит число неизвестных функций. Например, в случае отсутствия какой-либо симметрии существует N^4 величин $S_{i_1 i_1}^{j_1 j_2}(u)$, в то время как число уравнений (1) равно N^6 .

2. Принцип инвариантности относительно дискретной подгруппы группы Лоренца

Предположим, что мы знаем некоторое нетривиальное решение S_0^{12} уравнений (2) при $u_1 = u_2 = u_3$. Пример такого решения: $S_0^{12} = P^{12}$, где $P_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1}$. Предположим далее, что S_0^{12} остается неизменным при некоторой группе G преобразований в 1-м и 2-м векторных пространствах одновременно:

$$g^{-1} \otimes g^{-1} S_0^{12} g \otimes g = S_0^{12}, \quad g \in G.$$

Тогда справедлива теорема:

Теорема 1.

$$S_{g_2^{-1} g_1}^{12} S_{g_3^{-1} g_1}^{13} S_{g_3^{-1} g_2}^{23} = S_{g_3^{-1} g_2}^{23} S_{g_3^{-1} g_1}^{13} S_{g_2^{-1} g_1}^{12}, \quad (18)$$

где $S_g^{12} \stackrel{\text{def}}{=} g^{-1} \otimes 1 S_0^{12} g \otimes 1$, $g_1, g_2, g_3 \in G$.

Доказательство осуществляется прямой подстановкой в (1) или (2).

Мы воспользуемся этим фактом следующим образом. Рассмотрим целочисленную решетку в комплексной плоскости быстрой

$$u_k = k_1 + \tau k_2. \quad (19)$$

Здесь $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ — целочисленный вектор на решетке, τ — комплексное число ($\text{Im } \tau > 0$). Поставим в соответствие каждой точке решетки k матрицу G_k размера $N \times N$ из $GL(N)$. Потребуем, чтобы матрицы G_k обладали следующими свойствами:

$$G_k G_l = s(\mathbf{k}, l) G_{\mathbf{k}+l}, \quad G_{\mathbf{k}}^{-1} = G_{-\mathbf{k}}, \quad G_0 = 1. \quad (20)$$

Здесь $s(\mathbf{k}, l)$ — некоторый скалярный множитель. Тем самым требуется, чтобы матрицы G_k образовывали представление (проективное из-за $s(\mathbf{k}, l)$) коммутативной группы сдвигов по решетке.

Теперь легко проверить, что с помощью матриц G_k , можно построить решение (1) во всех точках решетки:

$$S^{12}(u_k) = G_{\mathbf{k}}^{-1} P^{12} G_{\mathbf{k}} = G_{\mathbf{k}} P^{12} G_{\mathbf{k}}^{-1}. \quad (21)$$

Здесь значок 1 под матрицей G_k обозначает, что она действует лишь на индексы i_1, j_1 частиц с быстротой u_1 , то же относится к значку 2. Второе равенство в (21) вытекает из инвариантности $S^{12}(0) = P^{12}$ при любом преобразовании из $GL(N)$. В силу групповых свойств (20) G_k имеет вид

$$G_k \equiv G_{k_1 k_2} = g^{k_1} h^{k_2}; \quad (22)$$

здесь $g \equiv G_{1,0}$, $h \equiv G_{0,1}$. Требование (20) будет выполнено, если

$$gh = \omega hg, \quad (23)$$

где ω — скалярный множитель — матрица вида

$$\begin{pmatrix} \omega & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega \end{pmatrix}.$$

Последнее, что нам осталось сделать, это восстановить аналитическую мероморфную матрицу $S^{12}(u)$, которую из (21) мы знаем во всех точках решетки. В силу мероморфности S -матрицы ее с точностью до скалярного множителя, который сокращается в (1), можно считать целой функцией. Из (21) видно, что

$$\begin{aligned} S^{12}(u_{\mathbf{k}} + 1) &= g^{-1} S^{12}(u_{\mathbf{k}}) g = g(u_{\mathbf{k}}) g^{-1}, \\ S^{12}(u_{\mathbf{k}} + \tau) &= \lambda h^{-1} S^{12}(u_{\mathbf{k}}) h = \lambda h^{S^{12}}(u_{\mathbf{k}}) h^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Потребуем теперь, чтобы при произвольных u матрица $S^{12}(u)$ обладала теми же свойствами:

$$S^{12}(u+1) = g_1^{-1} S^{12}(u) g_1 = g_2 S^{12}(u) d_2^{-1}, \quad (25')$$

$$S^{12}(u+\tau) = \lambda \exp(2\pi i u) h_1^{-1} S^{12}(u) h_1 = \lambda \exp(2\pi i u) h_2 S^{12}(u) h_2^{-1}; \quad (25'')$$

здесь для совместности с (25') множитель в (25') должен быть выбран периодической функцией u ; требования автоморфности (25'), (25'') вместе с начальным условием $S^{12}(0) = P^{12}$ однозначно определяют двухчастичную S^{12} -матрицу. Решение (25) можно найти, например, разложением $S^{12}(u)$ в ряд Фурье. Для того чтобы построенная таким образом матрица $S^{12}(u)$ являлась решением (1), матрицы g и h должны удовлетворять некоторым условиям, которые будут продемонстрированы ниже.

Вспомним теперь, что аргумент $S^{12}(u)$ равен разности быстрот сталкивающихся частиц $u = u_1 - u_2$. Поэтому (25) обозначают требования инвариантности двухчастичной S -матрицы при дискретном преобразовании Лоренца одного из импульсов частиц (например, отвечающего быстрой u_1), участвующих в столкновении, сопровождаемом некоторым преобразованием одной из частиц в начале и одной в конце с быстротой u_1 в себя или в частицу другого сорта (преобразование с матрицами g и h). Рассмотрим теперь пример, который позволит осуществить описанную выше конструкцию явно.

3. $Z_N \times Z_N$ -симметричная S -матрица

Возьмем в качестве g и h матрицы, для которых $g^N = h^N = 1$, $\omega = \exp(2\pi i/N)$; их можно выбрать в виде

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega^{N-1} \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Далее удобно ввести следующий полный базис матриц $N \times N$:

$$I_\alpha \equiv I_{\alpha_1, \alpha_2} = g^{\alpha_1} h^{\alpha_2}, \quad (27)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \dots, N-1$. Для $N=2$ $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, поэтому $I_{0,0} = 1$, $I_{1,0} = \sigma_z$, $I_{0,1} = \sigma_x$, $I_{1,1} = i\sigma_y$. Любую матрицу $S^{12}(u)$ можно записать в виде

$$S^{12}(u) = w_{\alpha, \beta}(u) I_\alpha^1 \otimes I_\beta^2. \quad (28)$$

Из вторых равенств в (25), (26) следует ограничение на $S^{12}(u)$, $Z_N \times \times Z_N$ инвариантность:

$$S^{12}(u) = w_\alpha(u) I_\alpha^1 \otimes \bar{I}_\alpha^2. \quad (29)$$

Черта над I_α обозначает эрмитово сопряжение. Легко проверить, что

$$S^{12}(0) = P^{12} = I_\alpha^1 \otimes \bar{I}_\alpha^2. \quad (30)$$

Подставляя (29) и (26) в (25) и (30), получим

$$\begin{aligned} w_\alpha(u+1) &= \omega^{\alpha_2} w_\alpha(u), & w_\alpha(u+\tau) &= \lambda \exp(2\pi i u) \omega^{\alpha_1} w_\alpha(u), \\ w_\alpha(0) &= 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Решение (31) достигается разложением в ряд Фурье и имеет вид

$$w_\alpha(u) = \frac{\Theta_\alpha(u+\eta)}{\Theta_\alpha(\eta)}; \quad (32)$$

здесь

$$\Theta_\alpha(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left[i\pi \left(m + \frac{\alpha_2}{N} \right)^2 \tau + 2\pi i \left(m + \frac{\alpha_2}{N} \right) \left(u + \frac{\alpha_1}{N} \right) \right]. \quad (33)$$

Гипотеза. $S^{12}(u)$, даваемая формулами (29), (32), (33), удовлетворяет (1).

Для $N = 2$ это решение совпадает с рассмотренным Бакстером [5], [6] Покажем теперь на этом примере, как (25) уменьшает число уравнений в (1) до числа неизвестных функций. Из (29) видно, что число функции w_α равно N^2 . С помощью сдвигов на τ и (25'') любое уравнение из (1) можно превратить в уравнение, для которого $i_1 = i_2 = i_3 = 1$. Кроме того, из (25) следует, что

$$j_1 + j_2 + j_3 = i_1 + i_2 + i_3 \pmod{N}.$$

Таким образом, число уравнений также равно N^2 .

Способом, аналогичным описанному выше, можно построить решение уравнений (1) через Θ -функции многих переменных. Для этого достаточно заменить величину u n -мерным вектором u , а индексы i, j также считать векторными: $i = (i_1, \dots, i_n)$, $j = (j_1, \dots, j_n)$. Вместо уравнений (25) следует ввести требование автоморфности относительно $2n$ сдвигов

$$\begin{aligned} u_\alpha &\rightarrow u_\alpha + \delta_{\alpha\beta}, & u_\alpha &\rightarrow u_\alpha + \tau_{\alpha\beta}, & \alpha, \beta &= 1, \dots, n, \\ & & \operatorname{Im} |\tau_{\alpha\beta}| &> 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Матрицы g и h очевидным образом заменяются на $2n$ матриц g_α и h_α . Например, $g_\alpha = 1 \otimes \dots \otimes g \otimes \dots \otimes 1$, и аналогичное выражение для матриц h_α . Здесь индекс α обозначает, что матрица g_α действует на значки i_α, j_α как g , а на остальные — как единичная.

Доказательство того, что построенные таким образом $S^{12}(u)$ удовлетворяют (1) при всех u , должно использовать факт выполнения (1) при $u_1 = u_2 = u_3$. Поскольку прямое доказательство и тем самым ограничения на вид g и h в настоящее время неизвестны, ниже будут приведены косвенные аргументы в пользу того, что (32) удовлетворяют (1).

4. Анализ уравнений (7)

Как следует из (33), $\Theta_{0,0}(1 + \tau) = 0$. Возьмем величину η в (32) близкой к $1 + \tau$,

$$\eta = 1 + \tau + \hbar, \quad \hbar \ll 1. \quad (35)$$

Тогда $s^{12}(u)$ с точностью до множителя будет иметь вид

$$S^{12}(u) = 1 + \hbar X^{12}(u). \quad (36)$$

Теорема 2. $S^{12}(u)$ удовлетворяет (1) с точностью до \hbar^2 .

Величина $X^{12}(u)$ является уже мероморфной двоякопериодической функцией, поскольку множитель $\Theta_{0,0}(u)$ был вынесен при получении (36). Ниже мы докажем, что $x^{12}(u)$ удовлетворяет уравнению (7). Это свидетельствует о том, что полная $S^{12}(u)$ -матрица, даваемая уравнением (32), удовлетворяет уравнению (1). Другим аргументом в пользу этого является прямая проверка (1), выполненная Бабуджяном и Тетельманом в вырожденном случае, получающемся из (32) при $\tau \rightarrow \infty$.

Теперь мы рассмотрим уравнения (7). Это имеет самостоятельную ценность в силу упомянутой выше связи этих уравнений с классическими интегрируемыми системами.

Заметим, что впервые уравнения (7) были исследованы П.А. Фатеевым, получившим ряд интересных результатов.

Предположим, что решение (7) имеет лишь один полюс при u_0 :

$$X^{12}(u) = \frac{t_0^{12}}{u - u_0}. \quad (37)$$

Подстановка (37) в (7) показывает, что это возможно лишь в двух случаях: либо $u_0 \neq 0$, но

$$[t_0^{12}, t_0^{13}] = 0, \quad (38)$$

либо $u_0 = 0$,

$$[t_0^{12}, t_0^{13}] + [t_0^{12}, t_0^{23}] = 0. \quad (39)$$

Рассмотрим пока вторую возможность (39). Нетрудно проверить, что (39) будет удовлетворяться, если

$$t^{12} = I_\mu^1 \otimes I_\mu^2, \quad (40)$$

где I_μ образуют базис некоторой подалгебры Ли, принадлежащей $\mathfrak{gl}(N)$, и $\text{tr } I_\mu I_\nu = \delta_{\mu\nu}$. Можно показать также, что (40) является общим решением (39).

Допустим теперь, что $X^{12}(u)$ обладает несколькими полюсами. Тогда уравнения (7) показывают, что сумма положений двух полюсов должна быть положением другого полюса, если снова опустить возможность типа (38). Тем самым мы приходим к заключению, что полюса $X^{12}(u)$ образуют решетку

$$X^{12}(u) \rightarrow \frac{t_{\mathbf{k}}^{12}}{u - k_1 - \tau k_2}; \quad (41)$$

при $u \rightarrow k_1 + \tau k_2$, $\text{Im} \tau > 0$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ имеют место следующие соотношения на вычеты:

$$\begin{aligned} [t_{\mathbf{k}}^{12}, t_{\mathbf{k}+1}^{13}] + [t_{\mathbf{k}}^{12}, t_1^{23}] &= 0, & [t_{\mathbf{k}}^{21}, t_{\mathbf{k}+1}^{31}] + [t_{\mathbf{k}}^{21}, t_1^{32}] &= 0, \\ [t_{\mathbf{k}}^{12}, t_{\mathbf{k}+1}^{13}] + [t_{\mathbf{k}}^{12}, t_{-1}^{32}] &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

При $\mathbf{k} = 1 = 0$ (42) совпадают с (39), полное решение которых (40) нам известно. Все уравнения (42) удастся удовлетворить, если существуют матрицы $G_{\mathbf{k}}$, образующие проективное представление группы сдвигов на решетке, т.е.

$$G_{\mathbf{k}} G_{\mathbf{l}} = s(\mathbf{k}, \mathbf{l}) G_{\mathbf{k}+\mathbf{l}}, \quad G_{\mathbf{k}} = G_{-\mathbf{k}}, \quad G_0 = 1. \quad (43)$$

Теперь можно записать решение (42) в виде

$$t_{\mathbf{k}}^{12} = (G_{\mathbf{k}}^{-1} I_{\mu}^1 G_{\mathbf{k}}) \otimes I_{\mu}^2 = I_{\mu}^1 \otimes (G_{\mathbf{k}} I_{\mu}^2 G_{\mathbf{k}}^{-1}). \quad (44)$$

Второе равенство в (44) требует, чтобы матрица $G_{\mathbf{k}}$ принадлежала той же группе Ли, для которой I_{μ} образуют алгебру Ли. Из (44) видно, что групповые свойства (43) должны быть выполнены с точностью до множителя, пропорционального единичной матрице (т.е. $G_{\mathbf{k}}$ образуют проективное представление). Теперь мы, как и раньше, можем ввести образующие

$$g \equiv G_{1,0}, \quad h \equiv G_{0,1} \quad (45)$$

и записать $G_{\mathbf{k}}$ в виде

$$G_{\mathbf{k}} = g^{k_1} h^{k_2}, \quad (46)$$

$$gh = \omega hg. \quad (46')$$

Для продолжения решения на произвольные u потребуем, чтобы g и h были элементами конечного порядка¹⁾. Например,

$$g^N = h^N = 1, \quad \omega = \exp\left(\frac{2\pi i e}{N}\right). \quad (47)$$

¹⁾ Как объяснил мне С.П. Новиков, это следует из теории конечномерных представлений группы (46').

Требуя, чтобы матрица $X^{12}(u)$ удовлетворяла свойствам автоморфности, согласованным с (44), получим

$$X^{12}(u+1) = g^{-1} X^{12}(u) g, \quad X^{12}(u+\tau) = h^{-1} X^{12}(u) h. \quad (48)$$

Спрашивается, при каких условиях на g и h существует мероморфная функция, удовлетворяющая (48). Как видно из (48), $X^{12}(u)$ является двоякопериодической функцией с вещественным периодом N и комплексным $N\tau$. Такая функция существует и определяется с точностью до прибавления константы (при задании вычетов и положения полюсов), если сумма вычетов в параллелограмме периодов равна нулю. Тем самым с учетом (44) мы имеем следующие условия на g и h :

$$\sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_1=0}^{N-1} G_k^{-1} I_\mu G_k = 0 \quad \text{для всех } \mu. \quad (49)$$

Наконец, константа исключается условием автоморфности (48). Нетрудно понять, что в силу той же теоремы Лиувилля построенная таким образом функция $X^{12}(u)$ действительно удовлетворяет (7). Если взять в качестве g и h матрицы (26), а в качестве генераторов I_α (27), то все условия, включая (49), будут удовлетворены. С другой стороны, именно это решение получается предельных переходом (35) из выражения (32). Тем самым мы частично доказали, что (32) удовлетворяет (1).

5. Заключение

Обобщения данного подхода возможны по различным линиям. Во-первых, тензорное произведение трех N -мерных векторных пространств можно заменить на три различных линейных пространства. Например, индексы i, j могут принимать непрерывные значения. Тем самым S^{12} из тензорного произведения матриц превращается в тензорное произведение линейных интегральных операторов. Во-вторых, аргументами S^{12} можно считать два вектора p_1 и p_2 , на которые действует некоторая группа движений, отличная от группы Лоренца; при этом требуется, чтобы $S^{12}(p_1, p_2)$ была инвариантом относительно действия группы. Уравнение (2) теперь примет вид

$$S^{12}(p_1, p_2) S^{13}(p_1, p_3) S^{23}(p_2, p_3) = S^{23}(p_2, p_3) S^{13}(p_1, p_3) S^{12}(p_1, p_2). \quad (50)$$

Теперь роль сдвигов по решетке должна играть дискретная подгруппа данной группы движения, действующая отдельно на p_1, p_2 или p_3 . Интересным является вопрос о нахождении собственных векторов квантовых операторов типа (5) и трансфер-матриц из требования, чтобы эти векторы преобразовывались по представлениям дискретной подгруппы.

Наконец, самым интересным является вопрос о многомерных интегрируемых системах. В замечательной работе А.Б. Замолотчикова [12] был сделан важный шаг в этом направлении. А.Б. Замолотчиков рассмотрел трехмерные решеточные системы, обладающие свойствами, аналогичными (1). При интерпретации на языке теории рассеяния роль частиц при его подходе играют бесконечные одномерные релятивистские струны, испытывающие тройные столкновения в двумерном пространстве (+ время). Роль уравнений треугольников (1) играют уравнения тетраэдров на амплитуды трехструнного столкновения. Эта величина зависит от единичных векторов \mathbf{n}_i , нормальных к мировой плоскости распространения струны, лоренц-инвариантным образом, т.е. S^{123} зависит от скалярных произведений векторов \mathbf{n}_i , \mathbf{n}_j . Возможно, что величина $S^{123}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ может быть определена из требования автоморфности относительно действия какой-либо дискретной подгруппы группы Лоренца, т.е. группы вещественных унимодулярных матриц второго порядка.

Я особенно благодарен Александру Замолотчикову и В. Фатееву за многочисленные обсуждения и сотрудничество.

Я очень признателен И. Череднику и А. Михайлову за разъяснение мне очень интересной работы [14, 15] Л. Михайлова. В этой работе идея автоморфности относительно действия дискретной группы в комплексной плоскости спектрального параметра была впервые применена при анализе проблемы редукции в уравнениях Захарова-Шабата. Я также благодарен за помощь и обсуждения Е.И. Рябовой, Г. Бабуджяну, В. Гурарию, С. Манакову, С.П. Новикову, А. Полякову, М. Тетельману и Г. Элнашбергу.

Литература

1. *Bethe H.*, Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen Atomkette, Z. Phys. 71, N 3-4 (1931), 205-226.
2. *Onsager L.*, Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition, Phys. Rev., 65 (1944), 117-149.
3. *Yang C.N.*, Exact solution of the problem of n -particles with δ -interaction, Phys. Rev., 168 (1968), 1920-1925.
4. *Baxter R.J.*, Partition function of the eight-vertex lattice model, Ann. Phys. (N.Y.), 70 (1972), 323-337.
5. *Baxter R.J.*, Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain, Ann. Phys., 76 (1973), 1-71.
6. *Baxter R.J.*, Z-invariant models in lattice statistics, Phil. Trans. Roy. Soc. 289 (1978), 315-340.
7. *Фаддеев Л.Д., Склянин П.К., Тахтаджян Л.А.*, Квантовый метод обратной задачи и уравнение Синус-Гордон, Препринт ЛОМИ Р-I-79, Ленинград, 1979.

8. *Фаддеев Л.Д.*, Квантовый метод обратной задачи расстояния, Препринт ЛОМИ Р-2-79, Ленинград, 1979.
9. *Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov Al.B.*, Relativistic factorised S -matrixs, Ann. Phys. (N.Y.), 120 (1979), 253—278.
10. *Zamolodchikov A.B.*, Factorised S -matrixs and exact soluable lattice models, Sov. sciencs, Rev., Phys. Rev., 2 (1980), 100—135.
11. *Karowski M., Thun H., Truong T., Weisz P.*, On the uniqueness of a purely elastic S -matrix in $(1 + 1)$ dimensions, Phys. Letters, 67B (1977), 321—322.
12. *Замолодчиков А.Б.*, Уравнение тетраэдров и трехмерные интегрируемые системы, ЖЭТФ, 79, № 8 (1980), 641—664.
13. *Склянин В.К.*, Уравнение Ландау—Лифшица и модель Бакстера, Препринт ЛОМИ Е-3-1979, Ленинград, 1979.
14. *Михайлов А.В.*, Проблема редукций в условиях Захарова—Шабата, Письма в ЖЭТФ, 30 (1979), 443—447.
15. *Михайлов А.В.*, Проблема редукции в уравнениях Захарова—Шабата, Труды киевской конференции, 1979.

О РЕШЕНИЯХ КЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЯНГА–БАКСТЕРА ДЛЯ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

Белавин А.А., Дринфельд В.Г.

Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16. С. 1–29

1. Введение

1.1. Классическим уравнением Янга–Бакстера называется функциональное уравнение

$$|X^{12}(u_1, u_2), X^{13}(u_1, u_3)| + |X^{12}(u_1, u_2), X^{23}(u_2, u_3)| + \\ + |X^{13}(u_1, u_3), X^{23}(u_2, u_3)| = 0 \quad (1.1)$$

относительно функции $X(u_1, u_2)$, принимающей значения в $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, где \mathfrak{g} — алгебра Ли. Поясним смысл обозначений типа $X^{13}(u_1, u_3)$. Зафиксируем ассоциативную алгебру A с единицей, содержащую \mathfrak{g} . $X^{13}(u_1, u_3)$ — это, по определению, образ $X(u_1, u_3)$ при линейном отображении $\varphi_{13}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow A \otimes A \otimes A$, заданном формулой $\varphi_{13}(a \otimes b) = a \otimes 1 \otimes b$. Аналогичный смысл имеют обозначения $X^{12}(u_1, u_2)$ и $X^{23}(u_2, u_3)$ (отметим лишь, что $\varphi_{12}(a \otimes b) \stackrel{\text{def}}{=} a \otimes b \otimes 1$, $\varphi_{23}(a \otimes b) \stackrel{\text{def}}{=} 1 \otimes a \otimes b$). Легко видеть, что каждое из трех слагаемых левой части (1.1) принадлежит $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ и не зависит от выбора A . Уравнение (1.1) играет важную роль в теории классических и квантовых интегрируемых систем (см. [1], [5]).

Заметим, что если $X(u_1, u_2)$ — решение уравнения (1.1), а $\varphi(u)$ — функция со значениями в $\text{Aut } \mathfrak{g}$, то

$$\tilde{X}(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(u_1) \otimes \varphi(u_2))X(u_1, u_2)$$

тоже является решением (1.1). Решения X и \tilde{X} мы будем называть эквивалентными. Прежде, чем формулировать еще один способ размножения решений уравнения (1.1), введем следующее

Определение. Функция $X(u_1, u_2)$ называется инвариантной относительно $g \in \text{Aut } \mathfrak{g}$, если $(g \otimes g)X(u_1, u_2) = X(u_1, u_2)$. Множество всех таких g называется группой инвариантности функции $X(u_1, u_2)$. Функция $X(u_1, u_2)$ называется инвариантной относительно $h \in \mathfrak{g}$, если $[h \otimes 1 + 1 \otimes h, X(u_1, u_2)] = 0$ (т.е. если она инвариантна относительно $e^{t \cdot \text{ad } h}$ при любом t).

Второй способ размножения решений уравнения (1.1) заключается в следующем: если $X(u_1, u_2)$ — решение уравнения (1.1), инвариантное относительно подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, а тензор $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ удовлетворяет уравнениям

$$[r^{12}, r^{13}] + [r^{12}, r^{23}] + [r^{13}, r^{23}] = 0, \quad (1.2)$$

$$r^{21} = -r^{12}, \quad (1.3)$$

то функция $\tilde{X}(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} X(u_1, u_2) + r$ тоже является решением (1.1). В этом легко убедиться прямым вычислением. Заметим, что если алгебра \mathfrak{h} — абелева, то уравнение (1.2) выполняется автоматически.

Часто на решения уравнения (1.1) налагают следующие дополнительные условия:

а) так называемое условие унитарности

$$X^{12}(u_1, u_2) = -X^{21}(u_2, u_1),$$

б) требование, чтобы функция $X(u_1, u_2)$ зависела только от $u_1 - u_2$ (в этом случае мы будем, допуская некоторую вольность, писать $X(u_1 - u_2)$ вместо $X(u_1, u_2)$).

Ясно, что свойство а) сохраняется при обоих рассмотренных выше способах размножения решений, а свойство б) сохраняется при втором способе, но не всегда при первом. Если $X(u_1 - u_2)$ — решение уравнения (1.1), то, вообще говоря, неясно, существует ли непостоянная функция $\varphi(u)$ со значениями в $\text{Aut } \mathfrak{g}$ такая, что функция $\tilde{X}(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(u_1) \otimes \varphi(u_2))X(u_1 - u_2)$ зависит только от $u_1 - u_2$. Если, однако, группа инвариантности G решения $X(u_1 - u_2)$ недискретна, то можно положить $\varphi(u) = e^{uP}$, где P — любой элемент алгебры Ли группы G . Например, если решение $X(u_1 - u_2)$ инвариантно относительно $h \in \mathfrak{g}$, то можно положить $\varphi(u) = e^{u \cdot \text{ad } h}$.

Отметим, что для функций $X(u_1, u_2)$, зависящих только от $u_1 - u_2$, уравнение (1.1) записывается в виде

$$[X^{12}(u), X^{13}(u+v)] + [X^{12}(u), X^{23}(v)] + [X^{13}(u+v), X^{23}(v)] = 0, \quad (1.4)$$

а условие унитарности — в виде $X^{12}(u) = -X^{21}(-u)$.

1.2. В настоящей работе уравнение (1.4) исследуется в предположении, что \mathfrak{g} — конечномерная простая алгебра Ли над \mathbb{C} . Кроме того, мы будем искать решения $X(u)$ в классе мероморфных функций, заданных в некотором круге $U \subset \mathbb{C}$ с центром в нуле и удовлетворяющих одному из следующих трех условий, эквивалентность которых будет доказана в § 2:

А) определитель матрицы, образованной координатами тензора $X(u)$, не равен нулю тождественно;

Б) функция $X(u)$ имеет хотя бы один полюс, и не существует подалгебры Ли $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ такой, что $X(u) \in \mathfrak{g}' \otimes \mathfrak{g}'$ при любом u ,

В) функция $X(u)$ имеет при $u = 0$ полюс первого порядка с вычетом вида $c \sum_{\mu} I_{\mu} \otimes I_{\mu}$, где $c \in \mathbb{C}$, $\{I_{\mu}\}$ — ортонормированный базис в \mathfrak{g} относительно формы Киллинга.

Такие решения уравнения (1.4) будем называть невырожденными. Наш первый основной результат заключается в следующем.

Теорема 1.1. *Любое невырожденное решение $X(u)$ уравнения (1.4) удовлетворяет также условию унитарности и мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость. Все полюса $X(u)$ простые. Они образуют дискретную подгруппу $\Gamma \subset \mathbb{C}$. Существует гомоморфизм $A: \Gamma \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$ такой, что для любых $w \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ $X(u + \gamma) = (A(\gamma) \otimes 1)X(u) = (1 \otimes A(\gamma)^{-1})X(u)$. Если Γ имеет ранг 2, то ограничение A на некоторую подгруппу конечного индекса $\Gamma' \subset \Gamma$ тривиально, так что $X(u)$ — эллиптическая функция. Если Γ имеет ранг 1, то $X(u)$ эквивалентно решению $\tilde{X}(u)$ вида $f(e^{ku})$, где f — рациональная функция. Если $\Gamma = 0$, то $X(u)$ эквивалентно рациональному решению.*

Эта теорема доказывается в § 4 с помощью полученного в § 3 аналога классической теоремы Вейерштрасса о функциях, обладающих алгебраической теоремой сложения. В § 5 доказывается, что невырожденные решения уравнения (1.4) в эллиптических функциях существуют только при $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ и что все они исчерпываются решениями, найденными в [1]. В § 6 мы находим все невырожденные решения уравнения (1.4) вида $X(u) = f(e^{ku})$, где f — рациональная функция (такие решения мы называем тригонометрическими). Оказывается, что с точностью до описанных в пункте 1.1 способов размножения решений и таких тривиальных преобразований, как умножение решения на число и замена u на cu , число невырожденных тригонометрических решений уравнения (1.4) конечно.

Кроме того, мы показываем, что простейшие тригонометрические решения являются классическими r -матрицами (в смысле [5], с. 141), соответствующими цепочкам Тоды–Богоявленского [10].

К сожалению, нам не удалось получить существенных результатов о рациональных решениях уравнения (1.4). Даже задача нахождения рациональных решений, не имеющих полюса на бесконечности, представляется весьма сложной. Нам удалось найти лишь некоторые способы построения таких решений. Эти способы приведены в § 7.

2. Эквивалентность трех определений невырожденности

2.1. Напомним, что \mathfrak{g} обозначает конечномерную простую алгебру Ли над \mathbb{C} . Зафиксируем невырожденную инвариантную билинейную форму на \mathfrak{g} . Выберем в \mathfrak{g} базис $\{I_{\mu}\}$, ортонормированный относительно

но этой формы, и положим $t = I_\mu \otimes I_\mu$ (здесь и в дальнейшем подразумевается суммирование по одинаковым индексам). Легко видеть, что t не зависит от выбора $\{I_\mu\}$. Пусть $X(u)$ — мероморфное решение уравнения (1.4), определенное в некотором круге $U \subset \mathbb{C}$, содержащем 0.

Предложение 2.1. Допустим, что 1) функция $X(u)$ имеет хотя бы один полюс, 2) не существует подалгебры Ли $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$, отличной от \mathfrak{g} и такой, что $X(u) \in \mathfrak{g}' \otimes \mathfrak{g}'$ при любом u . Тогда а) все полюсы $X(u)$ простые, б) функция $X(u)$ имеет полюс при $u = 0$ с вычетом вида ct , $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Пусть $X(u)$ имеет при $u = \gamma$ полюс порядка k , положим $\tau = \lim_{k \rightarrow \gamma} (u - \gamma)^k X(u)$. Умножив обе части уравнения (1.4) на $(v - \gamma)^k$ и устремив v к γ , получим

$$[X^{12}(u), \tau^{23}] + [X^{13}(u + \gamma), \tau^{23}] = 0. \quad (2.1)$$

Точно так же, устремив в уравнении (1.4) u к γ , получим

$$[\tau^{12}, X^{13}(v + \gamma)] + [\tau^{12}, X^{23}(v)] = 0. \quad (2.2)$$

Лемма. $[\tau^{12}, \tau^{13}] \neq 0$.

Доказательство. Пусть $V \subset \mathfrak{g}$ — наименьшее векторное пространство такое, что $\tau \in V \otimes \mathfrak{g}$. Положим $\mathfrak{g}' = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, V] \subset V\}$. Ясно, что $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра Ли. Так как $[X^{13}(u + \gamma), \tau^{23}] \in \mathfrak{g} \otimes V \otimes \mathfrak{g}$, то из (2.1) следует, что $[X^{12}, \tau^{23}] \in \mathfrak{g} \otimes V \otimes \mathfrak{g}$, т.е. $X(u) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}'$. Точно так же из (2.2) выводится, что $X(v + \gamma) \in \mathfrak{g}' \otimes \mathfrak{g}$ при любом v . Таким образом, $X(u) \in \mathfrak{g}' \otimes \mathfrak{g}'$ при любом u . Следовательно, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, т.е. $[\mathfrak{g}, V] \subset V$. Отсюда и из простоты \mathfrak{g} следует, что $V = \mathfrak{g}$. Поэтому $[\tau^{12}, \tau^{13}] \neq 0$.

Из леммы следует, что функция $X(u)$ имеет при $u = 0$ полюс порядка не меньше, чем k : в противном случае, устремив в равенстве (2.2) v к нулю, имели бы $[\tau^{12}, \tau^{13}] = 0$. Остается доказать, что порядок полюса $X(u)$ при $u = 0$ не превосходит единицы и $\lim_{u \rightarrow 0} uX(u) = ct$.

Пусть

$$X(u) = \frac{\theta}{u^l} + \frac{A}{u^{l-1}} + \sum_{i=2-l}^{\infty} X_i u^i, \quad \theta \neq 0.$$

Если $l > 1$, то зафиксировав v и приравняв к нулю коэффициент при u^{1-l} ряда Лорана в точке $u = 0$ левой части (1.4), получим

$$[A^{12}, X^{13}(v) + X^{23}(v)] + \left[\theta^{12}, \frac{dX^{13}(v)}{dv} \right] = 0.$$

Устремив теперь v к нулю, получим $[\theta^{12}, \theta^{13}] = 0$, что противоречит лемме. Итак, $l = 1$.

Положив в равенстве (2.1) $\gamma = 0$, $\tau = \theta$, получим

$$[X^{12}(u) + X^{13}(u), \theta^{23}] = 0. \quad (2.3)$$

Точно так же из (2.2) следует, что

$$[\theta^{(2)}, X^{13}(u) + X^{23}(u)] = 0. \quad (2.4)$$

Положим $\mathfrak{g}' = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x \otimes 1 + 1 \otimes x, \theta] = 0\}$, \mathfrak{g}' — подалгебра Ли в \mathfrak{g} . Равенства (2.3) и (2.4) означают, что $X(u) \in \mathfrak{g}' \otimes \mathfrak{g}'$ при любом u . Поэтому $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, т.е. $[x \otimes 1 + 1 \otimes x, \theta] = 0$ при любом $x \in \mathfrak{g}$. Отсюда следует, что θ пропорционально t .

Итак, мы доказали, что из условия Б), сформулированного в пункте 1.2, следует В). Ясно, что из В) следуют А) и Б). Поэтому для доказательства эквивалентности всех трех условий остается доказать, что не существует решения $X(u)$ уравнения (1.4), голоморфного в U , такого, что при некотором u тензор $X(u)$ невырожден. Это будет сделано в оставшейся части параграфа.

2.2. Предложение 2.2. Пусть решение $X(u)$ уравнения (1.4) голоморфно в U и существует $u_0 \in U$ такое, что тензор $X(u_0)$ невырожден. Тогда тензор $X(0)$ тоже невырожден.

Доказательство. Положим в соотношении (1.4) $v = 0$, получим

$$[X^{12}(u), X^{13}(u)] + [X^{12}(u) + X^{13}(u), X^{23}(0)] = 0.$$

Пусть $X(u) = K^\mu \otimes I_\mu$. Тогда

$$[K^\mu(u), K^\nu(u)] \otimes I_\mu \otimes I_\nu + K^\lambda(u) \otimes [I_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes I_\lambda, X(0)] = 0,$$

откуда

$$[K^\mu(u), K^\nu(u)] = C_{\lambda}^{\mu\nu} K^\lambda(u), \quad (2.5)$$

где $C_{\lambda}^{\mu\nu}$ находятся из соотношения $C_{\lambda}^{\mu\nu} I_\mu \otimes I_\nu = [X(\theta), I_\lambda \otimes 1 \otimes I_\lambda]$. По условию, векторы $K^\mu(u_0)$ образуют базис в \mathfrak{g} . Поэтому для любого $u \in U$ существует ровно один линейный оператор $\varphi_u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ такой, что $\varphi_u(K^\mu(u_0)) = K^\mu(u)$. При этом φ_u голоморфно зависит от u . Надо доказать, что $\det \varphi_0 \neq 0$. Из соотношения (2.5) следует, что φ_u — эндоморфизм \mathfrak{g} как алгебры Ли.

Лемма. Пусть φ — эндоморфизм \mathfrak{g} как алгебры Ли. Тогда $\det \varphi \in \{0, 1, -1\}$.

Доказательство. Допустим, что $\varphi \neq 0$. Из простоты \mathfrak{g} следует, что тогда φ — автоморфизм и, следовательно, сохраняет форму Киллинга. Поэтому $\det \varphi = \pm 1$.

Так как $\varphi_u = 1$ и φ голоморфно зависит от u , то из леммы следует, что $\det \varphi_u = 1$ при любом u . В частности, $\det \varphi_0 = 1$.

Ясно, что если $X(u)$ — решение (1.4), голоморфное при $u = 0$, то тензор $r \stackrel{\text{def}}{=} X(0)$ удовлетворяет соотношению (1.2).

Предложение 2.3. Пусть $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ — невырожденное решение уравнения (1.2). Тогда r удовлетворяет также (1.3).

Доказательство. Пусть

$$r = K^\mu \otimes I_\mu = I_\mu \otimes L_\mu.$$

Невырожденность r означает, что $\{K^\mu\}$ и $\{L^\mu\}$ — базисы в \mathfrak{g} . Определим $C_\lambda^{\mu\nu}$ из соотношения $C_\lambda^{\mu\nu} I_\mu \otimes I_\nu = [r, I_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes I_\lambda]$. Рассуждая так же, как при доказательстве предыдущего предложения, получим

$$[K^\mu, K^\nu] = C_\lambda^{\mu\nu} K^\lambda, \quad (2.6)$$

$$[L^\mu, L^\nu] = -C_\lambda^{\mu\nu} L^\lambda. \quad (2.7)$$

Из (2.6) следует, что $C_\lambda^{\mu\nu} + C_\lambda^{\nu\mu} = 0$, откуда $[r^{12} + r^{21}, I_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes I_\lambda] = 0$. Поэтому $r^{12} + r^{21} = at$, $a \in \mathbb{C}$. Это означает, что

$$K^\mu + L^\mu = aI_\mu. \quad (2.8)$$

Пусть $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ — линейный оператор, такой, что $\varphi(K^\lambda) = -L^\lambda$. Из равенств (2.6) и (2.7) следует, что φ — автоморфизм \mathfrak{g} как алгебры Ли. Равенство (2.8) можно переписать в виде

$$(1 - \varphi)K^\mu = aI_\mu. \quad (2.9)$$

Нам надо доказать, что $a = 0$. Если $a \neq 0$, то из (2.9) следовало бы, что $\det(\varphi - 1) \neq 0$. На самом же деле для любого $\varphi \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ существует ненулевое $x \in \mathfrak{g}$ такое, что $\varphi(x) = x$. Действительно, если φ имеет конечный порядок, то это следует из леммы 1 работы [3]. Если же φ имеет бесконечный порядок, то надо применить к циклической подгруппе, порожденной φ , следующую лемму.

Лемма. Пусть $H \subset \text{Aut } \mathfrak{g}$ — бесконечная абелева подгруппа. Тогда существует ненулевое $x \in \mathfrak{g}$ такое, что $gx = x$ при любом $g \in H$.

Доказательство. Обозначим через \bar{H} наименьшую алгебраическую подгруппу в $\text{Aut } \mathfrak{g}$, содержащую H , а через \mathfrak{h} — алгебру Ли группы \bar{H} . Так как $|\bar{H}| = \infty$, то $\mathfrak{h} \neq 0$. Алгебра Ли группы $\text{Aut } \mathfrak{g}$ совпадает с \mathfrak{g} , поэтому \mathfrak{h} можно рассматривать как подалгебру в \mathfrak{g} . В качестве x можно взять любой ненулевой элемент \mathfrak{h} .

2.3. Остается доказать, что система уравнений (1.2), (1.3) не имеет невырожденных решений.

Предложение 2.4. Пусть $r = r^{\mu\nu} I_\mu \otimes I_\nu$ — невырожденный кососимметричный тензор, (S_{kl}) — матрица, обратная к $(r^{\mu\nu})$, B — билинейная форма на \mathfrak{g} с матрицей (S_{kl}) . Для того, чтобы выполнялось соотношение (1.2), необходимо и достаточно, чтобы форма B была 2-коциклом, т.е. чтобы выполнялось тождество

$$B([x, y], z) + B([y, z], x) + B([z, x], y) = 0, \quad x, y, z \in \mathfrak{g}. \quad (2.10)$$

Доказательство. Соотношение (1.2) эквивалентно равенству

$$C_{ij}^\alpha r^{i\beta} r^{j\gamma} + C_{ij}^\beta r^{\alpha i} r^{j\gamma} + C_{ij}^\gamma r^{\alpha i} r^{\beta j} = 0,$$

где C_{ij}^α — структурные константы \mathfrak{g} . Это равенство, в силу кососимметричности \mathfrak{r} , можно переписать в виде

$$C_{ij}^\alpha r^{i\beta} r^{j\gamma} + C_{ij}^\beta r^{i\alpha} r^{j\gamma} + C_{ij}^\gamma r^{i\alpha} r^{j\beta} = 0. \quad (2.11)$$

Умножив обе части (2.11) на $S_{\alpha k} S_{\beta l} S_{\gamma m}$, получим

$$C_{lm}^\alpha S_{\alpha k} + C_{mk}^\beta S_{\beta l} + C_{kl}^\gamma S_{\gamma m} = 0,$$

что эквивалентно (2.10).

Покажем теперь, что билинейная кососимметрическая форма B на \mathfrak{g} , являющаяся 2-коциклом, вырождена. Действительно, так как \mathfrak{g} проста, то всякий коцикл является кограницей, т.е. $b(x, y) = l([x, y])$, где $l \in \mathfrak{g}^*$. Образ l при изоморфизме $\mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$, определяемом формой Киллинга, обозначим через z . Легко видеть, что z принадлежит ядру B .

Эквивалентность условий А)–В) доказана.

3. Теорема типа Вейерштрасса

Классическая теорема Вейерштрасса утверждает, что если функция $f(u)$, мероморфная на всей комплексной плоскости, удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$P(f(u), f(v), f(u+v)) = 0, \quad (3.1)$$

где P — ненулевой многочлен, то функция f либо эллиптическая, либо рациональная, либо имеет вид $\varphi(e^{kz})$, где φ — рациональная функция. Предположим теперь, что функция f определена лишь в некоторой окрестности нуля $U \subset \mathbb{C}$ и принимает векторные значения, а многочлен P в соотношении (3.1) тоже векторнозначен. Мы покажем, что тогда, при некоторых дополнительных предположениях, функция f имеет вид $f(u) = \bar{f}(ua)$, где \bar{f} — квазиабелева функция на \mathbb{C}^n (т.е. либо абелева функция, либо вырождение абелевых), $a \in \mathbb{C}^n$.

Перейдем к точным формулировкам. Напомним, что мероморфная функция φ на \mathbb{C}^n называется абелевой, если она имеет $2n$ периодов, линейно независимых над \mathbb{R} .

Определение. Мероморфная функция φ на n -мерном комплексном векторном пространстве L называется *квазиабелевой*, если существуют система координат z_1, \dots, z_n в пространстве L , целые числа $p, q, r > 0$, $p + q + r = n$ и векторы $\gamma_1, \dots, \gamma_{2r} \in L$ такие, что

- 1) при фиксированных z_{p+q+1}, \dots, z_n $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ является рациональной функцией от $z_1, \dots, z_p, e^{z_{p+1}}, \dots, e^{z_{p+q}}$;
- 2) векторы γ_i являются периодами φ ;
- 3) векторы $\bar{\gamma}_i \in \mathbb{C}^r$, образованные последними r координатами векторов γ_i , линейно независимы над \mathbb{R} .

Пусть $f(u)$ — мероморфная функция со значениями в \mathbb{C}^m , заданная в некотором круге $u \in \mathbb{C}$ с центром в нуле. Обозначим через U' дополнение множества полюсов f . Предположим, что выполнены тождества

$$P_j(f(u), f(v), f(u+v)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где P_j — многочлены от $3n$ переменных. Обозначим через S множество точек $(u, v) \in U' \times U'$ таких, что система уравнений

$$P_j(f(u), f(v), x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

относительно неизвестного $x \in \mathbb{C}^m$ имеет не более одного решения (ясно, что если $u+v \in U'$, то хотя бы одно решение у этой системы существует). Обозначим через T множество точек $(u, w) \in U' \times U'$ таких, что система уравнений

$$P_j(x, f(v), f(w)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

имеет не более одного решения.

Теорема 2.1. *Если S и T имеют непустые внутренности, то существуют натуральное число n , вектор $a \in \mathbb{C}^n$ и квазиабелева функция \bar{f} на \mathbb{C}^n такие, что*

- а) $f(u) = \bar{f}(ua)$,
- б) выполнены тождества

$$P_j(\bar{f}(u), \bar{f}(v), \bar{f}(u+v)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathbb{C}^m$ — замыкание по Зарисскому множества точек вида $f(u)$, $u \in U'$. Пусть $\Gamma \subset X \times X \times X$ — замыкание по Зарисскому множества точек вида $(f(u), f(v), f(u+v))$, где $u, v, u+v \in U'$. Ясно, что многообразия X и Γ неприводимы.

Лемма. *Все три проекции $\Gamma \rightarrow X \times X$ являются бирациональными изоморфизмами.*

Доказательство. Рассмотрим, например, проекцию π_{12} множества Γ на произведение первых двух сомножителей. Пусть $W \subset X^2$ — непустое открытое по Зарисскому подмножество такое, что слои отображения π_{12} над точками W имеют одинаковую мощность k . Положим

$$A = \{(u, v) \in U' \times U' \mid (f(u), f(v)) \in W\}.$$

Ясно, что A всюду плотно в $U' \times U'$. Поэтому $A \cap S \neq \emptyset$, откуда $k \leq 1$. С другой стороны, A содержит хотя бы одну точку (u, v) такую, что $u+v \in U'$. Поэтому $k \geq 1$.

Таким образом, π_{12} — бирациональный изоморфизм. Для остальных двух проекций доказательство аналогично.

Так как π_{12} — бирациональный изоморфизм, то Γ — график рационального отображения $\mu: X \times X \rightarrow X$, которое можно рассматривать как “операцию” на X . Ясно, что эта “операция” коммутативна.

Так как π_{13} и π_{23} — бирациональные изоморфизмы, то для нее существует обратная “операция”. Покажем, что “операция” μ ассоциативна. Обозначим через V множество точек $(x_1, x_2, x_3) \in X^3$, для которых имеют смысл выражения

$$\mu(x_1, x_2), \quad \mu(\mu(x_1, x_2), x_3), \quad \mu(x_2, x_3), \quad \mu(x_1, \mu(x_2, x_3)).$$

Положим

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{(f(u_1), f(u_2), f(u_3)) \mid u_1, u_2, u_3, u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_1 + u_2 + u_3 \in U'\}.$$

Легко видеть, что если $(x_1, x_2, x_3) \in V \cap R$, то

$$\mu(\mu(x_1, x_2), x_3) = \mu(x_1, \mu(x_2, x_3)).$$

Так как $V \cap R \subset X$ всюду плотно по Зарисскому, то отсюда следует ассоциативность μ .

Итак, X является “бirationальной группой” в смысле А. Вейля. Известно ([16], [17]), что такая группа бирационально изоморфна настоящей алгебраической группе, которая определена однозначно. Итак, мы доказали, что существуют связная коммутативная алгебраическая группа G , рациональная функция $\tilde{f} : G \rightarrow \mathbb{C}^n$ и мероморфное отображение $\varphi : U \rightarrow G$ такие, что

$$P_j(\tilde{f}(g_1), \tilde{f}(g_2), \tilde{f}(g_1 + g_2)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v). \quad (3.2)$$

Из (3.2) легко вывести, что φ голоморфно и, более того, продолжается до голоморфного гомоморфизма $\mathbb{C} \rightarrow G$.

По теореме Шевалле, любая связная коммутативная алгебраическая группа над \mathbb{C} является расширением абелева многообразия при помощи прямого произведения конечного числа аддитивных и мультипликативных групп. Поэтому универсальная накрывающая группа для G изоморфна \mathbb{C}^n , а рациональные функции на G переходят в квазиабелевы функции на \mathbb{C}^n . Обозначим через \tilde{f} квазиабелеву функцию на \mathbb{C}^n , соответствующую \tilde{f} . Гомоморфизм $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow G$ однозначно поднимается до голоморфного гомоморфизма $\bar{\varphi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$. $\bar{\varphi}$ задается формулой вида $\bar{\varphi}(u) = ua$, $a \in \mathbb{C}^n$. Построенные таким образом \tilde{f} и a являются искомыми.

4. Свойства невырожденных решений

4.1. Пусть $X(u)$ — невырожденное решение уравнения (1.4), определенное в некотором круге $U \subset \mathbb{C}$, содержащем 0. Мы будем всегда предполагать, что $\lim_{u \rightarrow 0} uX(u) = t$ (согласно предложению 2.1, этого можно добиться, умножив $X(u)$ на подходящее число).

Предложение 4.1. $X(u)$ удовлетворяет условию унитарности.

Доказательство. Имеем:

$$[X^{12}(u_1 - u_2), X^{13}(u_1 - u_3)] + [X^{12}(u_1 - u_2), X^{23}(u_2 - u_3)] + \\ + [X^{13}(u_1 - u_3), X^{23}(u_2 - u_3)] = 0. \quad (4.1)$$

Поменяв местами u_1 и u_2 , а также первый и второй сомножители в тензорном произведении $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, получим

$$[X^{21}(u_2 - u_1), X^{23}(u_2 - u_3)] + [X^{21}(u_2 - u_1), X^{13}(u_1 - u_3)] + \\ + [X^{23}(u_2 - u_3), X^{13}(u_1 - u_3)] = 0. \quad (4.2)$$

Сложив (4.1) и (4.2), приходим к тождеству

$$[X^{12}(u_1 - u_2) + X^{21}(u_2 - u_1), X^{13}(u_1 - u_3) + X^{23}(u_2 - u_3)] = 0.$$

Если теперь, зафиксировав u_1 и u_2 , устремить u_3 к u_2 , то получим $[X^{12}(u_1 - u_2) + X^{21}(u_2 - u_1), t^{23}] = 0$. Отсюда легко вывести, что $X^{12}(u_1 - u_2) + X^{21}(u_2 - u_1) = 0$.

Предложение 4.2. Существуют натуральное число n , вектор $a \rightarrow \mathbb{C}^n$ и квазиабелева функция: $\bar{X} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, удовлетворяющая уравнению (1.4), такие, что $X(u) = \bar{X}(ua)$.

Доказательство. Положим $U' = U \setminus \{0\}$. Можно считать, что функция $X(u)$ голоморфна в U' . Согласно теореме 2.1, достаточно показать, что непустую внутренность имеют множества S и T , где S — множество точек $(u, v) \in U' \times U'$ таких, что уравнение

$$[X^{12}(u) - X^{23}(v), Z^{13}] = 0 \quad (4.3)$$

относительно неизвестного $Z \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ имеет только нулевое решение, T — множество точек $(u, w) \in U' \times U'$ таких, что уравнение $[Z^{12}, X^{23}(v) + X^{13}(w)] = 0$ имеет только нулевое решение. Так как $X(u)$ удовлетворяет условию унитарности, то $(u, w) \in T \Leftrightarrow (w, -v) \in S$. Так как S открыто, то достаточно доказать, что $S \neq \emptyset$. Покажем, что если $u \neq 0$ достаточно мало, то $(u, v) \in S$. При $v = u \neq 0$ уравнение (4.3) можно записать в виде

$$[uX^{12}(u) - uX^{23}(u), Z^{13}] = 0. \quad (4.4)$$

При $u = 0$ уравнение (4.4) принимает вид

$$[t^{12} - t^{23}, Z^{13}] = 0. \quad (4.5)$$

Покажем, что уравнение (4.5) имеет только нулевое решение. Отсюда будет следовать, что при всех достаточно малых u уравнение (4.4) имеет только нулевое решение.

Равенство (4.5) означает, что при любом μ

$$[I_\mu \otimes 1 - 1 \otimes I_\mu, Z] = 0. \quad (4.6)$$

Отсюда следует, что

$$[[I_\mu, I_\nu] \otimes 1 + 1 \otimes [I_\mu \otimes 1 - 1 \otimes I_\mu, I_\nu \otimes 1 - 1 \otimes I_\nu], Z] = 0. \quad (4.7)$$

Так как элементы вида $[I_\mu, I_\nu]$ порождают \mathfrak{g} как векторное пространство, то из (4.7) следует, что $[I_\mu \otimes 1 + 1 \otimes I_\mu, T] = 0$ при любом μ . Отсюда и из (4.6) вытекает, что $[I_\mu \otimes 1, Z] = 0$ и, следовательно, $Z = 0$.

Из предложения 4.2, в частности, следует, что $X(u)$ продолжается до мероморфной функции на всем \mathbb{C} . Обозначим через Γ множество ее полюсов. Согласно предложению 2.1, все они простые.

Предложение 4.3. Пусть $\gamma \in \Gamma$. Тогда существует $A_\gamma \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ такое, что

$$X(u + \gamma) = (A_\gamma \otimes 1)X(u). \quad (4.7a)$$

Доказательство. Положим $\tau = \lim_{u \rightarrow \gamma} (u - \gamma)X(u)$. Пусть $A_\gamma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ — линейный оператор такой, что $\tau = A_\gamma(I_\mu) \otimes I_\mu$. Из равенства (2.2) и тождества $[t^{12}, r^{13} + r^{23}] = 0$, справедливого при любом $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, следует, что

$$\begin{aligned} [\tau^{12}, X^{13}(v + \gamma)] &= -(A_\gamma \otimes 1 \otimes 1)([t^{12}, X^{23}(v)]) = \\ &= (A_\gamma \otimes 1 \otimes 1)([t^{12}, X^{13}(v)]). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Приравняв вычеты обеих частей (4.8) при $v = 0$, получим

$$[\tau^{12}, \tau^{13}] = (A_\gamma \otimes 1 \otimes 1)([t^{12}, t^{13}]),$$

т.е.

$$[A_\gamma(I_\mu), A_\gamma(I_\nu)] \otimes I_\mu \otimes I_\nu = A_\gamma([I_\mu, I_\nu]) \otimes I_\mu \otimes I_\nu.$$

Это означает, что $A_\gamma([I_\mu, I_\nu]) = [A_\gamma(I_\mu), A_\gamma(I_\nu)]$, т.е. A_γ — эндоморфизм алгебры Ли \mathfrak{g} . Так как $A_\gamma \neq 0$, а алгебра \mathfrak{g} простая, то A_γ — автоморфизм. Применяя к обеим частям (4.8) отображение $A_\gamma^{-1} \otimes 1 \otimes 1$ и воспользовавшись тем, что A_γ^{-1} — автоморфизм \mathfrak{g} как алгебры Ли, получим равенство $[t^{12}, (A_\gamma^{-1} \otimes 1)X^{13}(v + \gamma) - X^{13}(v)] = 0$, откуда $(A_\gamma^{-1} \otimes 1)X(v + \gamma) = X(v)$.

Предложение 4.4. 1) Γ — дискретная подгруппа в \mathbb{C} ;

2) $A_{\gamma_1 + \gamma_2} = A_{\gamma_1} A_{\gamma_2}$ для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$;

3) $X(u + \gamma) = (1 \otimes A_\gamma^{-1})X(u)$, $u \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$;

4) $(A_\gamma \otimes A_\gamma)X(u)$, $u \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Правая часть равенства (4.7) имеет полюс при $u = \gamma'$. Поэтому левая часть обладает тем же свойством, т.е. $\gamma + \gamma' \in \Gamma$. Так как $X(u)$ удовлетворяет условию унитарности, то $\gamma \in \Gamma \Rightarrow -\gamma \in \Gamma$. Таким образом, Γ — подгруппа в \mathbb{C} . Дискретность Γ и утверждение 2) очевидны. Утверждение 3) эквивалентно равенству $X^{21}(u + \gamma) = (A_\gamma^{-1} \otimes 1)X^{21}(u)$, вытекающему

из (4.7) и условия унитарности. Утверждение 4) следует из 3) и равенства (4.7).

4.2. Предложение 4.5. Пусть Γ имеет ранг 2. Тогда

а) не существует ненулевого $x \in \mathfrak{g}$ такого, что $A_\gamma(x) = x$ при любом $\gamma \in \Gamma$;

б) существует подгруппа конечного индекса $\Gamma' \in \Gamma$ такая, что $A_\gamma = 1$ при $\gamma \in \Gamma'$.

Доказательство. а) Допустим, что $x \in \mathfrak{g}$, $x \neq 0$, $A_\gamma(x) = x$ при $\gamma \in \Gamma$. Пусть $X(u) = X_{\mu\nu}(u)I_\mu \otimes I_\nu$. Определим мероморфную функцию $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{g}$ формулой $\varphi(u) = X_{\mu\nu}(I_\mu, x) \cdot I_\nu$. Легко видеть, что функция φ Γ -периодична, имеет при $u = 0$ простой полюс и не имеет в параллелограмме периодов других полюсов. Полученное противоречие доказывает утверждение а).

б) Положим $H = \{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$. Лемма из доказательства предложения 2.3 и уже доказанное утверждение а) показывают, что $|H| < \infty$. Отсюда следует б).

Следствие. Если ранг Γ равен 2, то $X(u)$ — эллиптическая функция.

4.3. В этом разделе будут доказаны утверждения теоремы 1.1, относящиеся к случаю, когда ранг Γ равен 0 или 1. Пусть n и \bar{X} обозначают то же, что в предложении 4.2.

Предложение 4.6. Существуют $(n-1)$ -мерное векторное подпространство $V \subset \mathbb{C}^n$ и голоморфный гомоморфизм $\varphi: V \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$ такие, что при любых $z \in \mathbb{C}^n$, $H \in V$

$$\bar{X}(z+h) = (\varphi(h) \otimes 1)\bar{X}(z), \quad (4.9)$$

$$(\varphi(h) \otimes \varphi(h))\bar{X}(z) = \bar{X}(z). \quad (4.10)$$

Доказательство. Пусть $\bar{X}(z) = Y(z)/f(z)$, где Y и f — целые функции. Без ограничения общности можно предполагать, что множество $S \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} | f(z) = 0, Y(z) \neq 0\}$ непусто. Пусть $h \in S$.

Лемма. Существуют $L(h) \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ и $c(h) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такие, что

$$1) \quad Y(h) = (c(h)L(h)I_\mu) \otimes I_\mu; \quad (4.11)$$

$$2) \quad \bar{X}(\lambda+h) = (L(h) \otimes 1)\bar{X}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (4.12)$$

Доказательство. Пусть $\bar{X}(z) = K_\mu(z) \otimes I_\mu$. Те же рассуждения, что при выводе формулы (2.2), показывают, что

$$[Y^{12}(h), \bar{X}^{13}(z+h) + \bar{X}^{23}(z)] = 0,$$

и следовательно,

$$[Y(h), K_\mu(Z+h) \otimes 1 + 1 \otimes K_\mu(Z)] = 0. \quad (4.13)$$

Обозначим через W множество таких $Z \in \mathbb{C}^n$, что а) функция \bar{X} голоморфна в точках z и $z+h$, б) тензоры $\bar{X}(Z)$ и $\bar{X}(z+h)$ невы-

рождены. Пусть $z \in W$. Обозначим через \mathfrak{a} подалгебру в $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, порожденную элементами $K_\mu(z+h) \otimes 1 + 1 \otimes K_\mu(z)$. Тогда $[Y(h), \mathfrak{a}] = 0$ для любого $\mathfrak{a} \in \mathfrak{a}$. Так как векторы $K_\mu(z)$ и $K_\mu(z+h)$ образуют базисы в \mathfrak{g} , то обе проекции $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}$ сюръективны. Отсюда и из простоты \mathfrak{g} следует, что либо $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, либо существует $L \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ такой, что $\mathfrak{a} = \{Lx \otimes 1 + 1 \otimes x \mid x \in \mathfrak{g}\}$. Первый случай невозможен, так как $[Y(h), \mathfrak{a}] = 0$, $Yh \neq 0$. Итак, мы доказали существование $L(z, h) \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ такого, что

$$K_\mu(z+h) = L(z, h)K_\mu(z). \quad (4.14)$$

Из равенств (4.13) и (4.14) следует, что

$$[(L(z, h)^{-1} \otimes 1)Y(h), K_\mu(z) \otimes 1 + 1 \otimes K_\mu(z)],$$

откуда

$$Y(h) = (c(z, h)L(z, h)I_\mu) \otimes I_\mu. \quad (4.15)$$

Из (4.15) вытекает, что $c(z, h)$ и $L(z, h)$ не зависят от z . Из (4.14) следует, что равенство (4.12) выполняется при $z \in W$, а значит, и при любом $z \in \mathbb{C}^n$.

Пусть $H \subset \mathbb{C}^n$ — подгруппа, порожденная S . Из леммы следует, что существует гомоморфизм $\varphi: H \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$ такой, что равенство (4.9) выполняется при любых $h \in H$, $z \in \mathbb{C}^n$. Множество полюсов функции \bar{X} переходит в себя при сдвигах на элементы H . Поэтому $H \neq \mathbb{C}^n$. Так как H порождена аналитическим подмножеством $S \subset \mathbb{C}^n$ коразмерности 1, то S — открытое подмножество в объединении конечного или счетного числа параллельных друг другу аффинных гиперплоскостей, а H содержит $(n-1)$ -мерное векторное подпространство $V \subset \mathbb{C}^n$, параллельное этим гиперплоскостям. Из равенства (4.11) следует, что $L(h)$ голоморфно зависит от H . Поэтому отображение $\varphi: V \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$ голоморфно.

Те же рассуждения, что при доказательстве предложения 4.1, показывают, что \bar{X} удовлетворяет условию унитарности. Отсюда и из (4.9) вытекает (4.10) (см. доказательство предложения 4.4).

Лемма 4.1. Пусть \mathfrak{a} обозначает то же, что в предложении 4.2. Если $\tilde{a} - a \in V$, то функция $\tilde{X}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{X}(u\tilde{a})$ является решением уравнения (1.4), эквивалентным $X(u)$.

Доказательство. Из формул (4.9) и (4.10) следует, что

$$\tilde{X}(u_1 - u_2) = (\varphi(u_1, h) \otimes \varphi(u_2, h))X(u_1 - u_2),$$

где $h = \tilde{a} - a$, φ обозначает то же, что в предложении 4.6.

Предложение 4.7. Если Γ имеет ранг 1, то $X(u)$ эквивалентно решению $\tilde{X}(u)$ вида $f(e^{ku})$, где f — рациональная функция. Если $\Gamma = 0$, то $X(u)$ эквивалентно рациональному решению.

Доказательство. Пусть $p, q, r, z_1, \dots, z_n, \gamma_1, \dots, \gamma_{2r}$ обозначают то же, что в определении квазиабелевости (в нашей ситуации $\varphi(z) = \bar{X}(z)$). Обозначим через e_1, \dots, e_n базисные векторы в \mathbb{C}^n , соответствующие системе координат z_1, \dots, z_n , а через W — подпространство в \mathbb{C}^n , заданное уравнениями $z_{p+q+1} = \dots = z_n = 0$. Представим γ_i в виде $\delta_i a + h_i$, $\delta_i \in \mathbb{C}$, $h_i \in V$. Ясно, что $\delta_i \in \Gamma$.

Предположим, что ранг Γ равен 0 или 1. Тогда $W \not\subset V$. Действительно, если бы $W \subset V$, то векторы $\gamma_1, \dots, \gamma_{2r}$ порождали бы \mathbb{C}^n/V как векторное пространство над \mathbb{R} , так что $\delta_1, \dots, \delta_{2r}$ порождали бы \mathbb{C} как векторное пространство над \mathbb{R} , а это невозможно, так как $\delta_1, \dots, \delta_{2r} \in \Gamma$. Так как $W \not\subset V$, то существует $I \leq p+q$ такое, что $e_i \notin V$. Тогда a можно представить в виде $ke_i + h$, $k \in \mathbb{C}$, $h \in V$. Положим $\tilde{X}(u) = \bar{X}(uke_i)$. Согласно лемме 4.1, $\tilde{X}(u)$ — решение уравнения (1.4), эквивалентное $X(u)$. Ясно, что если $i < p$, то $\tilde{X}(u)$ — рациональная функция, а если $i > p$, то $X(u)$ имеет вид $f(e^{ku})$, где f рациональна.

Множество полюсов $\tilde{X}(u)$ равно Γ . Поэтому если ранг Γ равен 1, то функция $\tilde{X}(u)$ не может быть рациональной, а если $\Gamma = \{0\}$, то $\tilde{X}(u)$ не может иметь вид $f(e^{ku})$, где f рациональна.

Теорема 1.1 полностью доказана. Решения вида $f(e^{ku})$, где f — рациональная функция, назовем **тригонометрическими**.

4.4. Уже отмечалось, что всякое невырожденное решение уравнения (1.4), мероморфное в окрестности нуля, продолжается до мероморфной функции на всем \mathbb{C} . Можно также показать, что всякое формальное решение уравнения (1.4) вида

$$X(u) = \frac{t}{u} + \sum_{i=0}^{\infty} X_i u^i$$

сходится при достаточно малых $u \neq 0$.

5. Эллиптические решения

5.1. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — дискретная подгруппа ранга 2, ω_1 и ω_2 — ее образующие. Пусть $X(u)$ — невырожденное решение уравнения (1.4) с множеством полюсов Γ . Положим

$$A_1 = A_{\omega_1}, \quad A_2 = A_{\omega_2}$$

(по поводу обозначения A_γ см. предложение 4.3). Ясно, что

$$A_1 A_2 = A_2 A_1 = A_{\omega_1 + \omega_2}.$$

Согласно предложению 4.5, автоморфизмы A_1 и A_2 имеют конечный порядок, причем не существует ненулевого $x \in \mathfrak{g}$ такого, что $A_1(x) = A_2(x) = x$. В этом пункте будет доказано, что если $A_1, A_2 \in \text{Aut } \mathfrak{g}$

коммутируют, имеют конечный порядок и не имеют общих неподвижных ненулевых векторов, то паре (A_1, A_2) соответствует ровно одно невырожденное решение уравнения (1.4) с множеством полюсов Γ . Предварительно докажем лемму, справедливую для дискретной подгруппы $\Gamma \subset \mathbb{C}$ любого ранга.

Лемма 5.1. Пусть $A : \Gamma \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$ — гомоморфизм, $X(u)$ — мероморфная функция на комплексной плоскости со значениями в $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ такая, что а) $X(u + \gamma) = (A_\gamma \otimes 1)X(u)$ при $u \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ (здесь $A_\gamma \stackrel{\text{def}}{=} A(\gamma)$); б) $X^{21}(u) = X^{12}(-u)$; в) $\lim_{u \rightarrow 0} uX(u) = t$; г) $X(u)$ не имеет полюсов при $u \notin \Gamma$. Положим

$$Y(u_1, u_2, u_3) = [X^{12}(u_1 - u_2), X^{13}(u_1 - u_3)] + [X^{12}(u_1 - u_2), X^{23}(u_2, u_3)] + [X^{13}(u_1 - u_3), X^{23}(u_2 - u_3)]. \quad (5.1)$$

Тогда 1) функция $Y(u_1, u_2, u_3)$ не имеет полюсов; 2) для любого $\gamma \in \Gamma$

$$Y(u_1 + \gamma, u_2, u_3) = (A_\gamma \otimes 1 \otimes 1)Y(u_1, u_2, u_3), \quad (5.2)$$

$$Y(u_1, u_2, u_3 + \gamma) = (1 \otimes 1 \otimes A_\gamma^{-1})Y(u_1, u_2, u_3). \quad (5.3)$$

Доказательство. Формула (5.2) проверяется непосредственно. Равенство (5.3) следует из (5.2) и тождества

$$Y^{321}(u_3, u_2, u_1) = -Y^{123}(u_1, u_2, u_3), \quad (5.4)$$

вытекающего из условия унитарности. Если множество P полюсов функции Y не пусто, то оно является объединением некоторых из плоскостей вида $u_i - u_j = \gamma$, $\gamma \in \Gamma$. Надо доказать, что никакая такая плоскость не содержится в P . Ввиду формул (5.2)–(5.4) и равенства $Y^{213}(u_2, u_1, u_3) = -Y^{123}(u_1, u_2, u_3)$ достаточно показать, что плоскость $u_1 = u_2$ не содержится в P . Действительно, при фиксированных u_2, u_3 имеем

$$\lim_{u_1 \rightarrow u_2} (u_1 - u_2)Y(u_1, u_2, u_3) = [t^{12}, X^{13}(u_2 - u_3) + X^{23}(u_2 - u_3)] = 0.$$

Предложение 5.1. Пусть A_1, A_2 — коммутирующие автоморфизмы \mathfrak{g} конечного порядка, не имеющие общих неподвижных ненулевых векторов. Тогда существует ровно одна мероморфная функция $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ такая, что 1) $\lim_{u \rightarrow 0} uX(u) = t$; 2) $X(u + \omega_i) = (A_i \otimes 1)X(u)$, $i = 1, 2$; 3) $X(u)$ не имеет полюсов при $u \notin \Gamma$. Эта функция является решением уравнения (1.4).

Доказательство. Пусть $A_i^n = A_2^n = 1$. Имеем:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k, l \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^{k+l}} \mathfrak{g}_{kl},$$

где $\mathfrak{g}_{kl} = \{x \in \mathfrak{g} \mid A_1(x) = \xi^k x, A_2(x) = \xi^l x\}$, $\xi = e^{2\pi i/n}$. По условию, $\mathfrak{g}_{00} = 0$. Так как $(A_1 \otimes A_1)t = (A_2 \otimes A_2)t = t$, то

$$t \in \bigoplus_{k,l} (\mathfrak{g}_{kl} \otimes \mathfrak{g}_{-k,-l}).$$

Проекцию t на $\mathfrak{g}_{kl} \otimes \mathfrak{g}_{-k,-l}$ обозначим t_{kl} .

Если искомая функция $X(u)$ существует, то

$$(A_1 \otimes A_1)X(u) = (A_2 \otimes A_2)X(u) = X(u)$$

(см. предложение 4.4), Потому $X(u)$ надо искать в виде

$$X(u) = \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (k,l) \neq (0,0)}} X_{k,l}(u), \quad X_{k,l}(u) \in \mathfrak{g}_{kl} \otimes \mathfrak{g}_{-k,-l}.$$

Для того, чтобы функция $X(u)$ обладала свойствами 1)–3), необходимо и достаточно, чтобы функции $X_{kl}(u)$ удовлетворяли условиям 1') $\lim_{u \rightarrow 0} uX_{kl}(u) = t_{kl}$; 2') $X_{kl}(u + \omega_1) = \xi^k X_{kl}(u)$, $X_{kl}(u_1 + \omega_2) = \xi^l X_{kl}(u)$; 3') $X_{kl}(u)$ не имеет полюсов при $u \notin \Gamma$. Так как $(k, l) \neq (0, 0)$, то существует ровно одна мероморфная функция φ_{kl} такая, что

$$\lim_{u \rightarrow 0} u\varphi_{kl}(u) = 1,$$

$$\varphi_{kl}(u + \omega_1) = \xi^k \varphi_{kl}(u), \quad \varphi_{kl}(u + \omega_2) = \xi^l \varphi_{kl}(u),$$

$\varphi_{kl}(u)$ не имеет полюсов при $u \in \Gamma$. Поэтому существует ровно одна функция X_{kl} , обладающая свойствами 1')–3'), а именно,

$$X_{kl}(u) = \varphi_{kl}(u) \cdot t_{kl}.$$

Функция

$$X(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k,l} \varphi_{kl}(u) t_{kl}$$

удовлетворяет условиям леммы 5.1 (например, условие унитарности следует из равенств $\varphi_{kl}(u) = -\varphi_{-k,-l}(-u)$, $\sigma(t_{kl}) = t_{-k,-l}$, где $\sigma: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ — перестановка сомножителей). Поэтому функция Y , определяемая формулой (5.1), является ограниченной целой функцией, и следовательно, константой (ограниченность следует из формул (5.2), (5.3) и очевидного тождества $Y(u_1 + u, u_2 + u, u_3 + u) = Y(u_1, u_2, u_3)$). Пусть $Y(u_1, u_2, u_3) = y$. Из равенства (5.2) вытекает, что

$$(A_1 \otimes 1 \otimes 1)y = (A_2 \otimes 1 \otimes 1)y = y,$$

откуда $y = 0$.

5.2. Итак, нахождение невырожденных эллиптических решений уравнения (1.4) сводится к описанию троек (\mathfrak{g}, A_1, A_2) , где \mathfrak{g} — простая алгебра Ли, A_1 и A_2 — коммутирующие автоморфизмы \mathfrak{g} конечного порядка, не имеющие общих неподвижных ненулевых векторов.

Пример такой тройки: $\mathfrak{g} = sl(n)$, A_1 и A_2 — внутренние автоморфизмы, соответствующие матрицам

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \xi & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \xi^{n-1} \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ . & 0 & 1 & & \\ . & & 0 & 1 & \\ . & & . & . & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

где ξ — первообразный корень степени n из единицы. Соответствующие решения уравнения (1.4) были найдены в [1]. Следующее предложение показывает, что других невырожденных эллиптических решений уравнения (1.4) не существует.

Предложение 5.2. Пусть A_1 и A_2 — коммутирующие автоморфизмы \mathfrak{g} конечного порядка, причем не существует ненулевого $x \in \mathfrak{g}$ такого, что $A_1(x) = A_2(x) = x$. Тогда существует изоморфизм $\mathfrak{g} \approx sl(n)$, при котором A_1 и A_2 переходят во внутренние автоморфизмы, соответствующие матрицам (5.5).

Доказательство. Положим $\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g} \mid A_1(x) = x\}$.

Лемма 1. Алгебра \mathfrak{g}_0 абелева.

Доказательство. Известно, что если σ — автоморфизм конечного порядка полупростой алгебры Ли \mathfrak{a} , $\mathfrak{a}^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{a} \mid \sigma(x) = x\}$, то 1) $\mathfrak{a}^\sigma \neq 0$, 2) \mathfrak{a}^σ — прямое произведение полупростой и абелевой алгебр (см. [3], лемма 1). Если бы алгебра \mathfrak{g}_0 была неабелевой, то, взяв в качестве \mathfrak{a} полупростую часть \mathfrak{g}_0 , а в качестве σ — ограничение A_2 на \mathfrak{a} , мы получили бы, что существует ненулевое $x \in \mathfrak{g}_0$ такое, что $A_2(x) = x$, а это невозможно.

В работе [3] каждой паре (\mathfrak{a}, σ) , где \mathfrak{a} — простая алгебра Ли, $\sigma : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$ — автоморфизм конечного порядка, сопоставлен граф, называемый схемой Дынкина пары (\mathfrak{a}, σ) . При этом, если алгебра

$$\mathfrak{a}^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{a} \mid \sigma(x) = x\}$$

абелева, то любой автоморфизм $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, коммутирующий с σ , индуцирует автоморфизм этого графа. Пусть Δ — схема Дынкина пары (\mathfrak{g}, A_1) , φ — автоморфизм Δ , индуцированный автоморфизмом $A_2 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, H — подгруппа в $\text{Aut } \Delta$, порожденная φ .

Лемма 2. Действие H на множестве вершин Δ транзитивно.

Доказательство. Согласно [3], каждой вершине δ графа Δ каноническим образом соответствует элемент $h_\delta \in \mathfrak{g}_0$; при этом векторы h_δ порождают \mathfrak{g}_0 и число этих векторов равно $\dim \mathfrak{g}_0 + 1$. Допустим, что множество вершин Δ можно представить в виде объединения H -инвариантных подмножеств S_1 и S_2 , где $S_1 \cap S_2 =$

$= \phi$, $S_1 \neq \phi$, $S_2 \neq \phi$. Положим

$$x = \sum_{\delta \in S_i} h_\delta, \quad i = 1, 2.$$

Так как S_i — инвариантно, то $A_2(x_i) = x_i$. Так как $x_i \in \mathfrak{g}_0$, то $A_1(x_i) = x_i$. Поэтому $x_i = 0$. Итак,

$$\sum_{\delta \in S_1} h_\delta = \sum_{\delta \in S_2} h_\delta = 0,$$

т.е. мы получили два независимых линейных соотношения между h_δ , а это невозможно.

Из леммы 2 следует, что группа $\text{Aut } \Delta$ действует транзитивно на множестве вершин Δ . Поэтому Δ имеет тип $A_{n-1}^{(1)}$ (см. таблицы из [3]). Отсюда следует (см. [3]), теорема 2), что $\mathfrak{g} \approx \mathfrak{sl}(n)$, а автоморфизм A_1 внутренний. Так как A_1 и A_2 играют одинаковую роль, то автоморфизм A_2 тоже внутренний.

Пусть $A_1 : \mathfrak{sl}(n) \rightarrow \mathfrak{sl}(n)$, $A_2 : \mathfrak{sl}(n) \rightarrow \mathfrak{sl}(n)$ — внутренние автоморфизмы, соответствующие матрицам $P_1, P_2 \in SL(n)$. Так как $A_1 A_2 = A_2 A_1$, то $P_1 P_2 P_1^{-1} P_2^{-1}$ — скалярная матрица. Таким образом, сопоставив элементу $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ оператор $p_1^i p_2^j$ мы получим проективное представление \mathbb{Z}^2 в пространстве \mathbb{C}^n . Это представление неприводимо: в противном случае существовала бы ненулевая матрица $B \in \mathfrak{sl}(n)$, коммутирующая с P_1 и P_2 , и тогда выполнялись бы равенства $A_1(B) = A_2(B) = B$. Для доказательства предложения осталось воспользоваться хорошо известной теоремой о том, что любое n -мерное неприводимое проективное представление группы \mathbb{Z} эквивалентно представлению, при котором элементу $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ соответствует оператор $T_1^i T_2^j$, где T_1 и T_2 определяются формулой (5.5).

6. Тригонометрические решения

При описании тригонометрических решений важную роль играют понятия кокстеровского автоморфизма и простых весов. Эти понятия вводятся в пунктах 6.1 и 6.2. В пункте 6.3 приводится формула для простейшего тригонометрического решения и объясняется его связь с цепочками Тоды-Богоявленского. В пункте 6.4 сформулирована основная теорема, описывающая все невырожденные тригонометрические решения. Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству этой теоремы.

6.1. Напомним, что \mathfrak{g} обозначает простую конечномерную алгебру Ли над \mathbb{C} . Обозначим через $\text{Aut}^0 \mathfrak{g}$ связную компоненту единицы группы $\text{Aut } \mathfrak{g}$. Элементы $\text{Aut}^0 \mathfrak{g}$ называются внутренними автоморфизмами. Известно, что $\text{Aut } \mathfrak{g} / \text{Aut}^0 \mathfrak{g} = \text{Aut } \Delta$, где Δ — схема Дын-

кина \mathfrak{g} . В частности, порядок группы $\text{Aut } \mathfrak{g} / \text{Aut}^0 \mathfrak{g}$ может равняться 1, 2 или 6, причем последняя возможность реализуется только при $\mathfrak{g} = 0$ (8) (в этом случае $\text{Aut } \mathfrak{g} / \text{Aut}^0 \mathfrak{g} \simeq S_3$). Пусть $\sigma \in \text{Aut } \Delta$, K_σ — соответствующий смежный класс группы $\text{Aut } \mathfrak{g}$ по подгруппе $\text{Aut}^0 \mathfrak{g}$.

Определение. Автоморфизм $A \in K_\sigma$ называется *кокстеровским*, если выполняются следующие условия:

- а) алгебра $\mathfrak{g}^A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{g} \mid Ax = x\}$ абелева;
- б) A имеет наименьший порядок среди автоморфизмов $A' \in K_\sigma$ таких, что алгебра $\mathfrak{g}^{A'}$ абелева.

Из результатов [3] следует, что для любой пары (\mathfrak{g}, σ) кокстеровский автоморфизм C единствен с точностью до сопряжения внутренними автоморфизмами (в терминах [3] кокстеровский автоморфизм соответствует градуировке типа $(1, 1, \dots, 1)$). Порядок h автоморфизма C называется числом Кокстера пары (\mathfrak{g}, σ) . Приведем таблицу для чисел Кокстера, заимствованную из [11].

Таблица

Тип (\mathfrak{g}, σ)	$A_n^{(1)}$	$A_{2n}^{(2)}$	$A_{2n+1}^{(2)}$	$B_n^{(1)}$	$C_n^{(1)}$	$D_n^{(1)}$	$D_n^{(2)}$
h	$n + 1$	$4n + 2$	$4n + 2$	$2n$	$2n$	$2n - 1$	$2n$
Тип (\mathfrak{g}, σ)	$D_3^{(4)}$	$E_6^{(1)}$	$E_6^{(2)}$	$E_7^{(1)}$	$E_8^{(1)}$	$F_4^{(1)}$	$G_2^{(1)}$
h	12	12	18	18	30	12	6

В этой таблице подразумевается, что (\mathfrak{g}, σ) имеет, скажем, тип $D_n^{(2)}$, если \mathfrak{g} имеет тип D_n , а порядок σ равен 2 (отметим, что σ определяется своим порядком однозначно с точностью до сопряжения).

Приведем способ построения кокстеровского автоморфизма. Выберем в \mathfrak{g} систему образующих Вейля $\{X_i, Y_i, H_i\}$, где i пробегает множество вершин Δ (см. [8], часть III, глава VI, §4). Обозначим через C автоморфизм \mathfrak{g} такой, что

$$C(H_i) = H_{\sigma(i)}, \quad C(X_i) = e^{2\pi i/h} X_{\sigma(i)}, \quad C(Y_i) = e^{-2\pi i/h} Y_{\sigma(i)}.$$

Из результатов [3] следует, что автоморфизм C кокстеровский.

Наконец, укажем явный вид кокстеровских автоморфизмов классических алгебр. Обозначения: C — кокстеровский автоморфизм, m — порядок σ , S — матрица с единицами на побочной диагонали и нулями на остальных местах, $\omega = e^{2\pi i/h}$, где h — число Кокстера пары (\mathfrak{g}, σ) . Для алгебр $\mathfrak{o}(n)$ и $\mathfrak{sp}(n)$ используются не вполне стандартные реализации, а именно: $\mathfrak{o}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid X^t = -SX S^{-1}\}$, $\mathfrak{sp}(2n) = \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid X^t = -BX B^{-1}\}$, где $B = (b_{ij})$, $b_{ij} = -b_{ij}$,

$b_{ij} = 0$ при $i + j \neq 2n + 1$, $b_{ij} \neq 0$ при $i + j = 2n + 1$. Кокстеровские автоморфизмы классических алгебр Ли таковы:

1) если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $m = 1$, то $h = n$, $C(X) = T X T^{-1}$, где

$$T = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1});$$

2) если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2n + 1)$, $m = 1$, то $h = 4n + 2$, $C(X) = -T X^t T^{-1}$, где

$$T = S \cdot \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{2n});$$

3) если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2n)$, $m = 2$, то $h = 4n - 2$, $C(X) = T X^t T^{-1}$, где

$$T = S \cdot \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-2}, \omega^{n-1}, \omega^n, \dots, \omega^{2n-2});$$

4) если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$, то $h = 2n$, $C(X) = T X T^{-1}$, где

$$T = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{2n-1});$$

5) если $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2n + 1)$, то $h = 2n$, $C(x) = T X T^{-1}$, где

$$T = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{2n-1}, 1);$$

6) если $\mathfrak{g} = \mathfrak{O}(2n)$, $m = 1$, то $h = 2n - 2$, $C(X) = T X T^{-1}$, где

$$T = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-2}, \omega^{n-1}, \dots, \omega^{2n-3}, 1);$$

7) если $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2n)$, $m = 2$, то $h = 2n$, $C(X) = T X T^{-1}$, где

$$T = \begin{pmatrix} \omega & & & & & & 0 \\ & \omega^2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \omega^{n-1} & & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & \\ & & & & & & \omega^{n+1} \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & \omega^{2n-1} \end{pmatrix}.$$

6.2. Зафиксируем $\sigma \in \text{Aut } \Delta$ и кокстеровский автоморфизм $C \in K_\sigma$. Положим $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} \mid Cx = x\}$, \mathfrak{h} — абелева подалгебра в \mathfrak{g} . Положим $\omega = e^{2\pi i/h}$, где h — число Кокстера пары (\mathfrak{g}, σ) . Разложим \mathfrak{g} по собственным значениям C : $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$, где $\mathfrak{g}_j \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{g} \mid Cx = \omega^j x\}$

(в частности, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$). Для любого $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ обозначим через \mathfrak{g}_j^α множество таких $x \in \mathfrak{g}$, что $[a, x] = \alpha(a)x$ при любом $a \in \mathfrak{h}$. Согласно [3], $\mathfrak{g}_j = \bigoplus_\alpha \mathfrak{g}_j^\alpha$ и $\dim \mathfrak{g}_j^\alpha \leq 1$ при $\alpha \neq 0$. Положим $\Gamma = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \mathfrak{g}_1^\alpha \neq 0\}$

элементы Γ называются **простыми весами** (так как C — кокстеровский автоморфизм, то из результатов [3] следует, что это определение простых весов эквивалентно определению, приведенному в [3]).

Согласно [3], $0 \notin \Gamma$, так что для любого $\alpha \in \Gamma$ $\dim \mathfrak{g}_1^\alpha = 1$. Взаимное расположение простых весов удобно описывать при помощи схемы Дынкина. Схема Дынкина пары (\mathfrak{g}, C) — это граф, вершины которого взаимно однозначно соответствуют простым весам, а характер соединения вершин A и B , соответствующих простым весам α и β , определяется следующими правилами: а) число отрезков, соединяющих α и β , равно $\frac{4(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}$; б) если $\frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} > 1$, то эти отрезки снабжены стрелкой, указывающей на B . (Отметим, что изоморфизм $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$, определяемый скалярным произведением в \mathfrak{h} , позволяет перенести это скалярное произведение в \mathfrak{h}^* .) Схемы Дынкина всех пар (\mathfrak{g}, C) приведены в [3].

6.3. Так как $(C \otimes C)t = t$, то

$$t \in \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} (\mathfrak{g}_j \otimes \mathfrak{g}_{-j}).$$

Проекцию t на $\mathfrak{g}_j \otimes \mathfrak{g}_{-j}$ обозначим t_j . Положим

$$\xi(\lambda) = \frac{t_0}{2} + \frac{1}{\lambda^h - 1} \sum_{j=0}^{h-1} t_j \lambda^j, \quad X(u) = \xi(e^{u/h}). \quad (6.1)$$

Предложение 6.1. Функция $X(u)$, определенная формулой (6.1), является решением уравнения (1.4) с множеством полюсов $2\pi i\mathbb{Z}$ и вычетом t в нуле.

Доказательство. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} X(u + 2\pi i) &= (C \otimes 1)X(u), \\ X^{21}(u) &= -X^{12}(-u), \quad \lim_{u \rightarrow 0} uX(u) = t, \end{aligned}$$

множество полюсов $X(u)$ равно $2\pi i\mathbb{Z}$. Таким образом, из леммы 5.1 следует, что функция

$$Z(\lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} [\xi^{12}(\lambda), \xi^{13}(\lambda\mu)] + [\xi^{12}(\lambda), \xi^{23}(\mu)] + [\xi^{13}(\lambda\mu), \xi^{33}(\mu)]$$

не имеет полюсов при $\lambda \neq 0, \infty, \mu \neq 0, \infty$. Так как $\xi(\lambda)$ не имеет полюсов при $\lambda = 0, \infty$, то $Z(\lambda, \mu)$ не имеет полюсов также при $\lambda = 0, \infty$ и при $\mu = 0, \infty$. Поэтому $Z(\lambda, \mu)$ — константа. С другой стороны,

$$\phi \lim_{\lambda, \mu \rightarrow 0} Z(\lambda, \mu) = 0,$$

так как $t_0 \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$, а алгебра \mathfrak{h} абелева.

Замечания. 1) Легко видеть, что группа инвариантности G решения (6.1) состоит из тех и только тех автоморфизмов \mathfrak{g} , которые коммутируют с C . Ясно, что G содержит подгруппу H , порожденную C и автоморфизмами e^{ada} , $a \in \mathfrak{h}$. Можно показать, что $G(H)$ — это группа автоморфизмов схемы Дынкина (\mathfrak{g}, C) .

2) Предложение 6.1 останется в силе, если C заменить любым автоморфизмом конечного порядка A таким, что алгебра

$$\mathfrak{g}^A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{g} \mid Ax = x\}$$

абелева. Оказывается, однако, что решение, соответствующее любому такому A , эквивалентно решению, соответствующему C .

В [10] было изучено уравнение

$$\ddot{\varphi} = -(\text{grad } U)(\varphi), \quad \varphi(t) \in \mathfrak{h}, \quad U(\varphi) = \sum_{\alpha \in \Gamma} e^{2\alpha(\varphi)} \quad (6.2)$$

В частности, для него была найдена (L, A) -пара вида

$$L(\lambda) = \dot{\varphi} + \lambda e^{ad\varphi} I + \lambda^{-1} e^{-ad\varphi} J, \quad A(\lambda) = \lambda^{-1} e^{-ad\varphi} J - \lambda e^{ad\varphi} I, \quad (6.3)$$

где $I \in \mathfrak{g}$, $J \in \mathfrak{g}_{-1}$. Следующее предложение показывает, что решение (6.1) уравнения (1.4) является классической r -матрицей [5, с. 141], соответствующей оператору L вида (6.3).

Предложение 6.2. $\{L(\lambda), L(\mu)\} = 2[L(\lambda) \otimes 1 + 1 \otimes L(\mu), \xi(\lambda/\mu)]$, где ξ определяется формулой (6.1).

Поясним, что $L(\lambda)$ и $L(\mu)$ рассматриваются как \mathfrak{g} -значные функции от φ и $\dot{\varphi}$, а их скобка Пуассона — это функция от φ и $\dot{\varphi}$ со значениями в $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть $I \in \sum_{\alpha \in \Gamma} I_{\alpha}$, $J \in \sum_{\alpha \in \Gamma} J_{\alpha}$ где $I_{\alpha} \in \mathfrak{g}_1^{\alpha}$, $J_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{-1}^{-\alpha}$ (из инвариантности скалярного произведения в \mathfrak{g} следует, что $\mathfrak{g}_{-1} = \bigotimes_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}_{-1}^{-\alpha}$). Обозначим через α^* образ α при изоморфизме $\mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$, определяемом скалярным произведением в \mathfrak{h} . Имеем

$$\begin{aligned} \{L(\lambda), L(\mu)\} &= \\ &= \{\dot{\varphi}, \mu e^{ad\varphi} I + \mu^{-1} e^{ad\varphi} J\} + \{\lambda e^{ad\varphi} I + \lambda^{-1} e^{-ad\varphi} J, \dot{\varphi}\} = \\ &= \sum_{\alpha \in \Gamma} (\{\dot{\varphi}, \mu e^{\alpha(\varphi)} I_{\alpha} + \mu^{-1} e^{\alpha(\varphi)} I_{\alpha}\} + \{\lambda e^{\alpha(\varphi)} I_{\alpha} + \lambda^{-1} e^{\alpha(\varphi)} J_{\alpha}, \dot{\varphi}\}) = \\ &= \sum_{\alpha \in \Gamma} e^{\alpha(\varphi)} (\mu \alpha^* \otimes I_{\alpha} + \mu^{-1} / \alpha^* \otimes J_{\alpha} - \lambda I_{\alpha} \otimes \alpha^* - \lambda^{-1} J_{\alpha} \otimes \alpha^*). \end{aligned}$$

С другой стороны, так как $[\dot{\varphi} \otimes 1 + 1 \otimes \dot{\varphi}, \xi(\lambda/\mu)] = 0$, то

$$\begin{aligned} \left[L(\lambda) \otimes 1 + 1 \otimes L(\mu), \xi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right] &= \\ &= \sum_{\alpha \in \Gamma} e^{\alpha(\varphi)} \left[\lambda I_{\alpha} \otimes 1 + 1 \otimes \mu I_{\alpha} + \lambda^{-1} J_{\alpha} \otimes 1 + 1 \otimes \mu^{-1} J_{\alpha}, \xi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right]. \end{aligned}$$

Остается проверить, что

$$\left[\lambda I_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \mu I_\alpha, \xi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right] = \frac{1}{2}(\mu \alpha^* \otimes I_\alpha - \lambda I_\alpha \otimes \alpha^*), \quad (6.4)$$

$$\left[\lambda^{-1} J_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \mu^{-1} J_\alpha, \xi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right] = \frac{1}{2}(\mu^{-1} \alpha^* \otimes J_\alpha - \lambda^{-1} J_\alpha \otimes \alpha^*), \quad (6.5)$$

Докажем (6.4). Из равенства

$$[I_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes I_\alpha, t] = 0$$

вытекает, что

$$[1 \otimes I_\alpha, t_j] + [I_\alpha \otimes 1, t_{j-1}] = 0, \quad j \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left[\lambda I_\alpha \otimes 1 \otimes \mu I_\alpha, \xi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right] &= \left[\lambda I_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \mu I_\alpha, \frac{t_0}{2} \right] - [1 \otimes \mu I_\alpha, t_0] = \\ &= \frac{\mu}{2} [t_0, 1 \otimes I_\alpha] - \frac{\lambda}{2} [t_0, I_\alpha \otimes 1] = \frac{\mu}{2} \alpha^* \otimes I_\alpha - \frac{\lambda}{2} I_\alpha \otimes \alpha^*. \end{aligned}$$

Точно так же доказывается (6.5).

Те же рассуждения, что при доказательстве предложения 6.2, показывают, что решение (6.1) уравнения (1.4) является классической r -матрицей, соответствующей двумерному обобщению уравнения (6.2) (см. [6], [12]).

6.4. Пусть $X(u)$ — невырожденное тригонометрическое решение уравнения (1.4). Без ограничения общности можно считать, что множество полюсов $X(u)$ — это $2\pi i\mathbb{Z}$. Пусть A — автоморфизм \mathfrak{g} такой, что

$$X(u + 2\pi i) = (A \otimes 1)X(u).$$

Обозначим через σ автоморфизм схемы Дынкина Δ алгебры \mathfrak{g} , определяемый A . В этой ситуации будем говорить, что решение $X(u)$ соответствует σ . Заметим, что если $X(u)$ заменить эквивалентным решением, то A заменится на $T_1 A T_2^{-1}$, где T_1 и T_2 принадлежат одной и той же связной компоненте $\text{Aut } \mathfrak{g}$, и поэтому класс сопряженности σ не изменится.

Перейдем к описанию общего вида тригонометрических решений, соответствующих фиксированному $\sigma \in \text{Aut } \Delta$. Зафиксируем кокстеровский автоморфизм $C \in K_\sigma$. Пусть h, Γ, t_j, \dots обозначают то же, что в пунктах 6.1–6.3. Дискретным параметром, от которого зависит решение, служит тройка Γ_1, Γ_2, τ , где $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma$, τ — взаимно однозначное отображение Γ_1 на Γ_2 такое, что а) для любых $\alpha, \beta \in \Gamma(\tau(\alpha), \tau(\beta)) = (\alpha, \beta)$, б) для любого $\alpha \in \Gamma_1$ существует натуральное k такое, что $\tau^k(\alpha) \notin \Gamma_1$. Отметим, что выражение $\tau^k(\alpha)$ имеет смысл только если $\alpha, \tau(\alpha), \dots, \tau^{k-1}(\alpha) \in \Gamma_1$. Поэтому условие б)

фактически означает, что выражение $\tau^k(\alpha)$ не имеет смысла при достаточно больших k . Тройку $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$, удовлетворяющую условиям а) и б), будем называть допустимой.

Пусть $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ — допустимая тройка. Непрерывным параметром, от которого зависит решение, служит тензор $r \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$, удовлетворяющий системе уравнений

$$r^{12} + r^{21} = t_0, \quad (6.6)$$

$$(\tau\alpha \otimes 1)(r) = (1 \otimes \alpha)(r) = 0, \quad \alpha \in \Gamma_1. \quad (6.7)$$

Поясним, что если

$$r = \sum_{i=1}^k h_i \otimes h'_i, \quad h_i, h'_i \in \mathfrak{h}, \quad \alpha \in \mathfrak{h}^*,$$

то

$$(\alpha \otimes 1)(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k \alpha(h_i) h'_i, \quad (1 \otimes \alpha)(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k \alpha(h'_i) h_i.$$

Лемма 6.1. Система уравнений (6.6), (6.7) совместна. Решениями соответствующей однородной системы являются кососимметрические тензоры из $\mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}_0$, где

$$\mathfrak{h}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathfrak{h} \mid \forall \alpha \in \Gamma_1, \alpha(a) = (\tau\alpha)(a)\}$$

и только эти тензоры.

Доказательство этой леммы, как и лемм 6.2–6.4 будет приведено в пункте 6.6.

Обозначим через \mathfrak{a}_i ($i = 1, 2$) подалгебру в \mathfrak{g} , порожденную подпространствами \mathfrak{g}_1^α , $\alpha \in \Gamma_i$. Напомним, что $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j,\alpha} \mathfrak{g}_j^\alpha$.

Лемма 6.2. Подалгебра \mathfrak{a}_i является суммой некоторых из подпространств \mathfrak{a}_j^α .

Согласно лемме 6.2, существует единственный проектор $P: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a}_1$, такой, что $P(\mathfrak{g}_j^\alpha) = 0$, если $\mathfrak{g}_j^\alpha \not\subset \mathfrak{a}_1$. Для любого $\alpha \in \Gamma_1$ зафиксируем изоморфизм векторных пространств $\mathfrak{g}_1^\alpha \simeq \mathfrak{g}_1^{\tau(\alpha)}$ (напомним, что $\dim \mathfrak{g}_1^\alpha = \dim \mathfrak{g}_1^{\tau(\alpha)} = 1$).

Лемма 6.3. Изоморфизмы $\mathfrak{g}_1^\alpha \simeq \mathfrak{g}_1^{\tau(\alpha)}$, $\alpha \in \Gamma_1$, продолжаются до изоморфизма алгебр Ли $\theta: \mathfrak{a}_1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_2$.

Определим линейный оператор $\tilde{\theta}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ формулой $\tilde{\theta}(x) = \theta(P(x))$.

Лемма 6.4. Оператор θ нильпотентен.

Положим $\psi = \frac{\tilde{\theta}}{1 - \tilde{\theta}} = \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^2 + \dots$

Теорема 6.1. 1) Пусть $r \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ удовлетворяет системе уравнений (6.6), (6.7). Тогда функция

$$X(u) = r + \frac{1}{e^u - 1} \sum_{j=0}^{h-1} e^{ju/h} t_j - \sum_{j=1}^{h-1} e^{ju/h} (\psi \otimes 1) t_j + \sum_{j=1}^{h-1} e^{-ju/h} (1 \otimes \psi) t_{-j} \quad (6.8)$$

является решением уравнения (1.4) с множеством полюсов $2\pi i\mathbb{Z}$ и вычетом t в нуле. При этом

$$X(u + 2\pi i) = (C \otimes 1)X(u).$$

2) Всякое тригонометрическое решение уравнения (1.4) с множеством полюсов $2\pi i\mathbb{Z}$ и вычетом t в нуле, соответствующее автоморфизму $\sigma \in \text{Aut } \mathbb{Z}$, эквивалентно решению вида (6.8).

Доказательству этой теоремы посвящены пункты 6.5–6.7.

Замечание. 1) Решение (6.1) соответствует случаю, когда

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \phi, \quad r = t_0/2.$$

2) Легко видеть, что решение (6.8) \mathfrak{h}_0 -инвариантно, где \mathfrak{h}_0 обозначает то же, что в лемме 6.1. Поэтому, прибавив к этому решению любой кососимметрический тензор из $\mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h} - 0$, мы получим снова решение уравнения (1.4) (см. пункт 1.1). Согласно лемме 6.1, этим способом можно все решения, соответствующие фиксированной тройке $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$, получить, исходя из одного решения. Далее, нетрудно показать, что изменение изоморфизмов $\mathfrak{g}_1^\alpha \simeq \mathfrak{g}_1^{\tau(\alpha)}$, $\alpha \in \Gamma_1$ от их выбора зависят θ, ψ и, следовательно, $X(u)$ приводит к замене $X(u)$ на $(e^{ada} \otimes e^{ada})X(u)$, $a \in \mathfrak{h}$. Таким образом, из теоремы 6.1 следует, что, с точностью до описанных в пункте 1.1 способов размножения решений и таких тривиальных преобразований, как умножение решения на число и замена u на cu , число невырожденных тригонометрических решений уравнения (1.4) конечно.

3) Можно показать, что если решения $X(u)$ и $\tilde{X}(u)$ вида (6.8) эквивалентны, то $\tilde{X}(u) = (g \otimes g)X(u)$, $g \in G$, где G обозначает то же, что в замечании 1 после предложения 6.1.

4) Из предыдущего замечания и замечания 1 после предложения 6.1 следует, что а) если решения $X(u)$ и $\tilde{X}(u)$ вида (6.8), соответствующие тройкам $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ и $(\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\tau})$ эквивалентны, то $(\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\tau})$ получается применением к $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ некоторого автоморфизма схемы Дынкина пары (\mathfrak{g}, C) ; б) если $(\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\tau})$ получается применением к $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ автоморфизма схемы Дынкина пары (\mathfrak{g}, C) , то любое решение вида (6.8), соответствующее $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$, эквивалентно некоторому решению, соответствующему $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\tau}$.

Примеры. 1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$. У схемы Дынкина \mathfrak{g} есть только тождественный автоморфизм:

$$h = 2, \quad \mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}, \quad \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2\}. \quad C(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1(e_{22} - e_{11}) = 2$, $\alpha_2 = -\alpha_1$ (здесь и в дальнейшем e_{ij} обозначает матрицу, у которой на пересечении i -ой строки и j -го столбца стоит единица, а остальные элементы равны нулю). Имеем: $\mathfrak{g}_1^{\alpha_1} = \mathbb{C}e_{21}$, $\mathfrak{g}_1^{\alpha_2} = \mathbb{C}e_{12}$. Схема Дынкина (\mathfrak{g}, C) имеет вид

$$\alpha_1 \text{ --- } \alpha_2$$

Существуют две существенно различные допустимые тройки Γ_1, Γ_2, τ : а) $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \emptyset$, б) $\Gamma_1 = \{\alpha_1\}$, $\Gamma_2 = \{\alpha_2\}$, $\tau(\alpha_1) = \alpha_2$ (случай, когда $\Gamma_1 = \{\alpha_2\}$, $\Gamma_2 = \{\alpha_1\}$, можно не рассматривать ввиду замечания 4)). Имеем

$$t_0 = 1/2(e_{11} - e_{22}) \otimes (e_{11} - e_{22}), \quad t_1 = e_{12} \otimes e_{21} + e_{21} \otimes e_{12}.$$

Система уравнений (6.6), (6.7) имеет и в случае а) и в случае б) единственное решение $r = t_0/2$. В случае б) имеем $a_1 = \mathbb{C}e_{21}$, $a_2 = \mathbb{C}e_{22}$; θ можно выбрать так, чтобы $\theta(e_{21}) = e_{12}$, тогда $\tilde{\theta}(e_{21}) = e_{12}$, $\tilde{\theta}(e_{12}) = \tilde{\theta}(e_{11} - e_{22}) = \theta$, $\psi = \tilde{\theta}$. Таким образом, получаем два решения:

$$\begin{aligned} \text{а) } X_1(u) = & \frac{e^u + 1}{4(e^u - 1)}(e_{11} - e_{22}) \otimes (e_{11} - e_{22}) + \\ & + \frac{e_{12} \otimes e_{21} + e_{21} \otimes e_{12}}{e^{u/2} - e^{-u/2}}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

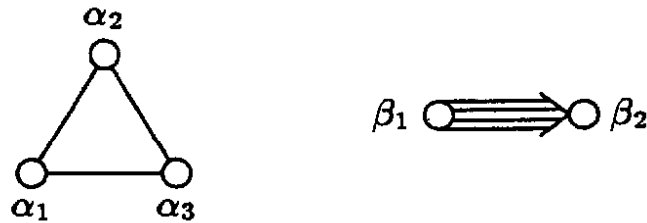
$$\text{б) } X_2(u) = X_1(u) + (e^{-u/2} - e^{u/2})(e_{12} \otimes e_{12}). \quad (6.10)$$

Оба решения хорошо известны. Более того, известны соответствующие решения квантового уравнения Янга–Бакстера: (6.9) соответствует тригонометрическому вырождению решения Бакстера (см. приложение к [5], формула П9), и (6.10) соответствует решению, найденному в [9] (с. 118, случай а)).

2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3)$. У схемы Дынкина \mathfrak{g} два автоморфизма. Соответствующие кокстеровские автоморфизмы таковы:

$$\begin{aligned} C_1(X) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i/3} \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4\pi i/3} \end{pmatrix}^{-1}, \\ C_2(X) &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{2\pi i/3} \\ 0 & e^{\pi i/3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{2\pi i/3} \\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Схемы Дынкина пар (\mathfrak{g}, C_1) и (\mathfrak{g}, C_2) имеют вид



Во втором случае есть единственная допустимая тройка:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \phi$$

(дело в том, что $(\beta_1, \beta_1) \neq (\beta_2, \beta_2)$) Соответствующее решение является классической r -матрицей для уравнения Жибера–Шабата [2]. Оно эквивалентно решению, приведенному в приложении к [5] (формула III). Выпишем решения, соответствующие C_1 . В этом случае $h = 3$, \mathfrak{g}_j — множество матриц (a_{kl}) из $sl(3)$ таких, что $a_{kl} = 0$ при $k - l \not\equiv j \pmod{3}$. В частности, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ — множество диагональных матриц. Имеем:

$$t = \sum_{k-l \equiv j \pmod{3}} e_{kl} \otimes e_{lk} \quad \text{при } j \neq 0,$$

$$t_0 = \frac{1}{3} \sum_{i < j} (e_{ii} - e_{jj}) \otimes (e_{ii} - e_{jj}).$$

Простые веса $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на матрице $\text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ принимают значения, равные $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_1 - a_3$. При этом

$$\mathfrak{g}_1^{\alpha_1} = \mathbb{C}e_{21}, \quad \mathfrak{g}_1^{\alpha_2} = \mathbb{C}e_{32}, \quad \mathfrak{g}_1^{\alpha_3} = \mathbb{C}e_{13}.$$

Допустимые тройки: а) $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \phi$; б) $\Gamma_1 = \{\alpha_1\}, \Gamma_2 = \alpha_2, \tau(\alpha_1) = \alpha_2$; в) $\Gamma_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \Gamma_2 = \{\alpha_2, \alpha_3\}, \tau(\alpha_1) = \alpha_2, \tau(\alpha_2) = \alpha_3$.

Рассмотрим случай в). В этом случае

$$a_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}, \quad a_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\tilde{\theta} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{31} & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{31} & a_{32} + a_{21} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

$$r = \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^3 r_{ij} e_{ii} \otimes e_{jj}, \quad (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи а) и б). Ответы:

$$\text{а) } X_1(u) = \sum_{i,j=1}^3 \rho_{ij} e_{ii} \otimes e_{jj} + Y(u), \text{ где}$$

$$Y(u) = \frac{1}{e^u - 1} \left[\frac{1}{3} \sum_{i < j} (e_{ii} - e_{jj}) \otimes (e_{ii} - e_{jj}) + \right. \\ \left. + e^{u/3} \sum_{i-j \equiv 1 \pmod{3}} e_{ij} \otimes e_{ji} + e^{2u/3} \sum_{i-j \equiv 2 \pmod{3}} e_{ij} \otimes e_{ji} \right],$$

$$(\rho_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/3 & a & b \\ b & 1/3 & a \\ a & b & 1/3 \end{pmatrix}, \quad a + b = -\frac{1}{3}.$$

б) $X_2(u) = r + Y(u) - e^{u/3} e_{32} \otimes e_{12} + e^{-u/3} e_{12} \otimes e_{32}$, где r определяется формулой (6.11);

в) $X_3(u) = X_2(u) - e^{u/3} e_{13} \otimes (e_{12} + e_{23}) - e^{2u/3} e_{12} \otimes e_{13} + e^{-u/3} \times$
 $\times (e_{12} + e_{23}) \otimes e_{13} + e^{-2u/3} e_{13} \otimes e_{12}.$

6.5. В качестве первого шага к доказательству теоремы 6.1 переведем задачу классификации тригонометрических решений на другой язык.

Пусть $X(u)$ — тригонометрическое решение уравнения (1.4) с множеством полюсов $2\pi i\mathbb{Z}$ и вычетом t в нуле (такие решения будем называть нормированными). Имеем:

$$X(u + 2\pi i) = (A \otimes 1)X(u) = (1 \otimes A^{-1})X(u), \quad A \in \text{Aut } \mathfrak{g}. \quad (6.12)$$

Так как существует k такое, что $X(u)$ — рациональная функция от e^{ku} , то A имеет конечный порядок m . Тогда

$$X(u) = \varphi(e^{u/m}) I_\mu \otimes I_\mu,$$

где $\{I_\mu\}$ — ортонормированный базис в \mathfrak{g} , φ — рациональная функция со значениями в пространстве линейных операторов $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Разложим $\varphi(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $Z = \infty$:

$$\varphi(z) = \sum_{i=-\infty}^N \varphi_i z^i.$$

Обозначим через $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$ алгебру многочленов вида $\sum_{i=l}^n x_i z^i$, $x_i \in \mathfrak{g}$.

Определим оператор $\Phi: \mathfrak{g}[z, z^{-1}] \rightarrow \mathfrak{g}[z, z^{-1}]$ формулой $\Phi\left(\sum_i x_i z^i\right) = \sum_i \varphi_i(x_i) z^i$. Определим в $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$ инвариантное скалярное произведение формулой $\left(\sum_i x_i z^i, \sum_j y_j z^j\right) = \sum_i (x_i, y_{-i})$. Положим $\zeta = e^{2\pi i/m}$.

Имеем: $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$, где $\mathfrak{g}_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{g} \mid Ax = \zeta^i x\}$. Пусть $\Pi_i: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ — проектор на \mathfrak{g}_i . Определим проектор $\Pi: \mathfrak{g}[z, z^{-1}] \rightarrow \mathfrak{g}[z, z^{-1}]$ формулой $\Pi\left(\sum_i x_i z^i\right) = \sum_i \Pi_{-i}(x_i) z^i$.

Лемма 6.5. 1) Оператор Φ обладает следующими свойствами:

а) $\Phi(\mathfrak{g}z^i) \subset \mathfrak{g}z^i$,

б) $\Phi(\mathfrak{g}z^i) = 0$ при $i \gg 0$,

в) $\Phi = \Pi\Phi\Pi$,

г) $\Phi + \Phi^* = \Pi$,

д) $[\Phi(w_1), \Phi(w_2)] = \Phi([w_1, \Phi(w_2)] + [\Phi(w_1), w_2] - [\Pi w_1, w_2])$,

$$w_1, w_2 \in \mathfrak{g}[z, z^{-1}].$$

2) Построенное отображение из множества нормированных тригонометрических решений уравнения (1.4), удовлетворяющих соотношению (6.12), в множество линейных операторов

$$\Phi: \mathfrak{g}[z, z^{-1}] \rightarrow \mathfrak{g}[z, z^{-1}],$$

обладающих свойствами а)–д), биективно.

Доказательство. 1) Свойства а) и б) очевидны. Из (6.12) следует, что $\varphi(z, \zeta) = A\varphi(z) = \varphi(z)A$, поэтому $\varphi_i = \Pi_i\varphi_i = \varphi_i\Pi_i$, откуда следует в). Чтобы доказать г), воспользуемся равенством

$$\varphi_i = -\operatorname{res}_{z=0} z^{-i-1}\varphi(z) = \operatorname{res}_{z=0} z^{-i-1}\varphi(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{res}_{z=\zeta^k} z^{-i-1}\varphi(z).$$

Так как $\operatorname{res}_{u=0} X(u) = t$, то $\operatorname{res}_{u=2\pi i k} X(u) = (A^k \otimes 1)t$, откуда $\operatorname{res}_{z=\zeta^k} \varphi(z) = 1/m A^m \cdot \zeta^k$. Из условия унитарности следует, что $\varphi(z) = -\varphi(z^{-1})^*$. Таким образом,

$$\varphi_i = -\operatorname{res}_{z=0} z^{-i-1}\varphi(z-1)^* + \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{-ik} A^k = \Pi_i - \varphi_{-i}^* \quad (6.13)$$

откуда следует г). Для доказательства д) воспользуемся уравнением (1.4). Имеем:

$$[X^{12}(u), X^{13}(u+v)] = [\varphi(z_1)I_\mu, \varphi(z_1, z_2)I_\nu] \otimes I_\mu \otimes I_\nu,$$

где $z_1 = e^{u/m}$, $z_2 = e^{v/m}$. Далее,

$$\begin{aligned} [X^{12}(u), X^{23}(v)] &= (\varphi(z_1) \otimes 1 \otimes 1)[t^{12}, X^{23}(v)] = \\ &= -(\varphi(z_1) \otimes 1 \otimes 1)[t^{12}, X^{13}(v)] = -\varphi(z_1)[I_\mu, \varphi(z_2)I_\nu] \otimes I_\mu \otimes I_\nu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X^{13}(u+v), X^{23}(v)] &= (\varphi(z_1, z_2) \otimes 1 \otimes 1)[t^{13}, X^{23}(v)] = \\
&= -(\varphi(z, z_2) \otimes 1 \otimes 1)[t^{13}, X^{21}(v)] = \\
&= -(\varphi(z, z_2) \otimes 1 \otimes 1)[t^{13}, \varphi(z_2)^* I_\mu \otimes I_\mu \otimes 1] = \\
&= \varphi(z, z_2)[\varphi(z_2)^* I_\mu, I_\nu] \otimes I_\mu \otimes I_\nu.
\end{aligned}$$

Поэтому из уравнения (1.4) следует, что

$$[\varphi(z_1)I_\mu, \varphi(z, z_2)I_\nu] = \varphi(z_1)[I_\mu, \varphi(z_2)I_\nu] - \varphi(z, z_2)[\varphi(z_2)^* I_\mu I_\nu].$$

Разложив обе части этого равенства в ряд Лорана в окрестности точки $z_1 = z_2 = \infty$, приравняв коэффициенты при $z_1^{i+j} z_2^j$, и воспользовавшись формулой (6.13), получим

$$\begin{aligned}
[\varphi_i I_\mu, \varphi_j I_\nu] &= \varphi_{i+j}[I_\mu, \varphi_j I_\nu] - \varphi_{i+j}[\varphi_{-j}^* I_\mu, I_\nu] = \\
&= \varphi_{i+j}([I_\mu, \varphi_j I_\nu] + [\varphi_j I_\mu, I_\nu] - [\Pi_j I_\mu, I_\nu]),
\end{aligned}$$

откуда следует д).

2) По оператору Φ однозначно восстанавливаются $\varphi_i, \varphi(z)$ и, наконец, $X(u)$. Обратив рассуждения, использованные при доказательстве утверждения 1), получим, что если Φ обладает свойствами а) — д), то $X(u)$ — нормированное тригонометрическое решение уравнения (1.4).

Положим $G_i = \mathfrak{g}_i z^i$, $G = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} G_i$. Ясно, что G — градуированная подалгебра Ли в $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$, а скалярное произведение в G невырождено. Пусть Φ обладает свойствами а)–д) (см. лемму 6.5). Из свойства в) следует, что $\Phi(G) \subset G$. Пусть $f: G \rightarrow G$ — ограничение Φ на G . Тогда

$$f(G_i) \subset G_i, \quad (6.14)$$

$$f(G_i) = 0 \quad \text{при} \quad i \gg 0, \quad (6.15)$$

$$f + f^* = 1, \quad (6.16)$$

$$[f(w_1), f(w_2)] = f([w_1, f(w_2)] + [f(w_1), w_2] - [w_1, w_2]), \quad w_1, w_2 \in G. \quad (6.17)$$

Наоборот, любой линейный оператор $f: G \rightarrow G$, обладающий свойствами (6.14)–(6.17), однозначно продолжается до оператора

$$\Phi: \mathfrak{g}[z, z^{-1}] \rightarrow \mathfrak{g}[z, z^{-1}],$$

обладающего свойствами а)–д).

Лемма 6.6. Пусть линейный оператор $f: G \rightarrow G$ удовлетворяет условию (6.16). Положим $C_1 = \text{Im}(f - 1)$, $C_2 = \text{Im} f$. Тогда

$$\text{а) } C_1^\perp = \text{Ker } f \subset C_1, \quad C_2^\perp = \text{Ker}(f - 1) \subset C_2;$$

б) отображение $\theta: C_1/C_1^\perp \rightarrow C_2/C_2^\perp$, переводящее смежный класс $(f - 1)w$ в смежный класс fw , корректно определено и является ортогональным изоморфизмом;

в) для того чтобы f удовлетворял условию (6.17) необходимо и достаточно, чтобы C_1 и C_2 были подалгебрами в G , C_1^\perp и C_2^\perp были идеалами в C_1 и C_2 , а θ являлось изоморфизмом алгебр Ли.

Доказательство. Утверждения а) и б) проверяются непосредственно. Пусть f удовлетворяет (6.17). Тогда

$$[(f-1)w_1, (f-1)w_2] = (f-1)[w_1, f(w_2)] = [f(w_1), w_2] - [w_1, w_2]. \quad (6.18)$$

Из (6.18) следует, что C_1 — подалгебра, а из (6.17) следует, что C_2 — подалгебра. Из инвариантности скалярного произведения в G вытекает, что $[C_1, C_1^\perp] \subset C_1^\perp$, $[C_1, C_2^\perp] \subset C_2^\perp$. Формулы (6.17) и (6.18) показывают, что θ — изоморфизм алгебр Ли.

Пусть C_1 и C_2 — подалгебры в G (тогда C_1^\perp и C_2^\perp — идеалы в C_1 и C_2), а θ — изоморфизм алгебр Ли. Тогда для любых $w_1, w_2 \in G$ существуют $u \in G$, $v \in \text{Ker } f$ такие, что

$$[f(w_1), f(w_2)] = f(u), \quad (6.19)$$

$$[(f-1)w_1, (f-1)w_2] = (f-1)u + v. \quad (6.20)$$

Вычитая из (6.19) равенство (6.20), получим

$$[f(w_1), w_2] + [w_1, f(w_2)] - [w_1, w_2] = u - v. \quad (6.21)$$

Применив к обеим частям (6.21) оператор f и воспользовавшись тем, что $v \in \text{Ker } f$, получим (6.17).

Заметим, что переход от f к θ — это обобщение преобразования Кэли, связывающего кососимметричные и ортогональные операторы.

6.6. В этом пункте будут доказаны леммы 6.1–6.4 и утверждение 1) теоремы 6.1 Пусть $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ — допустимая тройка.

Лемма 6.7. Векторы $\tau\alpha - \alpha$, $\alpha \in \Gamma_1$ линейно независимы.

Доказательство. Пусть $\sum_{\alpha \in \Gamma_1} \lambda_\alpha (\tau\alpha - \alpha) = 0$. Запишем это соотношение в виде $\sum_{\alpha \in \Gamma} \mu_\alpha \alpha = 0$. Тогда $\sum_{\alpha \in \Gamma} \mu_\alpha = 0$. С другой стороны, известно [3], что между простыми весами есть ровно одно линейное соотношение, причем соответствующие коэффициенты имеют одинаковый знак. Поэтому $\mu_\alpha = 0$ для любого $\alpha \in \Gamma$. Отсюда следует, что $\tau(S) = S$, где $S \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in \Gamma_1 \mid \lambda_\alpha \neq 0\}$. Из условия б) в определении допустимой тройки и равенства $\tau(S) = S$ вытекает, что $S = \emptyset$.

Лемма 6.8. Пусть V — конечномерное векторное пространство, снабженное невырожденной симметрической билинейной формой. Пусть $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k \in V$, причем векторы e_1, \dots, e_k линейно независимы. Для того, чтобы существовал линейный оператор $R: V \rightarrow V$ такой, что $R + R^* = 1$ и $Re_i = f_i$ при $i = 1, 2, \dots, k$, необходимо и достаточно, чтобы $(e_i, f_j) + (e_j, f_i) = (e_i, e_j)$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Доказательство леммы 6.1. Для любого $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ обозначим через α^* образ α при каноническом изоморфизме $\mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$. Положим $r = (R \otimes 1)t_0$, $R: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$. Тогда уравнения (6.6) и (6.7) переписутся в виде

$$R + R^* = 1, \quad (6.22)$$

$$R\alpha^* + R^*(\tau\alpha)^* = 0, \quad \alpha \in \Gamma_1. \quad (6.23)$$

Ввиду (6.22), уравнение (6.23) можно переписать в виде

$$R\alpha^* + R^*(\tau\alpha)^* = 0, \quad \alpha \in \Gamma_1. \quad (6.24)$$

Поэтому из лемм 6.7 и 6.8 следует, что для доказательства совместности системы уравнений (6.6), (6.7) достаточно для любых $\alpha, \beta \in \Gamma_1$ проверить равенство

$$(\tau\alpha - \alpha, \tau\beta) + (\tau\beta - \beta, \alpha) = (\tau\alpha - \alpha, \tau\beta - \beta).$$

Это равенство эквивалентно условию а) в определении допустимой тройки. Однородная система, соответствующая уравнениям (6.6) и (6.7), эквивалентна следующей системе:

$$r^{12} + r^{21} = 0, \quad (\tau\alpha \otimes 1)(r) = (\alpha \otimes 1)(r), \quad \alpha \in \Gamma_1.$$

Ее решениями являются кососимметрические тензоры из $\mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}_0$.

Выберем ненулевые векторы $e_\alpha^+ \in \mathfrak{g}_1^\alpha$, $\alpha \in \Gamma_1$. Для любого $\alpha \in \Gamma$ обозначим через e_α^- элемент \mathfrak{g}_{-1} такой, что $(e_\alpha^-, e_\beta^+) = \delta_{\alpha\beta}$ при всех $\beta \in \Gamma$. Для любых $\alpha, \beta \in \Gamma$ положим $A_{\alpha\beta} = \beta(h_\alpha)$, где $h_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} 2\alpha^*/(\alpha, \alpha)$. Известно [3], что $A_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$, $A_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Кроме того, известно (см. [3], пункт 4, а также лемму 9 из [4]), что

$$[e_\alpha^+, e_\beta^-] = \delta_{\alpha\beta} h_\alpha, \quad [h_\alpha, e_\beta^+] = A_{\alpha\beta} e_\beta^+, \quad [h_\alpha, e_\beta^-] = -A_{\alpha\beta} e_\beta^- \quad (6.25)$$

$(ade_\alpha^+)^{1-A_{\alpha\beta}} e_\beta^+ = (ade_\alpha^-)^{1-A_{\alpha\beta}} e_\beta^- = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Пусть G и G_j обозначают то же, что в пункте 6.5, в ситуации, когда $A = C$, $m = h$. Положим

$$G^+ = \bigoplus_{j=1}^{\infty} G_j, \quad G^- = \bigoplus_{j=1}^{\infty} G_{-j}.$$

Известно [3], что алгебра G^+ порождается элементами $e_\alpha^+ z$, $\alpha \in \Gamma$, G^- — элементами $e_\alpha^- z^{-1}$, а $G_0 = \mathfrak{h}$ — элементами h_α . Для любого $S \subset G$ обозначим через G_S (соответственно, G_S^+) подалгебру в G , порожденную элементами

$$e_\alpha^+ z, \quad h_\alpha, \quad e_\alpha^- z^{-1} \quad (\alpha \in S)$$

(соответственно, элементами $e_\alpha^+ z$, $\alpha \in S$).

Лемма 6.9. Пусть $S \subset \Gamma$, $S \neq \Gamma$. Тогда

а) G_S — полупростая конечномерная алгебра Ли с образующими Вейля $e_\alpha^+ z$, $e_\alpha^- z^{-1}$, k_α ;

б) G_S^+ является суммой некоторых из подпространств $\mathfrak{g}_j^\gamma z^j$, $\gamma \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$;

$$\text{в) } G_S^+ \subset \bigoplus_{j=1}^{n-1} G_j.$$

Доказательство. Из результатов [3] нетрудно вывести, что матрица $(A_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta \in S$ является матрицей Картана полупростой конечномерной алгебры Ли. Отсюда и из (6.25) вытекает а). Так как $\dim \mathfrak{g}_1^\gamma = 1$ при $\gamma \neq 0$, то для доказательства б) достаточно показать, что если $\gamma \in \mathfrak{h}^*$, $G_S^+ \cap \mathfrak{g}_j^\gamma z^j \neq 0$, то $\gamma \neq 0$. Действительно, из а) следует, что в этом случае $\gamma(h_\alpha) \neq 0$ для некоторого $\alpha \in S$. Если бы $G_S^+ \not\subset \bigoplus_{j=1}^{h-1} G_j$, то $G_S^+ \cap G_h \neq 0$, что противоречит б), так как $[\mathfrak{h}, G_h] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}z^h] = 0$.

Из леммы 6.9 немедленно следует лемма 6.2 (α_i — это образ $G_{\Gamma_i}^+$, при каноническом гомоморфизме $G \rightarrow \mathfrak{g}$).

Пусть заданы допустимая тройка $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ и изоморфизм

$$\varphi_\alpha : \mathfrak{g}_1^\alpha \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_1^{\tau(\alpha)}.$$

Будем предполагать, что элементы e_α^+ , $\alpha \in \Gamma$ выбраны так, что $\varphi_\alpha(e_\alpha^+) = e_{\tau(\alpha)}^+$ при $\alpha \in \Gamma_1$ (такой выбор возможен ввиду условия б) из определения допустимой тройки). Из леммы 6.9 следует, что существует изоморфизм $T : G_{\Gamma_1} \xrightarrow{\sim} G_{\Gamma_2}$ такой, что $T(e_\alpha^+ z) = e_{\tau(\alpha)}^+ z$, $T(e_\alpha^- z^{-1}) = e_{\tau(\alpha)}^- z^{-1}$, $T(h_\alpha) = h_{\tau(\alpha)}$.

Отсюда вытекает лемма 6.3.

Определим линейный оператор $\tilde{T} : G^+ \rightarrow G^+$ следующим образом: если $w \in G_{\Gamma_1}^+$, то $\tilde{T}(w) = T(w)$; если же $\gamma \in \mathfrak{h}^*$, $j \in N$, $\mathfrak{g}_j^\gamma z^j \subset G_{\Gamma_1}^+$, $\tilde{T}(\mathfrak{g}_j^\gamma z^j) = 0$.

Лемма 6.10. *Оператор \tilde{T} нильпотентен.*

Доказательство. Допустим, что $w \in \mathfrak{g}_j^\gamma$, $z^j \in G_{\Gamma_1}^+$, $w \neq 0$, причем для любого $k > 0$ $T^k(w) \in G_{\Gamma_1}^+$. Пусть $T(w) \in \mathfrak{g}_j^{\gamma'} z^j$. Ясно, что $\gamma = \sum_{\alpha \in S} n_\alpha \alpha$, где $n_\alpha > 0$, $S \subset \Gamma_1$, $\gamma' = \sum_{\alpha \in S} n_\alpha \cdot \tau(\alpha) = \sum_{\alpha \in S'} n'_\alpha \cdot \alpha$, где $n'_\alpha > 0$, $S' \subset \Gamma_1$. При этом $\sum_{\alpha \in S} n_\alpha = \sum_{\alpha \in S'} n'_\alpha = j$. Так же как при доказательстве леммы 6.7, отсюда выводится, что $S' = \tau(S)$. Итак, $\tau^k(S) \subset \Gamma_1$ при любом k , что противоречит допустимости $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$.

Из леммы 6.10 следует лемма 6.4.

Приступим к доказательству утверждения 1) теоремы 6.1. Пусть $r \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ удовлетворяет (6.6) и (6.7), тогда $r = (R \otimes 1)t_0$, где $R : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ удовлетворяет (6.22) и (6.24). Определим $f_+ : G^+ \rightarrow G^+$ формулой

$f_+ = \tilde{T}/(\tilde{T} - 1)$. Определим $f_- : G^- \rightarrow G^-$ формулой $f_- = 1 - f_+^*$. Пусть $f : G \rightarrow G$ — линейный оператор, ограничения которого на G^+ , G^- , \mathfrak{h} равны f_+ , f_- , R . Ясно, что f удовлетворяет условиям (6.14)–(6.16). Остается показать, что f удовлетворяет также условию (6.17) (легко видеть, что построенное по f решение уравнения (1.4) задается формулой (6.8)).

Рассмотрим тройку (C_1, C_2, θ) , соответствующую f (см. лемму 6.6).

Лемма 6.11. 1) Если $\alpha \in \Gamma_i$, то $h_\alpha \in C_i$.

2) Пусть $\alpha \in \Gamma_1$, \bar{h}_α и $\bar{h}_{\tau(\alpha)}$ — образы h_α и $h_{\tau(\alpha)}$ в $C_1|C_1^\perp$ и $C_2|C_2^\perp$. Тогда $\theta(\bar{h}_\alpha) = \bar{h}_{\tau(\alpha)}$.

Доказательство. Из (6.24) и равенства

$$(\tau(\alpha), \tau(\alpha)) = (\alpha, \alpha)$$

следует, что $R(h_{\tau(\alpha)} - h_\alpha) = h_{\tau(\alpha)}$ при $\alpha \in \Gamma_1$. Отсюда легко вывести лемму.

Легко видеть, что $C_1 = G_{\Gamma_1} + G^+ + V_1$, $C_2 = G_{\Gamma_2} + G^- + V_2$, где V_1, V_2 — векторные подпространства в \mathfrak{h} . Отсюда следует, что C_1 и C_2 — подалгебры Ли в G , причем $C_i|C_i^\perp = G_{\Gamma_i} \otimes \mathfrak{h}_i$, где \mathfrak{h}_i — абелева алгебра, состоящая из элементов степени 0. Покажем, что θ — изоморфизм алгебр Ли. Так как оператор θ ортогонален, то достаточно показать, что $\theta(w) = T(w)$ при $w \in G_{\Gamma_1}$. Операторы θ и T ортогональны и сохраняют градуировку (ортогональность T следует из условия а) в определении допустимой тройки). Поэтому равенство $\theta(w) = T(w)$ достаточно доказать в случае, когда $w \in G_{\Gamma_1}$ — однородный элемент неотрицательной степени. При $w \in G_{\Gamma_1}^+$ это равенство проверяется непосредственно, а при $\deg w = 0$ оно следует из леммы 6.11.

6.7. В этом пункте используется система обозначений пункта 6.5 (в частности, автоморфизм A не предполагается кокстеровским). Пусть $f : G \rightarrow G$ удовлетворяет условиям (6.14)–(6.17). Имеем: $G = \bigoplus_{\lambda \in C} G^\lambda$, где $G^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_n \text{Ker}(f - \lambda)^n$.

Лемма 6.12. Если $\lambda + \mu \neq 1$, то $[G^\lambda, G^\mu] \subset G^\nu$, где

$$\nu = \lambda\mu/(\lambda + \mu + 1).$$

Если $\lambda + \mu = 1$, $\lambda\mu \neq 0$, то $[G^\lambda, G^\mu] = 0$.

Доказательство. Если $\lambda + \mu \neq 1$, то положим

$$V = G^\nu, \quad \nu = \lambda\mu/(\lambda + \mu - 1).$$

Если $\lambda + \mu = 1$, $\lambda\mu \neq 0$, то положим $V = 0$. Надо показать, что если $(f - \lambda)^k x = 0$, $(f - \mu)^l y = 0$, то $[x, y] \in V$. Это утверждение дока-

зывается индукцией по $k + l$ при помощи тождества

$$[(f - \lambda)x, (f - \mu)y] = (f - \lambda)[x, (f - \mu)y] + \\ + (f - \mu)[(f - \lambda)x, y] + ((\lambda + \mu - 1)f - \lambda\mu)[x, y],$$

вытекающего из (6.17).

Лемма 6.13. Если ψ — автоморфизм неразрешимой конечномерной алгебры Ли, то $\det(\psi - 1) = 0$.

Доказательство сводится к случаю полупростой алгебры, а затем к рассмотренному при доказательстве предложения 2.3 случаю простой алгебры.

Положим $G' = \bigoplus_{\lambda \neq 0, 1} G^\lambda$.

Лемма 6.14. G' — конечномерная разрешимая подалгебра в G .

Доказательство. Из леммы 6.15 следует, что G' -подалгебра. Из (6.15) и (6.16) следует, что $G_i \subset G^0$ при $i \gg 0$, $G_i \subset G^1$ при $i \ll 0$. Поэтому $\dim G' < \infty$. Определим $\psi: G' \rightarrow G'$ формулой $\psi = f/(f - 1)$. Тогда $\det \psi \neq 0$, $\det(\psi - 1) \neq 0$. Из (6.17) и (6.18) следует, что ψ — автоморфизм G' как алгебры Ли. Остается воспользоваться леммой 6.13.

Лемма 6.15. 1) $(G^0)^\perp = G^0 \oplus G'$, $(G^1)^\perp = G^1 \oplus G'$. 2) $G^0 \oplus G'$ — подалгебра в G , а G^0 — идеал в $G^0 \oplus G^1$. 3) $G^1 \oplus G'$ — подалгебра в G , а G^1 — идеал в $G^1 \oplus G^1$.

Доказательство. Утверждение 1) следует из (6.16). Утверждения 2) и 3) вытекают из леммы 6.12.

Положим $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \det G_0 = \mathfrak{g}_0$, $\alpha^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cap G^\lambda$, $\alpha' \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cap G'$,

$$n^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \alpha \mid [x, \alpha_\lambda] \subset \alpha_\lambda\}.$$

Согласно лемме 1 из [3], алгебра α редуктивна в \mathfrak{g} .

Лемма 6.16. $f(n^\lambda) \subset n^\lambda$.

Доказательство. Индукцией по k докажем, что если $x \in n^\lambda$, $y \in \alpha$, $(f - \lambda)^k y = 0$, то $[f(x), y] \in \alpha^\lambda$. Из (6.17) следует, что

$$[f(x), f(y)] - f([f(x), y]) \in \alpha^\lambda,$$

а по предположению индукции $[f(x), (f - \lambda)y] \in \alpha^\lambda$. Поэтому

$$9(f - \lambda)[f(x), y] \in \alpha^\lambda$$

и, следовательно, $[f(x), y] \in \alpha^\lambda$.

Предложение 6.3. Существуют противоположные борелевские подалгебры b_+ , $b_- \subset \alpha$ такие, что а) $f(b_+) \subset b_+$, $f(b_-) \subset b_-$; б) $\alpha' \subset b_+ \cap b_-$, $b_+ \supset \alpha^0 \supset [b_+, b_+]$, $b_- \supset \alpha^1 \supset [b_-, b_-]$.

Доказательство. $\alpha^0 \subset (\alpha^0)^\perp$, поэтому из критерии Картана следует разрешимость α^0 . Так как α^0 — идеал в $\alpha^0 \oplus \alpha'$, то из леммы 6.14 вытекает разрешимость $\alpha^0 \oplus \alpha'$. Поэтому $\alpha^0 \oplus \alpha'$ содержится в некоторой борелевской подалгебре b_+ . Точно так же доказывается, что $\alpha^1 \oplus \alpha'$ содержится в некоторой борелевской подалгебре b_- . Так как $\alpha^0 \oplus \alpha' \oplus \alpha' = \alpha$, то $b_+ + b_- = \alpha$, т. е. b_+ и b_- противоположны. Так как $(\alpha^0)^\perp = \alpha^0 \oplus \alpha' \subset b_+$, то $\alpha^0 \supset b_+^\perp = [b_+, b_+]$, (здесь “ \perp ” обозначает ортогональное дополнение в α). Аналогично, $\alpha^1 \supset [b_-, b_-]$. Так как $b_+ \supset \alpha^0 \supset [b_+, b_+]$, то $n^0 = b_+$. Поэтому из леммы 6.16 следует, что $f(b_+) \subset b_+$. Аналогично, $f(b_-) \subset b_-$.

Положим $\mathfrak{h} = b_+ \cap b_-$. \mathfrak{h} — картановская подалгебра в α , причем $f(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. Ясно, что $\mathfrak{h} = \alpha' \oplus \mathfrak{h}^0 \oplus \mathfrak{h}^1$, где

$$\mathfrak{h}^0 = \alpha^0 \cap \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{h}^1 = \alpha^1 \cap \mathfrak{h}.$$

При этом $\alpha \perp (\mathfrak{h}^0 \oplus \mathfrak{h}^1)$, а \mathfrak{h}^0 и \mathfrak{h}^1 изотропны.

Лемма 6.17. $[\mathfrak{h}, G^0] \subset G^0$, $[\mathfrak{h}, G^1] \in G^1$, $[\mathfrak{h}, G^1] \subset G'$.

Доказательство. Так как $[G^0 + G', G^0] \subset G^0$, то $[\mathfrak{h}^0 \oplus \alpha', G^0] \subset G^0$. Выведем отсюда, что $[\mathfrak{h}, G^0] \subset G^0$. Известно (см. [3]), что $G = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} G_\alpha$, где $G_\alpha = \{w \in G \mid \forall a \in \mathfrak{h} [a, w] = \alpha(a)w\}$ поэтому доста-

точно показать, что если $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \neq \beta$, $G_\alpha \neq 0$, $G_\beta \neq 0$, то ограничение $\alpha - \beta$ на $\mathfrak{h}^0 \otimes \alpha'$ не равно нулю. Действительно, если бы $(\alpha - \beta)(\mathfrak{h}^0 \oplus \alpha') = 0$, то $(\alpha - \beta, \alpha - \beta) = 0$, а это невозможно в силу пункта 5 работы [3].

Точно так же доказывается, что $[\mathfrak{h}, G^1] \subset G^1$. Так как

$$G' = (G^0 + G^1)^\perp,$$

то $[\mathfrak{h}, G'] \subset G'$.

Для любых $i \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ положим

$$G_i^\alpha = \{w \in G_i \mid \forall a \in \mathfrak{h}, [a, w] = \alpha(a)w\}.$$

Элементы множества $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha, i) \mid G_i^\alpha \neq 0\}$ называются весами. Имеем: $G = \bigoplus_{(\alpha, i) \in \Sigma} G_i^\alpha$. Положим

$$\Sigma' = \{(\alpha, i) \in \Sigma \mid \alpha \neq 0\}.$$

Каждому весу $(\alpha, i) \in \Sigma'$ сопоставим функционал $\lambda_i^\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле $\lambda_i^\alpha(a) = \alpha(a) + i$. В [3] показано, что функционалы λ_i^α , $(\alpha, i) \in \Sigma'$, образуют аффинную систему корней в смысле [7].

Лемма 6.18. 1) Существует камера вейля K такая, что $G^0 = \mathfrak{h}^0 \oplus G^+$, $G^1 = \mathfrak{h}^1 \oplus G^-$, $G' = \alpha'$, где

$$G^+ \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{(\alpha, i) \in \Sigma_+} G_i^\alpha, \quad G^- \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{(\alpha, i) \in \Sigma_-} G_i^\alpha,$$

Σ_+ (соответственно Σ_-) — множество весов, положительных (отрицательных) относительно K .

$$2) \quad f(G^+) \subset G^+, \quad f(G^-) \subset G^-.$$

Доказательство. Пусть $(\alpha, i) \in \Sigma'$. Тогда $\dim G_i^\alpha = 1$ (см. [3]). Поэтому из леммы 6.17 следует, что либо $G_i^\alpha \subset G^0$, либо $G_i^\alpha \subset G^1$, либо $G_i^\alpha \subset G'$. Из (6.10) следует, что скалярное произведение на G' невырождено. Поэтому если бы $G_i^\alpha \subset G'$, то $G_{-i}^{-\alpha} \subset G'$ и, следовательно, G' содержало бы подалгебру, изоморфную $sl(2)$ (см. лемму 2 из [3]), а это противоречит лемме 6.14. Таким образом, $G_i^\alpha \subset G^0$ или $G_i^\alpha \subset G^1$. Из изотропности G^0 и G' следует, что $G_i^\alpha \subset G^0 \Leftrightarrow G_{-i}^{-\alpha} \subset G^1$. Положим $S = \{(\alpha, i) \in \Sigma' \mid G_i^\alpha \subset G^0\}$. Мы показали, что $S \cup (-S) = \Sigma'$. Кроме того, из (6.15) следует, что если $(\alpha, i) \in \Sigma'$, $i \gg 0$, то $(\alpha, i) \in S$. Отсюда вытекает существование камеры Вейля K такой, что все простые относительно K веса принадлежат S . Тогда $G_i^\alpha \subset G^0$ при $(\alpha, i) \in \Sigma_+$, $G_i^\alpha \subset G^1$ при $(\alpha, i) \in \Sigma_-$, откуда следует утверждение 1). Для доказательства 2) достаточно заметить, что $G^+ = (G^1 + \mathfrak{h})^\perp$, $G^- = (G^0 + \mathfrak{h})^\perp$.

Обозначим через Γ множество простых весов, соответствующих K . Для любого $S \subset \Gamma$ обозначим через G_S подалгебру в G , порожденную подпространствами G_i^α и $G_{-i}^{-\alpha}$, $(\alpha, i) \in S$. Положим $G_S^+ = G_S \cap G^+$. Рассмотрим тройку (C_1, C_2, θ) , соответствующую f (см. лемму 6.6).

Лемма 6.19. *Существуют подмножества $\Gamma_i \subset \Gamma$ и векторные подпространства $V_i \subset \mathfrak{h}$ ($i = 1, 2$) такие, что $C_1 = G_{\Gamma_1} + G^+ + V_1$, $C_2 = G_{\Gamma_2} + G^- + V_2$.*

Доказательство. Так как $C_1 = I_m(f - 1) \supset \mathfrak{h}^0 \oplus \mathfrak{a}'$, то

$$[\mathfrak{h}^0 \otimes \mathfrak{a}', C_1] = C_1.$$

Отсюда следует, что $[\mathfrak{h}, C_1] \subset C_1$ (см. доказательство леммы 6.17). Далее, $C_1 \supset G^0 \supset G^+$. Отсюда и из результатов [3] следует, что C_1 имеет требуемый вид. Аналогично доказывается утверждение о C_2 .

Из леммы 6.19 следует, что $C_i/C_i^\perp = G_{\Gamma_i} \otimes \mathfrak{h}_i$, где \mathfrak{h}_i — абелева алгебра. Изоморфизм θ отображает G_{Γ_1} на G_{Γ_2} , сохраняя градуировку, поэтому θ индуцирует биекцию $\tau: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$.

Лемма 6.20. *Тройка $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ допустима.*

Доказательство. Определим $\psi: G^+ \rightarrow G^+$ формулой

$$\psi = f/(f - 1).$$

Так как $G^+ \subset G^0$, то определение ψ корректно и ψ нильпотентен. Легко проверить, что если $(\alpha, i) \in \Gamma_1$, $\tau(\alpha, i) = (\beta, j)$, то $\psi(G_i^\alpha) = G_j^\beta$; если же $(\alpha, i) \in \Gamma \setminus \Gamma_1$, то $\psi(G_i^\alpha) = 0$. Отсюда следует условие б) из определения допустимой тройки. Условие а) вытекает из ортогональности θ .

Для любого $(\alpha, i) \in \Sigma$ обозначим через $n(\alpha, i)$ сумму коэффициентов разложения (α, i) по элементам Γ . Введем в G новую градуировку (назовем ее K -градуировкой), положив $\deg G_i^\alpha = n(\alpha, i)$.

Лемма 6.21. *f сохраняет K -градуировку.*

Доказательство. Достаточно проверить, что оператор ψ из доказательства леммы 6.20 сохраняет K -градуировку, а этот факт следует из аналогичного свойства θ .

Пусть

$$\Gamma = \{(\alpha_0, i_0), \dots, (\alpha_r, i_r)\}.$$

Согласно [3], функционалы $\alpha_0, \dots, \alpha_r$ порождают \mathfrak{h}^* и между ними есть ровно одно линейное соотношение $\sum_{s=0}^r k_s \alpha_s = 0$. При этом

коэффициенты k_s можно нормировать условием $\sum_{s=0}^r k_s i_s = m$ и то-

гда $k_s \in \mathbb{N}$, а $\sum_{s=0}^r k_s$ равна числу Кокстера h пары (\mathfrak{g}, σ) , где σ — автоморфизм схемы Дынкина \mathfrak{g} , соответствующий A . Поэтому существует ровно один элемент $a_0 \in \mathfrak{h}$ такой, что $\alpha_s(a_0) = \frac{1}{h} - \frac{i_s}{m}$, $s = 0, 1, \dots, r$. Положим $C = A \cdot \exp(2\pi i \cdot \text{ad} a_0)$. Легко видеть, что C — кокстеровский автоморфизм. Положим $\omega = e^{2\pi i/h}$,

$$\mathfrak{g}_i^C = \{x \in \mathfrak{g} \mid Cx = \omega^i x\}, \quad G^C = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j^C z^j.$$

Определим линейный оператор $\varphi: G \rightarrow G^C$ следующим образом: если $x \in \mathfrak{g}$, $xz^j \in G_j^\alpha$, то $\varphi(xz^j) \stackrel{\text{def}}{=} xz^{n(\alpha, j)}$. Легко видеть, что это определение корректно и φ — изоморфизм алгебр Ли, сохраняющий скалярное произведение и переводящий K -градуировку G в обычную градуировку G^C . Поэтому оператор $f: G^C \rightarrow G^C$, заданный формулой $\tilde{f} = \varphi f \varphi^{-1}$, удовлетворяет условиям (6.14)–(6.17). Обозначим через $X(u)$ и $\tilde{X}(u)$ решения уравнения (1.4), соответствующие f и \tilde{f} (см. пункт 6.5).

Лемма 6.22. *Решения $X(u)$ и $\tilde{X}(u)$ эквивалентны.*

Доказательство. Легко проверить, что

$$\tilde{X}(u) = (e^{u \cdot \text{ad} a_0} \otimes 1) X(u), \quad [a_0 \otimes 1 + 1 \otimes a_0, X(u)] = 0.$$

Перейдем непосредственно к доказательству утверждения 2) теоремы 6.1. Пусть $X(u)$ — нормированное тригонометрическое решение уравнения (1.4), удовлетворяющее (6.12), $f: G \rightarrow G$ — соответствующий оператор. Лемма 6.22 показывает, что, заменив $X(u)$ эквивалентным решением, можно добиться, чтобы $i_0 = \dots = i_r = 1$ и, тем самым, $A = C$. Легко видеть, что в этом случае оператор ψ из доказательства леммы 6.20 совпадает с оператором \tilde{T} , о котором идет речь

в лемме 6.10. Поэтому ограничение f на G^+ равно $\tilde{T}(\tilde{T} - 1)$. Обращая доказательство леммы 6.11, получим, что ограничение f на \mathfrak{h} удовлетворяет (6.22) и (6.24). Таким образом, наш оператор f совпадает с оператором f из пункта 6.6 и, следовательно, $X(u)$ имеет вид (6.8).

7. Рациональные решения, не имеющие полюса на бесконечности

7.1. Пусть $X(u)$ — рациональное решение уравнения (1.4), не имеющее полюса на бесконечности и с вычетом t в нуле. Тогда

$$X(u) = \frac{t}{u} + r, \quad r \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}. \quad (7.1)$$

Легко проверить, что функция $X(u)$, заданная формулой (7.1), является решением (1.4) тогда и только тогда, когда r удовлетворяет системе уравнений (1.2), (1.3). Задача полной классификации решений этой системы представляется нам безнадежной, так как она содержит подзадачу классификации коммутативных подалгебр в \mathfrak{g} (действительно, если \mathfrak{a} — коммутативная подалгебра в \mathfrak{g} и $r \in \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$, то r удовлетворяет (1.2)). Поэтому ограничимся тем, что приведем несколько способов построения решения системы уравнений (1.2), (1.3).

7.2. 1) Пусть $a, b \in \mathfrak{g}$, $[a, b] = b$. Тогда $r = a \otimes b - b \otimes a$ является решением системы (1.2), (1.3). Легко проверить, что при $\mathfrak{g} = sl(2)$ эта конструкция дает все ненулевые решения. Отметим, что если $a, b \in sl(2)$, $[a, b] = b$, то существует матрица $T \in SL(2)$, такая, что

$$a = T \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} T^{-1}, \quad b = T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

2) Пусть A — конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра над C , $\mathfrak{a} \stackrel{\text{def}}{=} A \otimes A^*$. Введем на \mathfrak{a} структуру алгебры Ли следующим образом: $[e_i, e_j] = 0$, $[e^i, e^j] = 0$, $[e_i, e^j] = \alpha_{ik}^j e^k$, где $\{e_i\}$ — базис в A , $\{e^i\}$ — двойственный базис в A^* , $e_i e_j = \alpha_{ij}^k e_k$. Легко проверить, что тензор $r = e_i \otimes e^i - e^i \otimes e_i \in \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ является решением системы (1.2), (1.3). Если кроме того, задан гомоморфизм $f: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}$, то $(f \otimes f)(r)$ — решение, принадлежащее $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. При $A = C$ этот способ построения решений превращается в способ 1).

7.3. Пусть $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ — решение системы (1.2), (1.3). Обозначим через \mathfrak{a} наименьшее векторное подпространство в \mathfrak{g} такое, что $r \in \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$. Тогда \mathfrak{a} — подалгебра Ли и тензор r невырожден как элемент $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$. Пусть B — билинейная форма на \mathfrak{a} , обратная по отношению к r (т.е. если $\{e_\mu\}$ — базис в \mathfrak{a} , $r = r^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu$, $(S_{\mu\mu})$ — матрица, обратная к $(r^{\mu\nu})$, то $B(e_\mu, e_\nu) = S_{\mu\nu}$). Согласно предложению 2.4 форма B является 2-коциклом (т.е. кососимметрична и удовлетворяет (2.10)). Наоборот,

каждой паре (α, B) , где α — подалгебра в \mathfrak{g} , B — невырожденный 2-коцикл на α , соответствует решение системы (1.2), (1.3).

Напомним, что 2-коциклами являются, в частности, 2-кограницы, т.е. формы вида $B(x, y) = l([x, y])$, где $l \in \alpha^*$. Назовем функционал $l \in \alpha^*$ невырожденным, если форма $l([x, y])$ невырождена. Алгебры Ли α , на которых существуют невырожденные линейные функционалы, исследовались, например, в [13], [14], [15]. Такие алгебры называются фробениусовыми. Итак, по фробениусовой алгебре Ли α , невырожденному функционалу $l \in \alpha^*$ и вложению $\alpha \hookrightarrow \mathfrak{g}$ строится решение системы (1.2), (1.3). Это решение, по существу, не зависит от l , так как, согласно [15], все невырожденные функционалы на α получаются применением внутренних автоморфизмов α к фиксированному функционалу.

Пример. α — множество матриц размера $n \times n$, у которых нижние k строк равны нулю. Как сообщил нам Л.Г. Элашвили, алгебра α фробениусова тогда и только тогда, когда n делится на k . Пусть это условие выполнено. Тогда функционал $l: \alpha \rightarrow \mathbb{C}$, заданный формулой

$$l(A) = \sum_{i=1}^{n-k} a_{i,i+k}, \text{ где } A = (a_{ij}), \text{ невырожден. Соответствующий тензор}$$

$r \in \alpha \otimes \alpha$, удовлетворяющий (1.2) и (1.3), имеет вид

$$r = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{(a,b,c,d) \in S} (e_{i+ka, j+kb} \otimes e_{j+kc, i+kd} - e_{j+kc, i+kd} \otimes e_{i+ka, j+kb}),$$

где

$$S = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

$$b + d - a - c = 1, 0 \leq b \leq a < m - 1, b \leq c < m - 1, 0 \leq d < m\},$$

$m = n/k$, e_{rs} — матрица, у которой элемент на пересечении r -ой строки и s -го столбца равен 1, а остальные элементы равны нулю. Чтобы получить решение системы уравнений (1.2), (1.3), лежащее в $sl(n) \otimes sl(n)$, достаточно применить к r отображение $f \otimes f$, где $f: \alpha \hookrightarrow sl(n)$ задано формулой $f(A) = A - \frac{1}{N} (\text{Tr } A) \cdot E$.

Литература

1. Белавин А.А., Дискретные группы и интегрируемость квантовых систем, Функц. анализ, 1980, т. 14, вып. 4, с. 18–26.
2. Жибер А.В., Шабат А.Б., Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой, ДАН СССР, 1979, т. 247, № 5, с. 1103–1107.
3. Кац В.Г., Автоморфизмы конечного порядка полупростых алгебр Ли, Функц. анализ, 1969, т. 3, вып. 3, с. 94–96.
4. Кац В.Г., Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста, Изв. АН СССР, сер. матем., 1968, т. 32, № 6, с. 1323–1367.

5. Кулиш П.П., Склянин Е.К., О решениях уравнения Янга–Бакстера. В сб. Дифференциальная геометрия группы Ли и механика, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1980, т. 95, с. 129–160.
6. Лезнов А.Н., Савельев М.В., Смирнов В.Г., Теория представлений групп и интегрирование нелинейных динамических систем, Препринт ИВФЭ 80–51. Серпухов: ИВФЭ, 1980.
7. Макдональд И.Г., Аффинные системы корней и η -функция Дедекинда, Математика, 1972, т. 16, вып. 4, с. 3–49.
8. Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, М., Мир, 1969.
9. Чередник И.В., Об одном методе построения факторизованных S -матриц в элементарных функциях, Теорет. и матем. физика, 1980, т. 43, № 1, с. 117–119.
10. Bogoyavlensky O.I., On perturbations of the periodic Toda lattice, Comm. Math. Phys., 1976, v. 51, p. 201–209.
11. Кас V.G., Infinite-dimensional algebras, Dedekinds η -functions, classical Möbius function and the very strange formula, Adv. in Math., 1978, v. 30, № 2, p. 85–136.
12. Michailov A.V., Olshanetsky M.A., Perelomov A.M., Preprint ITEP-64. Moscow: ITEP, 1980.
13. Bulgadaev S.A., Two-dimensional integrable field theories connected with simple Lie algebras, P.L., 1980, v. 96B, p. 151–153.
14. Ooms A.I., On Lie algebras having a primitive universal enveloping algebra, J. of Algebra, 1975, v. 32, № 3, p. 488–500.
15. Ooms A.I., On Lie algebras with primitive envelopes, Supplements, Proc. Amer. Math. Soc., July 1976, v. 58, p. 67–72.
16. Ooms A.I., On Frobenius Lie algebras, Comm. in Algebra, 1980, v. 8(1), p. 13–52.
17. Weil A., Varietes abeliennes et courbes algebriques. Paris: Hermann, 1948.
18. Weil A., On algebraic group of transformations, Amer. J. of Math., 1955, v. 77, p. 355–391.

МОДУЛИ ВЕРМА НАД АЛГЕБРОЙ ВИРАСОРО

Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б.

Lecture Notes in Math (Spr. Ver.). 1060 (1984). P. 230–245

1. Введение

Пусть \mathcal{L} — бесконечномерная алгебра Ли над \mathbb{C} с образующими e_i ($i \in \mathbb{Z}$) и операцией коммутирования

$$[e_i, e_j] = (j - i) e_{i+j}.$$

Эту алгебру можно рассматривать как комплексификацию алгебры Ли полиномиальных векторных полей на окружности: элементы e_k соответствуют векторному полю $(\exp ik\varphi) d/d\varphi$, где φ — угловой параметр. Хорошо известно [4], что \mathcal{L} имеет единственное нетривиальное одномерное центральное расширение. Расширенная алгебра $\hat{\mathcal{L}}$ называется *алгеброй Вирасоро*. Ее образующими являются e_i ($i \in \mathbb{Z}$) и z , причем их коммутационные соотношения определяются согласно следующим формулам:

$$[e_i, z] = 0, \quad [e_i, e_j] = (j - i) e_{i+j} + \frac{1}{12} (j^3 - j) \delta_{i,-j} z.$$

(Конечно, коэффициенты в приведенных формулах и, в частности, множитель $1/12$, зависят от выбора базиса в алгебре, но присутствие слагаемого третьей степени неизбежно.) Обе алгебры, как \mathcal{L} так и $\hat{\mathcal{L}}$, градуированы: $\deg e_i = i$, $\deg z = 0$. Подалгебра в \mathcal{L} или в $\hat{\mathcal{L}}$ с образующими e_i с $i > 0$ (с $i < 0$) обозначается через N_+ (N_-).

Алгебра Ли \mathcal{L} играет особую роль в теории бесконечномерных алгебр Ли. Можно легко показать, что она проста. Существует важная проблема классификации всех простых комплексных алгебр Ли, допускающих \mathbb{Z} -градуировку с конечномерными однородными компонентами. Известны два широких класса таких алгебр. Первый состоит из алгебр Картана; алгебра Ли \mathcal{L} полиномиальных векторных полей над \mathbb{C}^n — типичный представитель этого класса. Второй класс состоит из алгебр Каца–Мууди, факторизованных по центру (некоторые из этих алгебр просты лишь в слабом, “градуированном” смысле). Алгебра \mathcal{L} не принадлежит ни к одному из этих классов. Кроме того, известно, что никакая другая \mathbb{Z} -градуированная простая (хотя бы в градуированном смысле) алгебра Ли с конечномерными однородными компонентами не изоморфна никакой из алгебр Ли указанных

выше классов. Более того, имеется предположение [8], что таких алгебр не существует. (По правде говоря, это предположение не кажется нам особенно надежным, так как оно мотивировано лишь недостатком знаний.)

Другое объяснение растущей популярности алгебр \mathcal{L} и $\hat{\mathcal{L}}$ — это их важная роль в теории дуальных моделей в квантовой теории поля (см. [10]). Некоторые из приведенных ниже результатов непосредственно связаны с теорией дуальных моделей, но здесь мы эти связи не указываем.

Модули Верма, с которыми в этой статье мы, главным образом, имеем дело, являются свободными градуированными $\hat{\mathcal{L}}$ -модулями с одной образующей над N_+ . В § 1 мы напомним их точное определение и увидим, что такие модули параметризуются двумя комплексными числами h и c . Модули Верма $V_{h,c}$ играют существенную роль в изучении $\hat{\mathcal{L}}$ -модулей с локально нильпотентным действием подалгебры N_- . Например, существует нетривиальный гомоморфизм модуля Верма в любой из таких модулей, и любой неприводимый модуль из этого класса (то есть любое неприводимое представление алгебры $\hat{\mathcal{L}}$ старшего веса) является фактормодулем модуля Верма по максимальному собственному подмодулю. В частности, важно знать, для каких h и c модуль $V_{h,c}$ является приводимым. Эта проблема была решена (см. [7, 3]); точная формулировка результата приводится ниже в § 1.

Основные результаты этой статьи будут изложены в § 2. Они заключаются в полном описании структуры приводимых модулей Верма или, эквивалентно, в явном описании формальных характеров неприводимых представлений старших весов алгебры $\hat{\mathcal{L}}$. Некоторые из этих результатов уже были представлены Кацем в работе [8]. Здесь мы не приводим явной формулы для “особых векторов” (то есть векторов подмодулей старшего веса) приводимых модулей Верма. Некоторые сведения об этих векторах содержатся в § 3. В заключительном § 4 мы используем результаты § 3 для нового доказательства результатов Гончаровой [6] и авторов данной статьи [2] относительно гомологий алгебры Ли векторных полей на прямой, а также для вывода некоторых новых результатов для этих гомологий.

В статье содержится лишь краткая схема доказательств основных результатов; более подробная версия будет представлена в последующих работах.

2. Предварительные результаты

Пусть H — (коммутативная) двумерная подалгебра $\hat{\mathcal{L}}$ с образующими e_0 и z . Для $h, c \in \mathbb{C}$ обозначим через $I_{h,c}$ одномерное представление алгебры $N_- + H \subset \hat{\mathcal{L}}$, определенное формулами: $I_{h,c}(e_i) = 0$

при $i < 0$, $I_{h,c}(e_0) = h$, $I_{h,c}(z) = c$, и через $V_{h,c}$ — $\hat{\mathcal{L}}$ -модуль, индуцированный $I_{h,c}$. Рассматриваемый как N_+ модуль, $V_{h,c}$ является свободным модулем с одной образующей v , которая называется *вакуумным вектором*. Таким образом, $V_{h,c}$ имеет базис, состоящий из векторов $e_{j_1} \dots e_{j_s} v$ с $j_1 \geq \dots \geq j_s \geq 1$. Этот модуль имеет естественную градуировку: $\deg(e_{j_1} \dots e_{j_s} v) = j_1 + \dots + j_s$; однородная компонента $V_{h,c}^n$ модуля $V_{h,c}$ имеет размерность $p(n)$ равную числу разбиений n . Очевидно

$$\begin{aligned} e_i v &= 0 && \text{для} && i < 0, \\ z x &= c x && \text{для любого} && x \in V_{h,c}, \\ e_0 x &= (h + n) x && \text{для} && x \in V_{h,c}^n. \end{aligned}$$

Ненулевой вектор $w \in V_{h,c}^n$ называется *особым*, если $e_i w = 0$ для всех $i < 0$. В частности, v всегда является особым вектором. Следующее утверждение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Модуль $V_{h,c}$ неприводим тогда и только тогда, когда он не содержит особых векторов положительной степени. Особый вектор степени n порождает в модуле $V_{h,c}$ подмодуль, изоморфный модулю $V_{h+n,c}$. Фактормодуль $M_{h,c}$ модуля $V_{h,c}$ по максимальному собственному подмодулю неприводим, и каждый неприводимый модуль старшего веса является модулем вида $M_{h,c}$.*

Положим

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha,\beta}(h, c) &= \left(h + \frac{1}{24} (\alpha^2 - 1) (c - 13) + \frac{1}{2} (\alpha\beta - 1) \right) + \\ &+ \left(h + \frac{1}{24} (\beta^2 - 1) (c - 13) + \frac{1}{2} (\alpha\beta - 1) \right) - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{16}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1.2. (См. [7, 3]) 1°. *Модуль $V_{h,c}$ приводим тогда и только тогда, когда для некоторых положительных целых чисел α, β имеет место равенство $\Phi_{\alpha,\beta}(h, c) = 0$.*

2°. *Множество положительных n , для которых $V_{h,c}^n$ содержит особый вектор, совпадает с множеством чисел, представимых в виде произведения положительных целых чисел α, β , для которых $\Phi_{\alpha,\beta}(h, c) = 0$.*

ПРИМЕР 1.3. Модуль $V_{h,1}$ приводим тогда и только тогда, когда $h = t^2/4$, где $t \in \mathbb{Z}$; модуль $V_{h,0}$ приводим тогда и только тогда, когда $h = (t^2 - 1)/24$, где $t \in \mathbb{Z}$.

3. Структура приводимых модулей Верма

ТЕОРЕМА 2.1. *Любой подмодуль модуля $V_{h,c}$ порождается своими особыми векторами.*

Эта теорема сводит изучение подмодулей модуля $V_{h,c}$, также как и изучение фактормодулей $M_{h,c}$, к проблеме перечисления и определения взаимной зависимости особых векторов модуля $V_{h,c}$. Эти проблемы решаются при помощи теоремы 2.2, сформулированной ниже. Наши доказательства теорем 2.1 и 2.2 чередуются друг с другом. Набросок этого общего доказательства приводится в конце этого пункта.

Формулировка теоремы 2.2 требует некоторой предварительной работы с функциями $\Phi_{\alpha,\beta}$. Очевидно, что

$$\Phi_{\alpha,\beta} = \Phi_{\beta,\alpha} = \Phi_{-\alpha,-\beta} = \Phi_{-\beta,-\alpha}.$$

При фиксированных h, c уравнение $\Phi_{\alpha,\beta}(h, c) = 0$ определяет в плоскости $\mathbb{C}^2(\alpha, \beta)$ четверку прямых линий, а именно линии $p\alpha + q\beta + t = 0$, где

$$c = \frac{(3p+2q)(3q+2p)}{pq}, \quad h = \frac{m^2 - (q-p)^2}{4pq} \quad (1)$$

(направления этих линий зависят лишь от c). Когда $c \neq 1, 25$, эти линии образуют ромб с диагоналями $\alpha = \pm\beta$. Если $c = 1$ (соответственно $c = 25$) этот ромб вырождается в пару линий, параллельных прямой $\alpha = \beta$ (соответственно $\alpha = -\beta$) и симметричных относительно нее; если, кроме того $h = 0$ (соответственно $h = -1$), эти две прямые становятся одной линией. Для вещественного $c \leq 1$ четыре прямых являются вещественными и имеют положительный наклон, для вещественного $c \geq 25$ они вещественны и имеют отрицательный наклон, для остальных c они не вещественны. Эти прямые никогда не являются горизонтальными или вертикальными (параллельными координатным осям).

Для заданных h, c мы обозначим через $l_{h,c}$ одну из вышеупомянутых четырех прямых. Будем различать следующие случаи.

СЛУЧАЙ I. Прямая $l_{h,c}$ не содержит целочисленных точек.

СЛУЧАЙ II. Прямая $l_{h,c}$ содержит в точности одну целочисленную точку (a', a'') , то есть точка (h, c) принадлежит в точности одной кривой $\Phi_{a',a''}(h, c) = 0$ с целыми a', a'' . Произведение $a' a''$ может быть положительным (подслучай II₊), нулем (подслучай II₀) или отрицательным (подслучай II₋).

СЛУЧАЙ III. Прямая $l_{h,c}$ содержит бесконечно много целочисленных точек, то есть точка (h, c) является точкой пересечения двух и, следовательно, бесконечного числа кривых $\Phi_{a',a''}(h, c) = 0$ с целочисленными a', a'' . В этом случае с необходимостью $c \leq 1$ (подслучаи III₀⁰, III₀⁰, III₋) или $c \geq 25$ (подслучаи III₊⁰⁰, III₊⁰, III₊).

ПОДСЛУЧАЙ III_±⁰⁰. Линия $l_{h,c}$ пересекает обе координатные оси в целочисленных точках. Обозначим через P среднюю точку отрезка, соединяющего эти две точки и занумеруем наши целочисленные

точки верхней половины прямой $l_{h,c}$ (включая точку P , если она целочисленная) при помощи последовательности

$$\dots, (a'_{-1}, a''_{-1}), (a'_0, a''_0), (a'_1, a''_1), \dots, \quad (2)$$

в которой $\dots < a'_{-1} a''_{-1} < a'_0 a''_0 = 0 < a'_1 a''_1 < \dots$ (эта последовательность бесконечна в одном направлении — влево для подслучая Π_+^{00} , и вправо для подслучая Π_-^{00} — и конечна в другом направлении; целочисленные точки другой половины прямой $l_{h,c}$ имеют те же произведения координат).

ПОДСЛУЧАЙ Π_{\pm}^0 . Прямая $l_{h,c}$ пересекает одну координатную ось в целочисленной точке, а другую координатную ось — в нецелочисленной точке. Занумеруем имеющиеся целочисленные точки прямой $l_{h,c}$ согласно последовательности (2) в которой

$$\dots < a'_{-1} a''_{-1} < a'_0 a''_0 = 0 < a'_1 a''_1 < \dots$$

(Опять эта последовательность бесконечна в одном направлении — влево для подслучая Π_+^0 и вправо для подслучая Π_-^0 — и конечна в другом направлении.)

ПОДСЛУЧАЙ Π_{\pm} . Прямая $l_{h,c}$ пересекает обе координатные оси в нецелочисленных точках. Занумеруем целочисленные точки прямой $l_{h,c}$ согласно последовательности (2) (опять бесконечной в одном направлении и конечной в другом направлении) в которой

$$\dots < a'_{-1} a''_{-1} < 0 < a'_0 a''_0 < a'_1 a''_1 < \dots$$

Затем проведем прямую $l'_{h,c}$ через точку $(-a'_0, a''_0)$ параллельно прямой $l_{h,c}$ и занумеруем ее целочисленные точки при помощи последовательности

$$\dots, (b'_{-2}, b''_{-2}), (b'_{-1}, b''_{-1}), (b'_0, b''_0) = (-a'_0, a''_0), (b'_1, b''_1), \dots,$$

в которой $\dots < b'_{-1} b''_{-1} < b'_0 b''_0 < 0 < b'_1 b''_1 \dots$. Нетрудно увидеть, что

$$\begin{aligned} \dots < a'_{-2} a''_{-2} < a'_{-1} a''_{-1} < b'_{-1} b''_{-1} + a'_0 a''_0 < b'_0 b''_0 + a'_0 a''_0 = 0 < \\ < a'_0 a''_0 < a'_1 a''_1 < b'_1 b''_1 + a'_0 a''_0 < b'_2 b''_2 + a'_0 a''_0 < a'_2 a''_2 < \dots \end{aligned}$$

Теперь мы можем сформулировать наш главный результат.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть задана пара $h, c \in \mathbb{C}$ и выбрана прямая $l_{h,c}$. В случаях I и Π_0 модуль $V_{h,c}$ неприводим и не является собственным подмодулем никакого модуля Верма.

В случае Π_+ модуль $V_{h,c}$ имеет единственный собственный подмодуль. Этот подмодуль изоморфен модулю $V_{h+a'a'',c}$ и порождается особым вектором, содержащимся в $V_{h,c}^{a'a''}$. Этот подмодуль и соответствующий фактормодуль неприводимы. Модуль $V_{h,c}$ не вложен ни в какой модуль Верма.

В случае Π_- модуль $V_{h,c}$ неприводим, но при этом вложен как собственный подмодуль в модуль $V_{h+a'a'',c}$; образ вакуумного вектора $v \in V_{h,c}$ содержится в $V_{h+a'a'',c}^{-a'a''}$; модуль $V_{h,c}$ не вкладывается ни в какой другой модуль Верма.

В случаях Π_{\pm}^{00} и Π_{\pm}^0 имеется последовательность вложений

$$\dots \rightarrow V_{h+a'_1 a''_1, c} \rightarrow V_{h,c} \rightarrow V_{h+a'_{-1} a''_{-1}, c} \rightarrow \dots;$$

модули в этой последовательности не связаны никакими нетривиальными гомоморфизмами с модулями Верма не из этой последовательности.

В случаях Π_{\pm} имеется коммутативная диаграмма вложений

$$\begin{array}{ccc} \dots & & \dots \\ \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\ V_{h+a'_{-1} a''_{-1}, c} & & V_{h+a'_{-2} a''_{-2}, c} \\ \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\ V_{h,c} & & V_{h+b'_{-1} b''_{-1} + a'_0 a''_0, c} \\ \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\ V_{h+a'_1 a''_1, c} & & V_{h+a'_0 a''_0, c} \\ \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\ V_{h+b'_2 b''_2 + a'_0 a''_0, c} & & V_{h+b'_1 b''_1 + a'_0 a''_0, c} \\ \dots & & \dots \end{array}$$

Модули в этой диаграмме не связаны нетривиальными гомоморфизмами с какими-либо модулями Верма не из этой диаграммы. Более того, в любой части диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \uparrow & \nwarrow & \\ B & & C \\ \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\ D & & E \end{array}$$

образы модулей B и C в A не содержат друг друга, и образы D и E порождают над C пересечение образов модулей B и C .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Из теоремы 2.2 вытекает, что в случаях Π_{-}^{00} , Π_{-}^0 , Π_{-} модуль $V_{h,c}$ содержит бесконечно много особых векторов, но может быть вложен лишь в конечное множество других модулей Верма. В случаях Π_{-}^{00} , Π_{-}^0 подмодули, порожденные особыми векторами, последовательно вложены друг в друга; максимальный из этих подмодулей является максимальным собственным подмодулем модуля $V_{h,c}$. В случае Π_{-} максимальный подмодуль является суммой двух модулей Верма, пересечение которых в свою очередь является суммой двух модулей Верма и т.д.

В случаях Π_{+}^{00} , Π_{+}^0 , Π_{+} число особых векторов конечно (особые вектора вообще отсутствуют, если прямая $l_{h,c}$ не содержит целочис-

ленных точек с положительным произведением координат). Упорядочение подмодулей, порожденных этими векторами, аналогично описанному выше, но в этом случае цепочка погружений обрывается на конечном шаге.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Рассмотрим категорию, объектами которой являются модули $V_{h,c}$, а морфизмами — классы пропорциональных ненулевых гомоморфизмов. Теорема 2.2 показывает, что не может быть более одного морфизма между объектами этой категории. Она также показывает, что соответствие

$$V_{h,c} \mapsto V_{-1-h, 26-c}$$

расширяется до изоморфизма между этой категорией и противоположной ей (это следует из тождества

$$\Phi_{\alpha,\beta}(h, c) = \Phi_{-\alpha,\beta}(-1-h, 26-c),$$

последнее говорит о том, что преобразование

$$(h, c) \mapsto (-1-h, 26-c)$$

соответствует отражению прямых $l_{h,c}$ относительно оси β). Демонстрация этого феномена приведена авторами статьи в заметке [1]. С другим его проявлением мы столкнемся в § 3 (см. 3.3.).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Формальный характер $\text{char } V$ $\hat{\mathcal{L}}$ -модуля V определяется как ряд $\sum_{\lambda} d_{\lambda} t^{\lambda}$, где λ пробегает все собственные значения оператора $e_0 : V \rightarrow V$, а d_{λ} — размерность инвариантного пространства, соответствующего λ . Например,

$$\text{char } V_{h,c} = \sum_{n=0}^{\infty} (\dim V_{h,c}^n) t^{h+n} = t^h \sum_{n=0}^{\infty} p(n) t^n = \frac{t^h}{\varphi(t)},$$

где $\varphi(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)$ — функция Эйлера. Если модуль приводимый и имеет место один из случаев: II , III_{\pm}^{00} , III_{\pm}^0 , то максимальный собственный подмодуль модуля $V_{h,c}$ изоморфен модулю $V_{h+a'a'',c}$, где a' , a'' — положительные целые с наименьшим возможным произведением такие, что $\Phi_{a',a''}(h, c) = 0$. В этом случае

$$\text{char } M_{h,c} = \text{char } V_{h,c} - \text{char } V_{h+a'a'',c} = \frac{t^h (1 - t^{a'a''})}{\varphi(t)}.$$

В случае III_{-} мы имеем точную последовательность

$$0 \leftarrow M_{h,c} \leftarrow V_{h,c} \leftarrow V_{h+a'_0 a''_0, c} \oplus V_{h+a'_1 a''_1, c} \leftarrow \\ \leftarrow V_{h+b'_1 b''_1 + a'_0 a''_0, c} \oplus V_{h+b'_2 b''_2 + a'_0 a''_0, c} \leftarrow V_{h+a'_2 a''_2, c} \oplus V_{h+a'_3 a''_3, c} \dots, \quad (3)$$

которая показывает, что

$$\text{char } M_{h,c} = \frac{1 - \sum_{n=1}^{\infty} t^{a'_n a''_n} + t^{a'_0 a''_0} \sum_{n=1}^{\infty} t^{b'_n b''_n}}{\varphi(t)} t^h.$$

В случае III_+ характер модуля $M_{h,c}$ описывается той же самой формулой, в которой суммы, стоящие в числителе, становятся конечными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Если (h, c) — точка кривой $\Phi_{a',a''}(h, c) = 0$ с положительными целочисленными a', a'' , то существует особый вектор в модуле $V_{h,c}^{a'a''}$. Можно сказать, что этот вектор непрерывно зависит от точки рассмотренной кривой. Если (h, c) — точка пересечения кривых $\Phi_{a',a''}(h, c) = 0$ и $\Phi_{b',b''}(h, c) = 0$, то эта точка принадлежит кривым $\Phi_{\alpha,\beta}(h, c) = 0$, соответствующим всем целочисленным точкам прямолинейных соединений (a', a'') с одной из точек (b', b'') , (b'', b') , $(-b', -b'')$, $(-b'', -b')$. (Эти четыре возможности соответствуют четырем точкам пересечения кривых $\Phi_{a',a''}(h, c) = 0$ и $\Phi_{b',b''}(h, c) = 0$). Особый вектор вкладывается в модуль $V_{h,c}$ вдоль каждой из этих кривых. Если вложенные векторы имеют одинаковые степени (что имеет место в случаях III_{\pm}^{00}), то они отождествляются. В случаях III_{\pm}^{00} , III_{\pm}^0 все особые векторы модуля $V_{h,c}$ возникают подобным образом, однако в случае III_{\pm} имеются некоторые дополнительные особые векторы (они соответствуют целочисленным точкам дополнительной прямой $l'_{h,c}$). Рассматриваемые особые векторы возникают как особые векторы подмодулей, порожденных вложенными особыми векторами. В связи с этим напомним, что, как подчеркивается в работе [3], для фиксированного n условие “модуль $V_{h,c}$ имеет особый вектор степени n ” определяет в плоскости $\mathbb{C}^2(h, c)$ алгебраическое множество, состоящее из кривых и изолированных точек. Теперь мы можем объяснить происхождение изолированных точек: они соответствуют особым векторам, не идущим вдоль кривых, но возникающим в согласии с описанной выше схемой.

ПРИМЕР 2.7. Пусть $c = 1$. Уравнение $px + qy + t = 0$ прямой линии $l_{h,1}$ можно получить из уравнений (1). Первое из этих уравнений дает значение $p = -q$, и мы можем положить $p = 1, q = -1$; тогда второе уравнение приобретает вид $h = t^2/4$ (сравни с примером 1.3.). Прямая $\alpha - \beta + t = 0$ содержит целочисленные точки, если t целое. В этом случае прямая пересекает обе координатные оси в целочисленных точках. Таким образом, мы пришли к Случаю III_-^{00} . Прямые $\alpha - \beta = 0, 1$ соответствуют цепочкам вложений

$$\begin{aligned} V_{0,1} &\leftarrow V_{1,1} \leftarrow V_{4,1} \leftarrow V_{9,1} \leftarrow V_{16,1} \dots \\ V_{\frac{1}{4},1} &\leftarrow V_{\frac{9}{4},1} \leftarrow V_{\frac{25}{4},1} \leftarrow V_{\frac{49}{4},1} \leftarrow V_{\frac{81}{4},1} \end{aligned}$$

Другие прямые $\alpha - \beta + t = 0$ соответствуют подцепочкам этих двух цепочек.

ПРИМЕР 2.8. Пусть $c = 0$. Модуль $V_{h,0}$ является приводимым для $h = (m^2 - 1)/24$, где $m = 0, 1, 2, \dots$ (см. пример 1.3). В качестве $l_{h,0}$ с такими h мы можем взять прямые $3\alpha - 2\beta + m = 0$. Если $m = 0, 2, 3, 4 \pmod 6$, то имеет место один из случаев $\Pi\Gamma^0_0$, $\Pi\Gamma^-_0$; читатель может легко выписать пять непересекающихся цепочек вложений, которые содержат все модули, соответствующие этим прямым. Если $l_{h,c}$ представляет собой прямую $3\alpha - 2\beta + 6k + 3 \pm 2 = 0$, то имеет место случай $\Pi\Gamma^-_0$, при этом $l'_{h,c}$ являются прямыми $3\alpha - 2\beta + 6k + 6 \pm 1 = 0$ ($k \geq 0$). Прямая $3\alpha - 2\beta + 1 = 0$ соответствует диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} V_{0,0} & \leftarrow & V_{1,0} & \leftarrow & V_{5,0} & \leftarrow & \dots & \leftarrow & V_{\frac{(6k-1)^2-1}{24},0} & \leftarrow & \dots \\ & \swarrow & & \nwarrow \times & & \nwarrow \times & \dots & \nwarrow \times & & \nwarrow \times & \dots \\ & & V_{2,0} & \leftarrow & V_{7,0} & \leftarrow & \dots & \leftarrow & V_{\frac{(6k+1)^2-1}{24},0} & \leftarrow & \dots \end{array}$$

а остальные прямые указанного вида соответствуют поддиаграммам этой диаграммы. Заметим, что числа

$$\frac{(6k \pm 1)^2 - 1}{24} = \frac{3k^2 \pm k}{2}$$

представляют собой “пентагональные числа” Эйлера. Заметим также, что вложения

$$V_{\frac{3(k+1)^2 \pm (k+1)}{2},0} \longrightarrow V_{\frac{3k^2 \pm k}{2},0}$$

этой диаграммы соответствуют особым векторам в

$$V_{\frac{3k^2+k}{2},0}^{3k+2}, \quad V_{\frac{3k^2+k}{2},0}^{2k+1}, \quad V_{\frac{3k^2-k}{2},0}^{4k+2}, \quad V_{\frac{3k^2-k}{2},0}^{3k+1}$$

Эти векторы идут (в смысле замечания 2.4) вдоль кривых

$$\begin{aligned} \Phi_{1,3k+2}(h, c) &= 0, & \Phi_{1,2k+1}(h, c) &= 0, \\ \Phi_{2,2k+1}(h, c) &= 0, & \Phi_{1,3k+1}(h, c) &= 0. \end{aligned}$$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 2.1 и 2.2. Пусть $\bar{V}_{h,c}$ — модуль контргradientный модулю $V_{h,c}$, то есть градуированный модуль, для которого $\bar{V}_{h,c}^n = (V_{h,c}^n)^*$ и $e_i : \bar{V}_{h,c}^n \rightarrow \bar{V}_{h,c}^{n+i}$ совпадает с $e_{-i}^* : (V_{h,c}^n)^* \rightarrow (V_{h,c}^{n+i})^*$. Модуль $\bar{V}_{h,c}$ имеет особый вектор \bar{v} , такой что $e_0 \bar{v} = h \bar{v}$, $z \bar{v} = c \bar{v}$. Отсюда следует, что существует единственный $\hat{\mathcal{L}}$ -гомоморфизм $S : V_{h,c} \rightarrow \bar{V}_{h,c}$, переводящий v в \bar{v} . В частности, имеется линейный оператор $V_{h,c}^n \rightarrow (V_{h,c}^n)^*$, являющийся билинейной формой на $V_{h,c}^n$. Эта форма оказывается симметричной. Она называется *формой Шаповалова* и тоже обозначается буквой S . Ясно, что

$$S(e_{j_1} \dots e_{j_s} v, e_{i_1} \dots e_{i_t} v) v = e_{-i_t} \dots e_{-i_1} e_{j_1} \dots e_{j_s} v. \quad (4)$$

Предположим теперь, что точка (h, c) принадлежит кривой

$$\Phi_{k,l}(h, c) = 0.$$

Эту кривую можно записать в удобном параметрическом виде

$$\begin{aligned} h = h(t) &= \frac{1-k^2}{4}t + \frac{1-kl}{2} + \frac{1-l^2}{4}t^{-1}, \\ c = c(t) &= 6t + 13 + 6t^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Кривая $\Phi_{k,l}(h, c) = 0$, дополненная точками $t = 0, \infty$, обозначается через $\bar{\Phi}_{k,l}$. Мы не будем делать различия между модулями $V_{h(t),c(t)}$, когда рассматриваем их как линейные пространства. Выберем в $V_{h(t),c(t)}^{kl}$ одномерное подпространство $I(t)$, аналитически зависящее от t , порожденное особым вектором; кроме того, функция I продолжается аналитически в точки $t = 0, \infty$: $I(0) = \mathbb{C}e_k^l v$, $I(\infty) = \mathbb{C}e_l^k v$. Пространство $I(t)$ является аналитическим линейным расслоением над рациональной кривой $\bar{\Phi}_{k,l}$. Обозначим это расслоение через $\xi_{k,l}$.

Мы будем обозначать через $W(t)$ фактормодуль модуля $V_{h(t),c(t)}$ по подмодулю $\hat{\mathcal{L}}I(t)$ (который изоморфен модулю $V_{h(t)+kl,c(t)}$). Ясно, что оператор S тривиален на $\hat{\mathcal{L}}I(t)$ и имеет значения в $\bar{W}(t) = \text{Ann } \hat{\mathcal{L}}I(t)$, и, таким образом, S можно рассматривать как оператор $W(t) \rightarrow \bar{W}(t)$. Следовательно, этот оператор определяет для каждого n билинейную форму на $W^n(t)$. Эта форма тоже симметрична и тоже называется формой Шаповалова. Для $n < kl$ она совпадает с соответствующей формой Шаповалова на модуле $V_{h(t),c(t)}$. Заметим, что пространства $W^n(t)$ образуют $[p(n) - p(n - kl)]$ -мерное векторное расслоение над $\bar{\Phi}_{k,l}$. Это расслоение изоморфно факторрасслоению тривиального $p(n)$ -мерного расслоения по подрасслоению, изоморфному $p(n - kl)\xi_{k,l}$ (со слоем $\hat{\mathcal{L}}I(t) \cap V_{h(t),c(t)}^n$). Мы видим, что детерминант формы Шаповалова, принимающей значения в

$$S^2 \wedge^{\dim W^n(t)} W^n(t)^*,$$

определяет сечение расслоения, изоморфного $\otimes^{2p(n-kl)} \xi_{k,l}$. Это сечение, которое мы обозначим через $\omega_{k,l}^n$, регулярно при $t \neq 0, \infty$, а в точках $0, \infty$ имеет полюса, порядок которых нетрудно найти. Например, вблизи точки ∞ детерминант формы Шаповалова может быть вычислен как определитель главного минора матрицы соответствующей формы Шаповалова модуля $V_{h(t),c(t)}$. Этот модуль соответствует части базиса, состоящей из тех элементов $e_{j_1} \dots e_{j_s} v$, в которых e_l встречается менее чем k раз. В этой области $h \sim (1 - k^2)t/4$ и $c \sim 6t$. Степень указанного минора как полинома параметра t равняется сумме степеней его диагональных элементов, последние же легко вычис-

лить, если учесть, что

$$[e_{-i}, e_i] \sim 2ih + \frac{1}{12} (i^3 - i) c \sim \frac{(i-k)(1-k^2)}{2} t.$$

Данное выражение имеет степень 1 для $i \neq k$ и степень 0 для $i = k$. В результате имеем: порядок $P(\infty)$ полюса в точке ∞ равен полному числу всех элементов разбиений n , не равных k , содержащих l меньше, чем k раз. Порядок $P(0)$ полюса в точке 0 вычисляется аналогично: надо лишь поменять местами k и l . Поэтому сумма порядков нулей детерминанта формы Шаповалова равна

$$P(\infty) + P(0) + \text{char } \omega_{k,l}^n = P(\infty) + P(0) + 2p(n - kl) \text{char } \xi_{k,l},$$

где char — характеристическое число. Чтобы определить $\text{char } \xi_{k,l}$, заметим, что отображение

$$I(t) \hookrightarrow V_{h(t),c(t)}^{kl} \xrightarrow{S} (V_{h(t),c(t)}^{kl})^* \rightarrow I(t)$$

является тривиальным и потому его производная в направлении, перпендикулярном кривой $\Phi_{k,l}(h, c) = 0$, определена корректно. Можно легко вычислить число нулей этой производной (они возникают в точках пересечения кривой $\Phi_{k,l}(h, c) = 0$ с кривыми $\Phi_{k',l'}(h, c) = 0$ при $k'l' < kl$). Это число нулей определяет характеристическое число очевидным образом.

Таким образом, мы умеем вычислять число нулей детерминанта формы Шаповалова модуля $W(t)$. Теоремы 2.1 и 2.2 дают другой путь вычисления этих чисел. А именно, если модуль $W(t)$ неприводим, то его форма Шаповалова невырожденная, а если модуль $W(t)$ приводим для некоторого t , то детерминант формы Шаповалова имеет для этого t нуль кратности не меньшей, чем размерность $p(n)$ -той компоненты максимального подмодуля модуля $W(t)$. Согласно теореме 2.1 подмодули модуля $W(t)$ порождаются образами особых векторов модуля $V_{h(t),c(t)}$, а теорема 2.2 позволяет вычислить указанные размерности. Вычисление показывает, что *верхняя грань числа нулей детерминанта формы Шаповалова, полученная таким путем, совпадает с ее точным значением, вычисленным выше*. Можно доказать по индукции, что теоремы 2.1 и 2.2 справедливы для частей модулей Верма $V_{h,c}^{<n}$, и любое нарушение этих Теорем в $V_{h(t),c(t)}^n$ означало бы увеличение числа нулей формы Шаповалова. Это завершает наше доказательство.

4. Особые векторы

Как мы видели выше, существует аналитическая функция

$$\sigma_{k,l} : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow U^{kl}(N_+),$$

где U^{kl} — kl -тая компонента универсальной обертывающей алгебры,

такая что $\sigma_{k,l}(t)v$ — особый вектор модуля $V_{h(t),c(t)}$. Таким образом

$$\sigma_{k,l}(t) = \sum_{\substack{s, j_1 \geq \dots \geq j_s \geq 1 \\ j_1 + \dots + j_s = kl}} p_{j_1 \dots j_s}(t) e_{j_1} \dots e_{j_s}.$$

Коэффициенты $p_{j_1 \dots j_s}(t)$ могут быть превращены в полиномы переменных t, t^{-1} . Они определяются с точностью до общего множителя; мы нормируем их условием $p_{1 \dots 1}(t) = 1$. Для малых k, l легко найти точные формулы для $\sigma_{k,l}$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1} &= e_1, & \sigma_{1,2} &= e_1^2 + t e_2, & \sigma_{1,3} &= e_1^3 + 4t e_2 e_1 + (4t^2 + 2t) e_3, \\ \sigma_{2,2} &= e_1^4 + 2u e_2 e_1^2 + (u^2 - 4) e_2^2 + (2u + 6) e_3 e_1 + (3u + 6) e_4, \end{aligned}$$

где $u = t + t^{-1}$. Однако в общем случае мы имеем лишь следующий неполный результат.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть

$$\pi : U(N_+) \rightarrow U(N_+)/U(N_+) e_3 = \mathbb{C}[e_1, e_2]$$

— естественная проекция. Тогда

$$(\pi \sigma_{k+1,l+1})^2 = \prod_{i=0}^k \prod_{j=0}^l (e_1^2 + [(k-2i)\theta^{-1} + (l-2j)\theta]^2 e_2), \quad (6)$$

где $\theta^2 = t$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ — \mathcal{L} -модуль с базисом f_j ($j \in \mathbb{Z}$), а действие \mathcal{L} задается формулой $e_i f_j = (\mu + j - \lambda(i+1)) f_{i+j}$. Определим функцию $p_{k,l}(\lambda, \mu, t)$ по правилу $\sigma_{k,l}(t) f_0 = p_{k,l}(\lambda, \mu, t) f_{kl}$. Тогда

$$\begin{aligned} p_{k+1,l+1}(\lambda, \mu, t)^2 &= \prod_{i=0}^k \prod_{j=0}^l \{ (\mu - 2\lambda)^2 - [(k-2i)\theta^{-1} + (l-2j)\theta]^2 \lambda + \\ &+ (\mu - 2\lambda)[(2i(k-i) + k)t^{-1} + (2j(l-j) + l)t + kl + k + l - \\ &- (k-2i)(l-2j)] + (i\theta^{-1} + j\theta)((i+1)\theta^{-1} + (j+1)\theta) \times \\ &\times ((k-i)\theta^{-1} + (l-j)\theta)((k-i+1)\theta^{-1} + (l-j+1)\theta) \}. \quad (7) \end{aligned}$$

Заметим, что в формулах (6) и (7) корни могут быть извлечены точно для всех множителей в правой части. Один из множителей может повториться дважды. Тогда он является квадратом линейной функции. Например:

$$\begin{aligned} \pi \sigma_{1,2m}(t) &= (e_1^2 + t e_2)(e_1^2 + 9t e_2) \dots (e_1^2 + (2m-1)^2 t e_2), \\ \pi \sigma_{1,1m+1}(t) &= e_1(e_1^2 + 4t e_2)(e_1^2 + 16t e_2) \dots (e_1^2 + (2m)^2 t e_2). \end{aligned}$$

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 опираются на рассуждения, содержащиеся в работе [9]. При некотором значении t особый вектор $\sigma_{k,l}(t)v$ оказывается заключенным в промежуточном подмодуле, и при этом t элемент $\sigma_{k,l}(t)$ из $U^{kl}(N_+)$ раскладывается в произведение элементов $\sigma_{k',l'}(t)$ с $k'l' < kl$. Мы можем предположить, что множители можно найти по индукции, что даст нам достаточное количество значений функции $\sigma_{k,l}$, чтобы восстановить ее полностью (степени полиномов $\sigma_{k,l}$ вычисляются без труда). Тогда все, что нам остается сделать — это проверить, не противоречат ли формулы (6) и (7) указанным разложениям. Последнее легко проделать.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.3. *Антиавтоморфизм алгебры $U(N_+)[t]$ на себя, определенный формулами $t \mapsto -t$, $e_i \mapsto (-1)^{i-1} e_i$, переводит $\sigma_{k,l}(t)$ в себя.*

Это предположение без сомнения верно. Так как преобразование $t \mapsto -t$ соответствует преобразованию $(h, c) \mapsto (-1 - h, 26 - c)$, то это предположение может быть связано с замечанием 2.4.

В заключение этого пункта отметим не напоминая определений результат, касающийся алгебры Каца–Мули $A_1^{(1)}$. Рассмотрим модуль Верма над $A_1^{(1)}$, соответствующий нулевому характеру. Его особые векторы легко описать:

$$\begin{aligned} v, \quad e_1 v, \quad e_2^3 e_1 v, \quad e_1^5 e_2^3 e_1 v, \quad e_2^7 e_1^5 e_2^3 e_1 v, \quad \dots \\ e_2 v, \quad e_1^3 e_2 v, \quad e_2^5 e_1^3 e_2 v, \quad e_1^7 e_2^5 e_1^3 e_2 v, \quad \dots \end{aligned}$$

(e_1, e_2 — стандартные образующие алгебры $A_1^{(1)}$). Подмодуль, образованный любым из этих векторов, содержит все векторы вправо от него. В частности существуют элементы α_k, β_k из $U(N_+(A_1^{(1)}))$, такие что

$$\begin{aligned} \alpha_k(e_1^{2k-1} e_2^{2k-3} \dots v) &= e_1^{2k+1} e_2^{2k-1} \dots v, \\ \beta_k(e_2^{2k-1} e_1^{2k-3} \dots v) &= e_2^{2k+1} e_1^{2k-1} \dots v. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть $\pi : N_+(A_1^{(1)}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ — стандартная проекция, определенная формулами:*

$$(e_1) = e = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (e_2) = f = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \pi \alpha_k &= \sum_{i=0}^k \frac{(2k-i)!}{(k-i)! i!} e^{k-i+1} (h-1)(h-2) \dots (h-k) f^{k-1}, \\ \pi \beta_k &= \sum_{i=0}^k (-1)^k \frac{(2k-i)!}{(k-i)! i!} f^{k-i+1} (h+1)(h+2) \dots (h+k) e^{k-i}, \end{aligned}$$

где $h = [e, f]$.

5. Приложение к вычислениям гомологий

Подалгебра N_+ алгебры Вирасоро изоморфна алгебре Ли $L_1 = L_1(1)$ полиномиальных векторных полей на прямой с тривиальным 1-пучком в точке 0. Предпринимались многочисленные попытки вычисления гомологий с различными коэффициентами этой алгебры; мы приводим здесь некоторые следствия результатов § 2, § 3 относительно этих гомологий.

Существует два различных пути применения полученных результатов к вычислению указанных гомологий. Первый путь основан на том факте, что последовательность

$$0 \leftarrow M_{h,c} \leftarrow V_{h,c} \leftarrow V_{h+a'a'',c} \leftarrow 0$$

в случаях Π_- , Π_{\pm}^{00} , Π_{\pm}^0 и (конечная или бесконечная) последовательность (3) в случаях Π_{\pm} , рассматриваемая как последовательность L_1 -модулей, на самом деле является минимальной свободной резольвентой $M_{h,c}$. Это позволяет сразу найти $H_*(L_1; M_{h,c})$.

ТЕОРЕМА 4.1. (i) Если модуль $V_{h,c}$ неприводим, то есть $M_{h,c} = V_{h,c}$, то

$$H_*(L_1; M_{h,c}) = H_0(L_1; M_{h,c}).$$

Теперь предположим, что модуль $V_{h,c}$ приводим, то есть $M_{h,c} \neq V_{h,c}$.

(ii) В случаях Π_- , Π^{00} , Π^0

$$\dim H_q(L_1; M_{h,c}) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = 0, 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(iii) В случаях Π_-

$$\dim H_q(L_1; M_{h,c}) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = 0, \\ 2, & \text{если } q > 0. \end{cases}$$

Степени образующих $H_q(L_1; M_{h,c})$ равны

$$b'_{q-1}b''_{q-1} + a'_0a''_0, \quad b'_qb''_q + a'_0a''_0$$

для четных q и $a'_{q-1}a''_{q-1}$, $a'_qa''_q$ для нечетных q .

(iv) В случае Π_+ обозначим через r число целочисленных точек прямых $l_{h,c}$, $l_{h',c}$ с положительным произведением координат. Тогда

$$\dim H_q(L_1; M_{h,c}) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = 0, \\ 2, & \text{если } q = 1, \dots, [r/2], \\ r - 2[r/2], & \text{если } q = [r/2] + 1, \\ 0, & \text{если } q > [r/2] + 1. \end{cases}$$

Степени образующих $H_q(L_1; M_{h,c})$ выражаются теми же формулами, что и в предыдущем случае.

Например, из того, что $M_{0,0} = \mathbb{C}$, и утверждения (iii) получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Если $q > 0$, то пространство $H_q(L_1; \mathbb{C})$ имеет размерность 2 и порождается элементами степеней $(3q^2 \pm q)/2$.

Это известная теорема Гончаровой [6], которая, таким образом, получила свое четвертое доказательство (см. также [5,11]).

Другой путь применения полученных результатов к гомологиям опирается на материал § 3. При $h = c = 0$ последовательность (3) становится свободной L_1 -резольвентой тривиального модуля \mathbb{C} :

$$0 \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow V_{0,0} \leftarrow V_{1,0} \oplus V_{2,0} \leftarrow V_{5,0} \oplus V_{7,0} \leftarrow \dots \quad (8)$$

Гомологии L_1 с коэффициентами в произвольном модуле M могут быть вычислены как гомологии тензорного произведения (8) и модуля M . Это тензорное произведение представляет собой комплекс

$$M \xrightarrow{d_0^0} M \oplus M \xrightarrow{d_1^1} M \oplus M \xrightarrow{d_2^2} M \oplus M \xrightarrow{d_3^3} \dots,$$

который заметно меньше стандартного цепного комплекса $C(L_1; M)$. Его дифференциалы d_k задаются матрицами

$$\|d_0^1 \quad d_0^2\| \quad \text{для } k=0, \quad \left\| \begin{matrix} d_k^{11} & d_k^{12} \\ d_k^{21} & d_k^{22} \end{matrix} \right\| \quad \text{для } k \neq 0,$$

с элементами из $U(L_1)$. Согласно сказанному выше, имеем

$$\begin{aligned} d_0^1 &= \sigma_{1,2}(3/2) = e_1^2 + 3e_2/2, & d_0^2 &= \sigma_{1,1}(3/2) = e_1, \\ d_k^{11} &= \sigma_{1,3k+2}(3/2), & d_k^{12} &= \sigma_{2,2k+1}(3/2), \\ d_k^{21} &= \sigma_{1,2k+1}(3/2), & d_k^{22} &= \sigma_{1,3k+1}(3/2) \end{aligned}$$

(см. пример 2.8). Таким образом, точное знание элементов $\sigma_{k,l}(t)$ позволило бы вычислять гомологии L_1 с произвольными коэффициентами, при этом для вычисления этих гомологий с коэффициентами в конкретном модуле M нужно знать лишь то, как $\sigma_{k,l}(t)$ действуют в M .

В частности, теорема 3.1 дает возможность найти гомологии L_1 с коэффициентами в произвольном модуле с нулевым действием e_3 , например, в модулях, индуцированных тривиальными представлениями L_2 и L_3 . Таким образом, мы можем вычислить $H_*(L_2; \mathbb{C})$ и $H_*(L_3; \mathbb{C})$, получая при этом новое доказательство соответствующих результатов Гончаровой.

Аналогично, теорема 3.2 позволяет находить гомологии L_1 с коэффициентами в подмодулях и фактормодулях (над L_1) модуля $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$. Это дает новое доказательство всех результатов нашей работы [2]. Мы не будем повторять здесь соответствующих утверждений, но заметим, что уравнения парабол из работы [2] рассматриваются теперь как множители в правой части формулы (7), взятые для произвольных значений параметров.

Литература

1. Фейгин Б.Л., Полубесконечные когомологии алгебр Ли Каца-Муди и Вирасоро, Успехи мат. наук, 1983.
2. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б., Гомологии алгебры Ли векторных полей на прямой, Функ. анализ и прил., 1980, 14, 3, 45–60.
3. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б., Кососимметричные инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро, Функ. анализ и прил., 1982, 16, 2, 47–63.
4. Гельфанд И.М., Фукс Д.Б., Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности, Функ. анализ и прил., 1968, 2, 4, 92–93.
5. Гельфанд И.М., Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б., Когомологии бесконечномерных алгебр Ли и операторы Лапласа, Функ. анализ и прил., 1978, 12, 4, 1–5.
6. Гончарова Л.В., Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой, Функ. анализ и прил., 1973, 7, 2, 6–14.
7. Кас V.G., Contravariant form for infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras, Lect. Notes in Phys., 1979, 94, 441–445.
8. Кас V.G., Some problems on infinite-dimensional Lie algebras and their representations, Preprint MIT, 1981.
9. Луцук А.В., Гомоморфизмы модулей M_χ , Функ. анализ и прил., 1974, 8, 4, 91–92.
10. Mandelstam S., Dual-resonance theory, Physics Repts, 1974, 13, 259–35.
11. Реташ В.С., Фейгин Б.Л., О когомологиях некоторых алгебр и супералгебр векторных полей, Успехи мат. наук, 1982, 37, 2, 233–234.

БЕСКОНЕЧНАЯ КОНФОРМНАЯ СИММЕТРИЯ В ДВУМЕРНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Белавин А.А., Замоладчиков А.Б., Поляков А.М.

Nuclear Physics. B241 (1984). P. 333–380

Предлагается метод исследования безмассовых двумерных взаимодействующих теорий поля. Главное свойство таких теорий заключается в инвариантности относительно бесконечномерной группы конформных (аналитических) преобразований. Показано, что локальные поля, образующие операторную алгебру, могут быть классифицированы по неприводимым представлениям алгебры Вирасоро и что корреляционные функции строятся из “конформных блоков”, которые полностью определяются конформной инвариантностью. Анализируются точнорешаемые конформные теории, связанные с вырожденными представлениями. В этих теориях аномальные размерности вычисляются точно, а корреляционные функции удовлетворяют системам линейных дифференциальных уравнений.

1. Введение

Конформная симметрия была введена в квантовую теорию поля примерно двадцать лет тому назад под влиянием идей скейлинга в теории фазовых переходов второго рода (см. [1] и ссылки там). Согласно гипотезе скейлинга, взаимодействие полей параметров порядка в критической точке инвариантно относительно масштабных преобразований

$$\xi^a \rightarrow \lambda \xi^a, \quad (1.1)$$

где ξ^a — координаты, $a = 1, 2, \dots, D$. В квантовой теории поля масштабная симметрия (1.1) имеет место вследствие отсутствия следа у тензора энергии-импульса:

$$T_a^a(\xi) = 0. \quad (1.2)$$

При выполнении условия (1.2) теория обладает масштабной симметрией, но также является инвариантной относительно координатных преобразований

$$\xi^a \rightarrow \eta^a(\xi) \quad (1.3)$$

таких, что метрический тензор преобразуется согласно

$$g_{ab} \rightarrow \frac{\partial \xi^{a'}}{\partial \eta^a} \frac{\partial \xi^{b'}}{\partial \eta^b} g_{a'b'} = \rho(\xi) g_{ab}, \quad (1.4)$$

где $\rho(\xi)$ — некоторая функция. Координатные преобразования этого типа образуют *конформную группу*. Эти преобразования могут быть легко описаны, при этом свойства конформной группы будут различными для $D > 2$ и $D = 2$. Если $D > 2$, то конформная группа конечномерна и состоит из трансляций, вращений, растяжений и специальных конформных преобразований (см. [2, 3]). Кинематическое проявление этой симметрии и ее динамическая реализация в квантовой теории поля исследовались во многих работах (см., например, [2–4]). В частности было показано, что локальные поля $A_j(\xi)$, содержащиеся в конформной теории, должны обладать аномальной размерностью d_j , то есть при преобразованиях (1.1) они преобразуются следующим образом:

$$A_j \rightarrow \lambda^{-d_j} A_j, \quad (1.5)$$

где параметры d_j неотрицательны. Вычисление спектра значений $\{d_j\}$ аномальных размерностей является наиболее важной задачей теории, так как эти величины определяют критические показатели.

Для решения этой проблемы в [4] было предложено бутстрапное приближение, основанное на гипотезе операторной алгебры. Мы кратко опишем эту гипотезу, так как она наилучшим образом подходит для наших целей. Операторная алгебра является сильной версией Вильсоновского операторного разложения [5], а именно, если предполагается существование бесконечного множества локальных полей $A_j(\xi)$, то считается, что множество операторов $\{A_j(0)\}$ является полным в смысле, определяемом ниже. Множество $\{A_j\}$ содержит единичный оператор I , так же как и все координатные производные всех входящих в теорию полей. Полнота множества $\{A_j(0)\}$ означает, что любое состояние может быть порождено линейным действием этих операторов. Это условие эквивалентно операторной алгебре

$$A_i(\xi) A_j(0) = \sum_k C_{ij}^k(\xi) A_k(0), \quad (1.6)$$

где структурные константы $C_{ij}^k(\xi)$ являются c -числовыми функциями, которые должны быть однозначными вследствие локальности теории. Соотношение (1.6) понимается как точное разложение корреляционных функций

$$\begin{aligned} \langle A_i(\xi) A_j(0) A_{l_1}(\xi_1) \dots A_{l_N}(\xi_N) \rangle = \\ = \sum_k C_{ij}^k(\xi) \langle A_k(0) A_{l_1}(\xi_1) \dots A_{l_N}(\xi_N) \rangle, \end{aligned}$$

которое сходится в некоторой конечной области ξ , зависящей неким образом от расположения ξ_1, \dots, ξ_N . Наиболее жесткое требование, рассматриваемое как основной динамический принцип этого подхода, есть ассоциативность операторной алгебры (1.6). Это требование приводит к бесконечной системе уравнений для структурных констант $C_{ij}^k(\xi)$. Так как конформная симметрия фиксирует форму функций $C_{ij}^k(\xi)$ с точностью до некоторых числовых параметров (которые являются аномальными размерностями и числовыми множителями), то эта система уравнений должна определять эти параметры. Однако в многомерной теории ($D > 2$) эта система оказывается слишком сложной, чтобы быть точнорешаемой, причем главная трудность заключается в классификации полей A_j , составляющих алгебру.

Ситуация существенно улучшается в двумерном случае. Главная причина этого в том, что в двумерном случае конформная группа является бесконечномерной; она состоит из конформных аналитических преобразований. Чтобы описать эту группу, удобно ввести комплексные координаты

$$z = \xi^1 + i\xi^2, \quad \bar{z} = \xi^1 - i\xi^2 \quad (1.7)$$

и метрику в форме

$$ds^2 = dz d\bar{z}. \quad (1.8)$$

Конформная группа двумерного пространства, которая будет обозначаться \mathcal{G} , состоит из всех подстановок вида

$$z \rightarrow \zeta(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{\zeta}(\bar{z}), \quad (1.9)$$

где ζ и $\bar{\zeta}$ — произвольные аналитические функции.

Для наших целей будет удобно рассматривать пространственные координаты ξ^1, ξ^2 как комплексные переменные, то есть работать в комплексном пространстве \mathbb{C}^2 . Поэтому в общем случае мы трактуем координаты (1.7) не как комплексно сопряженные, а как независимые комплексные переменные; то же самое предполагается относительно функций (1.9). Это пространство \mathbb{C}^2 имеет комплексную метрику (1.8). Евклидова плоскость и пространство-время Минковского могут быть получены как соответствующие вещественные сечения этого комплексного пространства.

В комплексном случае из (1.9) ясно, что конформная группа \mathcal{G} является прямым произведением

$$\mathcal{G} = \Gamma \otimes \bar{\Gamma}, \quad (1.10)$$

где Γ ($\bar{\Gamma}$) — группа аналитических подстановок переменной z (\bar{z}). Поэтому мы будем часто, рассматривая свойства группы Γ , иметь в виду такие же свойства группы $\bar{\Gamma}$.

Бесконечно малые преобразования группы Γ имеют вид

$$z \rightarrow z + \varepsilon(z), \quad (1.11)$$

где $\varepsilon(z)$ есть бесконечно малая аналитическая функция. Она может

быть представлена в виде бесконечного ряда Лорана

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n z^{n+1}. \quad (1.12)$$

Поэтому алгебра Ли группы Γ совпадает с алгеброй дифференциальных операторов

$$l_n = -z^{n+1} \frac{d}{dz}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.13)$$

которые имеют следующие коммутационные соотношения:

$$[l_n, l_m] = (n - m) l_{n+m}. \quad (1.14)$$

Генераторы \bar{l}_n группы $\bar{\Gamma}$ удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, причем операторы l_n и \bar{l}_m взаимно коммутируют. Мы будем обозначать алгебру (1.14) как \mathcal{L}_0 .

Генераторы l_{-1}, l_0, l_{+1} образуют подалгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \subset \mathcal{L}_0$. Соответствующая подгруппа $SL(2, \mathbb{C}) \subset \Gamma$ состоит из проективных преобразований

$$z \rightarrow \zeta = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1. \quad (1.15)$$

Заметим, что проективные преобразования есть взаимно однозначные отображения полной z -плоскости на себя и являются единственными конформными преобразованиями с этим свойством.

Эта статья — первая в серии работ, которые мы хотим посвятить исследованию общих свойств двумерной квантовой теории поля, инвариантной относительно конформной группы \mathcal{G} ¹⁾. В этой статье мы даем общую классификацию полей $A_j(\xi)$, входящих в операторную алгебру (1.6), согласно представлениям конформной группы и изучаем специальный “точнорешаемый” случай конформной квантовой теории поля, ассоциированной с вырожденными представлениями. Более подробно мы покажем следующее:

(i) Компоненты тензора энергии-импульса $T_{ab}(\xi)$ (удовлетворяющие (1.2)), представляют собой генераторы конформной группы \mathcal{G} в квантовой теории поля. Алгебра этих генераторов является центральным расширением алгебры \mathcal{L}_0 (1.14) и совпадает с алгеброй Вирасоро \mathcal{L}_c . Величина центрального заряда c является параметром теории.

¹⁾ Хотя как проективная группа (1.15), так и полная конформная группа \mathcal{G} вытекают из (1.2) и, таким образом, вместе появляются в квантовой теории поля, мы считаем конструктивным рассматривать сначала основные следствия из проективной симметрии. Соответствующие формулы, которые, конечно, есть не что иное, как частный случай для $D = 2$ в работах [2–4], даны в приложении А.

(ii) Среди полей $A_j(\xi)$, образующих операторную алгебру, имеются некоторые *примарные поля* $\phi_n(\xi)$, которые преобразуются простейшим образом:

$$\phi_n(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^{\Delta_n} \left(\frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}} \right)^{\bar{\Delta}_n} \phi_n(\zeta, \bar{\zeta}) \quad (1.16)$$

при преобразованиях (1.9). Здесь Δ_n и $\bar{\Delta}_n$ являются вещественными неотрицательными параметрами. В самом деле, комбинации

$$d_n = \Delta_n + \bar{\Delta}_n \quad \text{и} \quad s_n = \Delta_n - \bar{\Delta}_n$$

являются аномальной размерностью и спином поля ϕ_n , соответственно²⁾. Мы часто будем рассматривать величины Δ_n и $\bar{\Delta}_n$ как *размерности* поля. Простейший пример примарного поля — это единичный оператор I . Нетривиальная теория содержит более одного примарного поля, индекс n введен для их нумерации.

(iii) Полный набор полей $A_j(\xi)$ состоит из *конформных блоков* $[\phi_n]$, соответствующих каждому примарному полю ϕ_n . Примарное поле ϕ_n принадлежит *конформному блоку* $[\phi_n]$ и в некотором смысле служит родоначальником этого семейства. Каждый конформный блок содержит также бесконечно много других, вторичных полей (потомков). Размерности этих вторичных полей образуют серии, отличающиеся на целые числа:

$$\Delta_n^{(k)} = \Delta_n + k, \quad \bar{\Delta}_n^{(\bar{k})} = \bar{\Delta}_n + \bar{k}, \quad (1.17)$$

где $k, \bar{k} = 0, 1, 2, \dots$. Вариации любого вторичного поля $A \in [\phi_n]$ под действием бесконечно малых конформных преобразований (1.11) выражаются линейно в терминах представлений того же самого конформного блока $[\phi_n]$. Таким образом, каждый конформный блок соответствует некоторому представлению конформной группы \mathcal{G} . Согласно (1.10) это представление является прямым произведением

$$[\phi_n] = V_n \otimes \bar{V}_n,$$

где V_n и \bar{V}_n есть представления алгебры Вирасоро \mathcal{L}_c ³⁾; вообще говоря, эти представления неприводимы.

(iv) Корреляционные функции любых вторичных полей могут быть представлены в терминах корреляторов соответствующих примарных полей при помощи специальных линейных дифференциальных операторов. Поэтому вся информация о конформной квантовой теории поля содержится в корреляторах примарных полей ϕ_n .

²⁾ Спин s_n локального поля может принимать лишь целые и полуцелые значения

³⁾ Представление V_n известно как модуль Верма над алгеброй Вирасоро (см., например, [6]). Это представление с очевидностью характеризуется лишь параметром Δ_n .

(v) Структурные константы $C_{ij}^k(\xi)$ операторной алгебры (1.6) в принципе могут быть выражены через коэффициенты C_{nm}^l примарных полей ϕ_l в операторном разложении $\phi_n \phi_m$. Поэтому бутстральные уравнения (то есть условия ассоциативности для операторной алгебры) могут быть сведены к уравнениям, накладывающим связи на эти коэффициенты и размерности Δ_n примарных полей.

(vi) При заданном значении заряда s имеется бесконечно много частных значений размерности Δ , таких, что представление $[\phi_\Delta]$ оказывается вырожденным. Наиболее важное свойство соответствующего “вырожденного” примарного поля ϕ_Δ состоит в том, что корреляционная функция, включающая это поле, удовлетворяет специальным линейным дифференциальным уравнениям, простейший пример которых — гипергеометрическое уравнение.

(vii) Если параметр s удовлетворяет уравнению

$$\frac{\sqrt{25-s}-\sqrt{1-s}}{\sqrt{25-s}+\sqrt{1-s}} = \frac{p}{q}, \quad (1.18)$$

где p и q — положительные целые числа, то “минимальная” конформная квантовая теория поля может быть построена таким образом, что она является точнорешаемой в следующем смысле. (i) Конечное число конформных блоков $[\phi_n]$ включено в операторную алгебру, причем каждое из них вырождено; (ii) все аномальные размерности Δ_n известны точно; (iii) все корреляционные функции теории могут быть вычислены как решения специальных систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Существует бесконечно много конформных квантовых теорий поля этого типа, каждое из которых связано с некоторым решением (1.18), причем простейший нетривиальный пример ($s = 1/2$) описывает двумерную модель Изинга в критической точке. Мы предполагаем, что другие “минимальные” конформные теории описывают фазовые переходы второго рода в некоторых двумерных спиновых системах с дискретной группой симметрии.

Кроме фазовых переходов второго рода в двух измерениях существует другое применение конформной квантовой теории поля. Это дуальная теория. С математической точки зрения дуальные модели есть не что иное, как частные случаи двумерной квантовой конформной теории поля. Это естественно ввиду их связи с теорией струны. Квантовые поля описывают степени свободы, связанные со струной, причем конформная симметрия является отражением координатной инвариантности мировой поверхности распространения струны. В самом деле, дуальные амплитуды представляются в терминах корреляционных функций некоторых локальных полей (вершинных операторов). В стандартных моделях (как модель Венециано) вершинные операторы связаны простым образом со свободными безмассовыми

полями. Мы предполагаем, что если существенно взаимодействующие поля будут включены в такую теорию, то они могут породить новые типы дуальных моделей с более приемлемыми физическими свойствами.

2. Тензор энергии-импульса в конформной квантовой теории поля

Рассмотрим произвольную корреляционную функцию вида

$$\langle X \rangle = \langle A_{j_1}(\xi_1) \dots A_{j_N}(\xi_N) \rangle, \quad (2.1)$$

где $A_{j_k}(\xi)$ — локальные поля. Сделаем бесконечно малое преобразование координат

$$\xi^a \rightarrow \xi^a + \varepsilon^a(\xi). \quad (2.2)$$

Как хорошо известно, в квантовой теории поля имеет место следующее соотношение:

$$\sum_{k=1}^N \langle A_{j_1}(\xi_1) \dots A_{j_{k-1}}(\xi_{k-1}) \delta_\varepsilon A_{j_k}(\xi_k) A_{j_{k+1}}(\xi_{k+1}) \dots A_{j_N}(\xi_N) \rangle + \int d^2\xi \partial^a \varepsilon^b(\xi) \langle T_{ab}(\xi) X \rangle = 0, \quad (2.3)$$

где поле $T_{ab}(\xi)$ является тензором энергии-импульса и $\delta_\varepsilon A_j$ обозначают вариации полей A_j при преобразовании (2.2). Вследствие локальных свойств полей A_j эти вариации являются линейными комбинациями конечного числа производных от функции $\varepsilon(\xi)$, взятой в точке $\xi = \xi_k$, причем коэффициентами служат некие локальные поля. Из (2.3) следует, что везде за исключением точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ справедливо равенство

$$\partial_a \langle T^{ab}(\xi) X \rangle = 0. \quad (2.4)$$

В конформной квантовой теории поля след тензора энергии-импульса исчезает, т.е. $T_a^a = 0$. Поэтому в двумерном случае этот тензор имеет лишь два независимых компонента, которые могут быть взяты в виде

$$\begin{aligned} T(\xi) &= T_{11} - T_{22} + 2i T_{12}, \\ \bar{T}(\xi) &= T_{11} - T_{22} - 2i T_{12}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Комбинируя соотношения (1.2) и (2.4), легко установить, что эти компоненты удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} \langle T(\xi) X \rangle &= 0, \\ \partial_z \langle \bar{T}(\xi) X \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где z и \bar{z} определены в (1.7). Поэтому каждое из полей T и \bar{T} является аналитической функцией одной переменной (z или \bar{z} , соответственно), так что мы будем писать

$$T = T(z), \quad \bar{T} = \bar{T}(\bar{z}). \quad (2.7)$$

Рассмотрим корреляционную функцию⁴⁾

$$\langle T(z) X \rangle. \quad (2.8)$$

Она является аналитической функцией переменной z , которая однозначна (благодаря ее локальным свойствам) и регулярна везде, кроме точек $z = z_k$, $z_k = \xi_k^1 + i\xi_k^2$, где она имеет полюса, причем порядки и вычеты этих полюсов определяются конформными свойствами полей $A_{j_k}(\xi)$. На самом деле для конформных преобразований координат (1.11) соотношение (2.3) может быть приведено к виду

$$\langle \delta_\varepsilon X \rangle = \oint_C d\zeta \varepsilon(\zeta) \langle T(\zeta) X \rangle, \quad (2.9)$$

где $\delta_\varepsilon X$ есть вариация произведения

$$X = A_{j_1}(\xi_1) \dots A_{j_N}(\xi_N)$$

при преобразовании (1.11), а контур C охватывает все сингулярные точки z_k , $k = 1, \dots, N$. Аналогично имеет место следующее соотношение:

$$\delta_\varepsilon A_j(z, \bar{z}) = \oint_{C_z} d\zeta \varepsilon(\zeta) T(\zeta) A_j(z, \bar{z}), \quad (2.10)$$

где контур C_z охватывает точку z . Аналогичная формула (с подстановкой $T \rightarrow \bar{T}$) имеет место для вариации $\delta_{\bar{\varepsilon}} A_j$ поля A_j при бесконечно малом преобразовании

$$\bar{z} \rightarrow \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \quad (2.11)$$

группы $\bar{\Gamma}$. Поэтому поля $T(z)$ и $\bar{T}(\bar{z})$ являются генераторами конформной группы $\Gamma \otimes \bar{\Gamma}$ в квантовой теории поля.

Законы конформных преобразований для произвольных полей A_j будут рассмотрены в следующем пункте. Здесь нас интересуют конформные свойства самих полей $T(z)$ и $\bar{T}(\bar{z})$, которые, очевидно, связаны с алгеброй генераторов конформной группы. Вариации $\delta_\varepsilon T$ и $\delta_{\bar{\varepsilon}}(\bar{T})$ должны линейно выражаться через эти же поля T и \bar{T} и их производные и могут также включать s -числовые швингеровские члены. Принимая во внимание тензорные свойства поля $T(z)$ и условие локальности, выпишем следующее наиболее общее выражение для ва-

⁴⁾ Здесь и далее мы обычно рассматриваем корреляционные функции в комплексном пространстве C^2 (см. введение).

риации $\delta_\varepsilon T$:

$$\delta_\varepsilon T(z) = \varepsilon(z) T' + 2\varepsilon'(z) T(z) + \frac{1}{12} c \varepsilon'''(z), \quad (2.12)$$

где штрих означает производную по z ⁵⁾. Для вариации $\delta_\varepsilon T$ можно показать, что

$$\delta_\varepsilon T(z) = 0. \quad (2.13)$$

Числовая константа c в соотношении (2.12) не определяется общими принципами; она должна трактоваться как параметр теории. Вариация $\delta_\varepsilon \bar{T}$ удовлетворяет также соотношению (2.12), причем соответствующая константа \bar{c} равна c . Константа c принимает вещественные положительные значения. Эти утверждения следуют из условия вещественности тензора энергии-импульса как в евклидовом пространстве, так и в пространстве-времени Минковского.

Если ни одна из точек z_k , $k = 1, 2, \dots, N$ в (2.1) не равна бесконечности, то корреляционная функция $\langle T(z) X \rangle$ должна быть регулярной при $z = \infty$. Легко проверить при помощи закона преобразования (2.12), что это означает убывание функции $\langle T(z) X \rangle$ согласно

$$T(z) \sim \frac{1}{z^4} \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

В квантовой теории поля корреляционные функции (2.1) представляются как вакуумные средние хронологически упорядоченных произведений локальных полевых операторов $A_j(\xi)$. В нашем случае удобно ввести координаты σ и τ согласно следующим формулам:

$$z = \exp(\tau + i\sigma), \quad \bar{z} = \exp(\tau - i\sigma). \quad (2.15)$$

Выбирая σ и τ вещественными, так что угловая переменная $0 < \sigma \leq \pi$, мы получаем евклидово вещественное сечение. Корреляционные функции в этом евклидовом пространстве могут быть представлены как

$$\langle X \rangle = \langle 0 | T[A_{j_1}(\sigma_1, \tau_1) \dots A_{j_N}(\sigma_N, \tau_N)] | 0 \rangle, \quad (2.16)$$

⁵⁾ Формула (2.12) соответствует следующему преобразованию поля $T(z)$ при конечной конформной подстановке (1.9):

$$T(z) \rightarrow \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^2 T(\zeta) + \frac{1}{12} c \{\zeta, z\},$$

где $\{\zeta, z\}$ — производная Шварца [12]

$$\{\zeta, z\} = \left(\frac{d^3\zeta}{dz^3} / \frac{d\zeta}{dz} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2} / \frac{d\zeta}{dz} \right)^2.$$

Заметим, что производная Шварца удовлетворяет следующему закону композиции:

$$\{w, z\} = \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^2 \{w, \zeta\} + \{\zeta, z\}.$$

где хронологическое упорядочение должно быть выполнено относительно "евклидова времени" τ . В операторном формализме вариации $\delta_\varepsilon A_j$ могут быть представлены при помощи одновременных коммутаторов

$$\delta_\varepsilon A_j(\sigma, \tau) = [T_\varepsilon, A_j(\sigma, \tau)], \quad (2.17)$$

где генераторы T_ε определяются формулой

$$T_\varepsilon = \oint_{\log |z|=\tau} \varepsilon(z) T(z) dz. \quad (2.18)$$

Заметим, что вследствие (2.6), эти операторы на самом деле не зависят от τ .

Соотношения (2.12) переписываются в виде

$$[T_\varepsilon, T(z)] = \varepsilon(z) T'(z) + 2\varepsilon'(z) T(z) + \frac{1}{12} c \varepsilon'''(z). \quad (2.19)$$

Полезно ввести операторы $L_n, \bar{L}_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ как коэффициенты разложений Лорана:

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{L}_n}{\bar{z}^{n+2}}. \quad (2.20)$$

Из (2.19) следует, что операторы L_n удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{1}{12} c (n^3 - n) \delta_{n+m, 0}. \quad (2.21)$$

Ясно, что таким же соотношениям удовлетворяют операторы \bar{L}_n , причем операторы L_n и \bar{L}_m взаимно коммутируют. Алгебра (2.21) конформных генераторов L_n является центральным расширением алгебры (1.14)⁶⁾. Этот факт хорошо известен в дуальных теориях, и алгебра (2.21) называется алгеброй Вирасоро [11]; мы будем обозначать ее \mathcal{L}_c .

Так же как и алгебра \mathcal{L}_0 , алгебра Вирасоро \mathcal{L}_c содержит подалгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ с генераторами L_{-1}, L_0, L_{+1} (заметим, что c -числовой член в (2.21) исчезает для $n = 0, \pm 1$). В частности, операторы L_{-1} и \bar{L}_{-1} генерируют сдвиги, а операторы L_0 и \bar{L}_0 генерируют бесконечно малые растяжения координат z и \bar{z} . В координатах σ, τ , определенных согласно (2.15), оператор

$$H = L_0 + \bar{L}_0, \quad (2.22)$$

⁶⁾ Это центральное расширение было открыто Гельфандом и Фуксом [10].

является генератором “временных” сдвигов. Он играет роль гамильтониана. Заметим, что “бесконечное прошлое” $\tau \rightarrow -\infty$ и “бесконечное будущее” $\tau \rightarrow \infty$ соответствуют точкам $z = 0$ и $z = \infty$, соответственно.

Вакуум $|0\rangle$ в (2.16) является основным состоянием гамильтониана (2.22). Вакуум должен удовлетворять условиям

$$L_n |0\rangle = 0, \quad \text{если} \quad n \geq -1, \quad (2.23)$$

так как в противном случае тензор энергии-импульса имел бы сингулярность при $z = 0$. Заметим, что операторы L_n с $n \geq -1$ генерируют конформные преобразования, которые регулярны при $z = 0$. Поэтому уравнения (2.23) выражают конформную инвариантность вакуума. Преобразования, генерируемые операторами L_n с $n \leq -2$ сингулярны при $z = 0$; эти операторы разрушают вакуум

$$L_n |0\rangle = \text{новые состояния}, \quad \text{если} \quad n \leq -2. \quad (2.24)$$

Поле $T(z)$ также должно быть регулярным при $z = \infty$. Аналогично (2.23) это предполагает, что

$$\langle 0 | L_n = 0, \quad \text{если} \quad n \leq 1. \quad (2.25)$$

Так как в пространстве-времени Минковского (которое может быть получено при мнимых значениях параметра τ) поле $T(z)$ должно быть вещественным, операторы L_n удовлетворяют следующему условию эрмитовского сопряжения

$$L_n^+ = L_{-n}. \quad (2.26)$$

Заметим, что генераторы L_{-1} , L_0 , L_1 уничтожают как “in”, так и “out” вакуумы:

$$\langle 0 | L_s = L_s | 0 \rangle = 0, \quad s = 0, \pm 1. \quad (2.27)$$

Эти уравнения отражают факт регулярности проективных преобразований, упомянутых во введении. Уравнения (2.27) самосогласованы, так как с — числовой член в (2.21) исчезает для $n = 0, \pm 1$.

Уравнения (2.23), (2.25) и коммутационные соотношения (2.21) позволяют вычислить любые корреляционные функции вида⁷⁾

$$\begin{aligned} \langle T(\zeta_1) \dots T(\zeta_N) \bar{T}(\eta_1) \dots \bar{T}(\eta_M) \rangle = \\ = \langle T(\zeta_1) \dots T(\zeta_N) \rangle \langle \bar{T}(\eta_1) \dots \bar{T}(\eta_M) \rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

⁷⁾ Можно показать, что эти корреляторы совпадают с корреляторами полей

$$T^{(0)} = \varphi_z \varphi_z + 2\alpha_0 \varphi_{zz},$$

где φ является свободным безмассовым бозонным полем и параметр α_0 определяется формулой

$$c = 1 + 24 \alpha_0^2$$

В частности двухточечная функция задается формулой

$$\langle T(\zeta_1) T(\zeta_2) \rangle = c(\zeta_1 - \zeta_2)^{-4}, \quad (2.29)$$

откуда следует, что $c > 0$.

3. Тождества Уорда и конформные блоки

Рассмотрим вариацию $\delta_\varepsilon A_j(\xi)$ некоего локального поля A_j при бесконечно малом конформном преобразовании (1.11). Вследствие локальности эта вариация является линейной комбинацией функции $\varepsilon(z)$ и конечного числа ее производных, взятых в точке $z = \xi^1 + i\xi^2$:

$$\delta_\varepsilon A_j(z) = \sum_{k=0}^{\nu_j} B_j^{(k-1)}(z) \frac{d^k}{dz^k} \varepsilon(z), \quad (3.1)$$

где $B_j^{(k-1)}$ — локальные поля, принадлежащие множеству $\{A_j\}$ и ν_j — некие целые числа. В (3.1) мы опустили аргумент \bar{z} , присутствие которого здесь не важно. Изучение бесконечно малых трансляций и растяжений рассматриваемой переменной показывает, что первый и второй коэффициенты в (3.1) задаются выражениями

$$B_j^{(-1)}(z) = \frac{\partial}{\partial z} A_j(z), \quad B_j^{(0)}(z) = \Delta_j A_j(z), \quad (3.2)$$

где Δ_j обозначает размерность поля A_j . Очевидно, что размерности полей $B_j^{(k-1)}$ в (3.1) определяются равенствами

$$\Delta_{j,(k-1)} = \Delta_j + 1 - k, \quad k = 0, 1, \dots, \nu_j. \quad (3.3)$$

Рассмотрим еще раз корреляционную функцию (2.8). Как уже было сказано в предыдущем пункте, этот коррелятор является однозначной аналитической функцией переменной z с полюсами в точках $z = z_k, k = 1, 2, \dots, N$. Вследствие (2.10) и (3.1) мы можем записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle T(z) A_{j_1}(z_1) \dots A_{j_N}(z_N) \rangle &= \sum_{l=1}^N \sum_{k=0}^{\nu_l} k! (z - z_l)^{-k-1} \times \\ &\times \langle A_{j_1}(z_1) \dots A_{j_{l-1}}(z_{l-1}) B_{j_l}^{(k-1)}(z_l) A_{j_{l+1}}(z_{l+1}) \dots A_{j_N}(z_N) \rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Эта формула дает общий вид конформных тождеств Уорда.

В теориях, имеющих физический смысл, размерности Δ_j всех полей A_j должны удовлетворять неравенству

$$\Delta_j \geq 0, \quad (3.5)$$

так как в противном случае в теории присутствовали бы корреляторы, растущие с расстоянием. Далее мы полагаем, что единственное

поле с нулевой размерностью $\Delta = \bar{\Delta} = 0$ есть единичный оператор I . Сравнивая (3.3) с условием (3.5), мы видим, что сумма в (3.1) содержит конечное число членов $\nu_j \leq \Delta_j + 1$. Другой важный вывод, следующий из (3.3), заключается в том, что спектр размерностей $\{\Delta_j\}$ в любой двумерной конформной квантовой теории поля состоит из бесконечной серии чисел, отличающихся друг от друга на целые числа:

$$\Delta_n^{(k)} = \Delta_n + k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Здесь Δ_n обозначает минимальную размерность каждой серии, в то время как индекс n нумерует серию. То же самое имеет место для размерностей $\bar{\Delta}_j$, то есть спектр $\{\bar{\Delta}_j\}$ также состоит из серий

$$\bar{\Delta}_n^{(k)} = \bar{\Delta}_n + k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Пусть ϕ_n — поле с размерностями Δ_n и $\bar{\Delta}_n$. Вариация (3.1) этого поля имеет наиболее простой вид:

$$\delta_\varepsilon \phi_n(z) = \varepsilon(z) \frac{\partial}{\partial z} \phi_n(z) + \Delta_n \varepsilon'(z) \phi_n(z), \quad (3.8)$$

так как соответствующие поля $B^{(k-1)}$ с $k > 0$ имели бы размерности меньше, чем Δ_n . Аналогичная формула справедлива для вариации $\delta_{\bar{\varepsilon}} \phi_n$. Конечный вид этого конформного закона преобразования дается формулой (1.16). Мы будем называть операторы ϕ_n , преобразующиеся согласно закону (1.16), *примарными полями*. Заметим, что формула (3.8) эквивалентна коммутационному соотношению

$$[L_m, \phi_n(z)] = z^{m+1} \frac{\partial}{\partial z} \phi_n(z) + \Delta_n(m+1) z^m \phi_n(z), \quad (3.9)$$

которое выполняется для вершинных операторов в дуальной теории [8, 9].

Если все поля $A_j(\xi)$, входящие в корреляционную функцию (2.8), примарны, то общее соотношение (3.4) сводится к соотношению

$$\begin{aligned} \langle T(z) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle = \\ = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\Delta_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right\} \langle \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ — размерности примарных полей $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ соответственно. Заметим, что это тождество Уорда явно связывает корреляционные функции вида $\langle T(z) \phi_1 \dots \phi_N \rangle$ с корреляторами $\langle \phi_1 \dots \phi_N \rangle$. Примечательно, что проективные конформные тождества Уорда (А.6) могут быть непосредственно выведены из (3.10), если принять во внимание асимптотическое условие (2.14).

Сами примарные поля не могут образовывать замкнутую операторную алгебру. Действительно, имеется бесконечно много других полей, связанных с каждым из примарных полей ϕ_n . Мы будем называть

эти поля вторичными полями относительно примарных полей ϕ_n . Размерности вторичных полей образуют серии чисел, различающихся на целые, о которых говорилось выше. Эти поля вместе с примарными полями ϕ_n образуют *конформные блоки* $[\phi_n]$. Важно, что при преобразованиях каждый член каждого конформного блока преобразуется через представителей того же самого конформного блока. Таким образом, каждый конформный блок образует некоторое неприводимое представление конформной алгебры. Полное множество полей $\{A_j\}$ состоит из некоторого числа (которое может быть бесконечным) конформных блоков

$$\{A_j\} = \bigoplus_n [\phi_n]. \quad (3.11)$$

Чтобы понять природу этих вторичных полей, рассмотрим произведение $T(\zeta) \phi_n(z, \bar{z})$. Это произведение может быть разложено согласно (1.6), причем коэффициенты C_{ij}^k этого разложения являются однозначными аналитическими функциями от $(\zeta - z)$ вследствие соотношения (2.6) и локальных свойств полей $T(\zeta)$ и $\phi_n(z, \bar{z})$. Поэтому это произведение может быть представлено в виде

$$T(\zeta) \phi_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta - z)^{-2+k} \phi_n^{(-k)}(z), \quad (3.12)$$

где мы опять опустили зависимости полей от переменной \bar{z} . Размерности полей $\phi_n^{(-k)}$ задаются согласно (3.7). Сингулярные члены в (3.12) полностью определяются законом преобразования (3.8) (напомним также (2.10)). Таким образом, первые два коэффициента в (3.12) равны

$$\phi_n^{(-1)}(z) = \frac{\partial}{\partial z} \phi_n(z), \quad \phi_n^{(0)}(z) = \Delta_n \phi_n(z). \quad (3.13)$$

Коэффициенты $\phi_n^{(-k)}$ $k = 2, 3, \dots$ регулярных членов в (3.12) являются новыми локальными полями. Чтобы установить существование этих полей, можно разложить тождество Уорда (3.10) по степеням, например, $z - z_1$. Эти новые поля являются представителями конформного блока $[\phi_n]$, $\phi_n^{(-k)} \in [\phi_n]$. Конформные свойства этих вторичных полей $\phi_n^{(-k)}$ сложнее, чем свойства примарных полей ϕ_n . Бесконечно малые конформные преобразования, с одной стороны, и сравнение обеих частей равенства (3.12), с другой стороны, дают следующую формулу:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \phi_n^{(-k)}(z) = & \varepsilon(z) \frac{\partial}{\partial z} \phi_n^{(-k)}(z) + \\ & + (\Delta_n + k) \varepsilon'(z) \phi_n^{(-k)}(z) + \sum_{l=1}^k \frac{k+l}{(l+1)!} \left[\frac{d^{l+1}}{dz^{l+1}} \varepsilon(z) \right] \phi_n^{(l-k)}(z) + \\ & + \frac{1}{12} c \frac{1}{(k-2)!} \left[\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \varepsilon(z) \right] \phi_n(z). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Не только поля $\phi_n^{(-k)}$ принадлежат конформному блоку $[\phi_n]$. Рассмотрим, например, разложение операторного произведения

$$T(\zeta) \phi_n^{(-k_2)}(z) = \frac{1}{12} c (\zeta - z)^{-k_2-2} (k_2^3 - k_2) \phi_n(z) + \\ + \sum_{l=1}^{k_2} (\zeta - z)^{-l-2} (l + k_2) \phi_n^{(l-k_2)}(z) + \sum_{k_1=0}^{\infty} (\zeta - z)^{-2+k_1} \phi_n^{(-k_1, -k_2)}(z). \quad (3.15)$$

Операторы, содержащиеся в сингулярных членах (3.15), однозначно определяются формулой (3.14). В частности,

$$\phi_n^{(-1, -k)}(z) = \frac{\partial}{\partial z} \phi_n^{(-k)}(z), \quad \phi_n^{(0, -k)}(z) = (\Delta_n + k) \phi_n^{(-k)}(z). \quad (3.16)$$

Новые локальные поля $\phi_n^{(-k_1, -k_2)}$ с $k_1 > 1$ также принадлежат конформному блоку $[\phi_n]$. Вариации $\delta_\epsilon \phi^{(-k_1, -k_2)}$ выражаются через поля $\phi_n^{(-l_1, -l_2)}$, $\phi_n^{(-l)}$ и ϕ_n .

Рассматривая операторные произведения $T(\zeta) \phi_n^{(-k_1, -k_2)}(z), \dots$ и так далее, можно получить бесконечную серию вторичных полей

$$\phi_n^{(-k_1, -k_2, \dots, -k_N)}(z), \quad (3.17)$$

где $k_i \geq 1$ и $N = 1, 2, \dots$. Поля (3.17) могут быть определены при помощи явной формулы

$$\phi_n^{(-k_1, \dots, -k_N)}(z) = L_{-k_1}(z) \dots L_{-k_N}(z) \phi_n(z), \quad (3.18)$$

где операторы $L_{-k}(z)$ задаются контурными интегралами

$$L_{-k}(z) = \oint \frac{d\zeta T(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}. \quad (3.19)$$

Контур интегрирования, соответствующие каждому из операторов $L_{-k_i}(z)$ в (3.18), охватывают точку z так же как и точки

$$\zeta_{i+1}, \quad \zeta_{i+2}, \quad \dots, \quad \zeta_N,$$

которые являются переменными интегрирования, соответствующими операторам L справа от L_{-k_i} ⁸⁾. Размерности полей (3.17) равны

$$\Delta_n^{(k_1, \dots, k_N)} = \Delta_n + k_1 + \dots + k_N. \quad (3.20)$$

Бесконечный набор полей (3.17) образует конформный блок $[\phi_n]$. Эти поля не являются линейно независимыми (см. ниже). На самом деле,

⁸⁾ Легко проверить, что операторы (3.19), где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, удовлетворяют алгебре Вирасоро (2.21). Очевидно, операторы L_n , введенные в пункте 2, есть не что иное, как операторы $L_n(0)$.

в общем случае поля (3.17) с $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_N$ образуют базис⁹⁾. Заметим, что

$$\phi_n^{(-1, -k_1, -k_2, \dots, -k_N)} = \frac{\partial}{\partial z} \phi_n^{(-k_1, -k_2, \dots, -k_N)}. \quad (3.21)$$

Поэтому конформный блок $[\phi_n]$ естественным образом содержит все производные от каждого включенного в него поля. При помощи (3.18) можно вывести, что вариации $\delta_\epsilon \phi_n^{\{k\}}$, $\{k\} = (-k_1, \dots, -k_N)$ выражаются через поля, принадлежащие тому же самому конформному блоку $[\phi_n]$, и потому каждый конформный блок соответствует некоторому представлению конформной алгебры.

Чтобы описать структуру такого представления, полезно еще раз вернуться к операторному формализму. Рассмотрим векторы (примарные состояния)

$$|n\rangle = \phi_n(0)|0\rangle. \quad (3.22)$$

Используя свойства вакуума (2.23) и коммутационные соотношения (3.9), можно получить, что

$$\begin{aligned} L_m |n\rangle &= 0, \quad \text{если } m > 0, \\ L_0 |n\rangle &= \Delta_n |n\rangle. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Из (3.18) следует, что

$$\phi_n^{(-k_1, \dots, -k_N)}(0)|0\rangle = L_{-k_1} \dots L_{-k_N} |n\rangle. \quad (3.24)$$

Таким образом, конформный блок $[\phi_n]$ изоморфен пространству состояний, порожденному примарным состоянием $|n\rangle$ при помощи отрицательных компонент L_m , $m < 0$ ¹⁰⁾. В теории представлений это пространство известно как модуль Верма V_n (см., например, [6]). Вследствие соотношений (2.21) имеются линейные зависимости между векторами (3.24). Как было упомянуто выше, во всех случаях, за исключением некоторых специальных значений Δ_n (см. пункт 5), состояния (3.24) с $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_N$ образуют базис в V_n . Заметим, что векторы (3.24) являются собственными состояниями оператора L_0 , причем их собственные значения определяются согласно (3.20).

До сих пор мы имели дело только с подгруппой Γ конформной группы \mathcal{G} . На самом деле необходимы более точные определения. Так как полная конформная группа есть прямое произведение (1.10), то представления $[\phi_n]$ являются прямыми произведениями представлений подгрупп Γ и $\bar{\Gamma}$

$$[\phi_n] = V_n \otimes \bar{V}_n. \quad (3.25)$$

⁹⁾ Это утверждение не выполняется для некоторых специальных значений Δ_n (см. пункт 5).

¹⁰⁾ Это утверждение не является точным, так как мы пренебрегли зависимостью полей от \bar{z} ; точное определение дается ниже.

Это означает, что оно включает не только векторы (3.24), но также и все состояния вида

$$\phi_n^{\{k\}\{\bar{k}\}}(0)|0\rangle = L_{-k_1} \dots L_{-k_N} \bar{L}_{-\bar{k}_1} \dots \bar{L}_{-\bar{k}_M} |n\rangle, \quad (3.26)$$

где

$$\{k\} = (-k_1, -k_2, \dots, -k_N); \quad \{\bar{k}\} = (-\bar{k}_1, -\bar{k}_2, \dots, -\bar{k}_M).$$

Здесь k_i и \bar{k}_j — независимые целые числа. Напомним, что операторы L и \bar{L} взаимно коммутируют. Согласно (1.16) примарное состояние $|n\rangle$ удовлетворяет, кроме (3.23), уравнениям

$$\begin{aligned} \bar{L}_m |n\rangle &= 0, \quad \text{если} \quad m > 0, \\ \bar{L}_0 |n\rangle &= \bar{\Delta}_n |n\rangle. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Поэтому каждый конформный блок $[\phi_n]$ характеризуется двумя параметрами Δ_n и $\bar{\Delta}_n$.

Из-за конформной инвариантности, двухточечные функции

$$\langle \phi_n(\xi_1) \phi_m(\xi_l) \rangle$$

исчезают, если только поля ϕ_n и ϕ_m не имеют одинаковые размерности (см. приложение А). Более того, система примарных полей всегда может быть выбрана ортонормальной:

$$\langle \phi_n(z_1, \bar{z}_1) \phi_m(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \delta_{nm} (z_1 - z_2)^{-2\Delta_n} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{-2\bar{\Delta}_n}. \quad (3.28)$$

Определим примарные состояния “out” при помощи формулы

$$\langle n| = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow \infty} \langle 0| \phi_n(z, \bar{z}) z^{2L_0} \bar{z}^{2\bar{L}_0}. \quad (3.29)$$

Эти вектора удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \langle n| L_m &= 0, \quad \text{если} \quad m < 0, \\ \langle n| L_0 &= \Delta_n \langle n| \end{aligned} \quad (3.30)$$

и аналогичным уравнениям, получающимся при замене

$$L \rightarrow \bar{L}, \quad \Delta_n \rightarrow \bar{\Delta}_n.$$

Подобно (3.26), мы имеем

$$\begin{aligned} \lim_{z, \bar{z} \rightarrow \infty} \langle 0| \phi_n^{\{k\}\{\bar{k}\}}(z, \bar{z}) z^{2L_0} \bar{z}^{2\bar{L}_0} &= \\ &= \langle n| L_{k_N} L_{k_{N-1}} \dots L_{k_1} \bar{L}_{\bar{k}_M} \dots \bar{L}_{\bar{k}_1}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Условие ортонормальности (3.28) теперь записывается в виде

$$\langle n| m \rangle = \delta_{nm}. \quad (3.32)$$

Конформные тождества Уорда дают возможность явно выразить любую корреляционную функцию вида

$$\langle T(\zeta_1) \dots T(\zeta_M) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle, \quad (3.33)$$

через корреляторы

$$\langle \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle. \quad (3.34)$$

Здесь ϕ_1, \dots, ϕ_N — некоторые примарные поля. Это может быть сделано путем последовательного применения соотношения

$$\begin{aligned} & \langle T(\zeta) T(\zeta_1) \dots T(\zeta_M) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle = \\ & = \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{\Delta_i}{(\zeta - z_i)^2} + \frac{1}{\zeta - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right] + \sum_{j=1}^M \left[\frac{2}{(\zeta - \zeta_j)^2} + \frac{1}{\zeta - \zeta_j} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \right] \right\} \times \\ & \quad \times \langle T(\zeta_1) \dots T(\zeta_M) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle + \\ & + \sum_{j=1}^M \frac{c}{(\zeta - \zeta_j)^4} \langle T(\zeta_1) \dots T(\zeta_{j-1}) T(\zeta_{j+1}) \dots T(\zeta_M) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Первое слагаемое в (3.35) имеет то же происхождение, что и (3.10), в то время как второе слагаемое возникает вследствие наличия c -числового члена в законе преобразования (2.12)¹¹⁾.

Используя корреляционные функции (3.33), можно вычислить любые корреляторы вида

$$\langle \phi_1^{\{k_1\}}(z_1) \dots \phi_N^{\{k_N\}}(z_N) \rangle, \quad (3.36)$$

где $\phi_i^{\{k_i\}}$ — некоторые вторичные от полей ϕ_i , так как эти вторичные поля есть не что иное, как коэффициенты в операторном разложении произведений вида (3.12), (3.15) и т.д. Тем самым корреляторы (3.36) выражаются через корреляционные функции (3.34) при помощи линейных дифференциальных операторов. Общее выражение чрезвычайно громоздко и потому мы выписываем лишь простейший пример¹²⁾

$$\begin{aligned} & \langle \phi_n^{(-k_1, -k_2, \dots, -k_M)}(z) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle = \\ & = \hat{\mathcal{L}}_{-k_M}(z, z_i) \hat{\mathcal{L}}_{-k_{M-1}}(z, z_i) \dots \hat{\mathcal{L}}_{-k_1}(z, z_k) \langle \phi_n(z) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где дифференциальные операторы $\hat{\mathcal{L}}_{-k}$ задаются формулами

$$\hat{\mathcal{L}}_{-k}(z, z_i) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{(1-k)\Delta_i}{(z - z_k)^k} - \frac{1}{(z - z_i)^{k-1}} \frac{\partial}{\partial z_i} \right]. \quad (3.38)$$

¹¹⁾ Очевидно, поля $T(z)$ и $\bar{T}(\bar{z})$ не являются примарными полями: они принадлежат конформному блоку $[I]$ тождественного оператора.

¹²⁾ Чтобы получить (4.5) наиболее простым способом можно подставить явную формулу (3.18) и деформировать контуры интегрирования так, чтобы охватить ими сингулярности z_1, z_2, \dots, z_N .

Поэтому конформные тождества Уорда позволяют представить любые корреляционные функции через корреляторы примарных полей (3.34). Следовательно, вся информация конформной квантовой теории заключена в этих корреляторах.

4. Конформные свойства операторной алгебры

В квантовой теории поля корреляционные функции (2.1) должны удовлетворять операторной алгебре (1.6). Конформная симметрия накладывает жесткие ограничения на коэффициенты $C_{ij}^k(\xi)$. Рассмотрим произведение двух примарных полей $\phi_n(\xi) \phi_m(0)$. Операторное разложение этого произведения может быть представлено в виде

$$\phi_n(z, \bar{z}) \phi_m(0, 0) = \sum_p \sum_{\{k\}} \sum_{\{\bar{k}\}} C_{nm}^{p, \{k\}, \{\bar{k}\}} \times \\ \times z^{\Delta_p - \Delta_n - \Delta_m + \sum_i k_i} \bar{z}^{\bar{\Delta}_p - \bar{\Delta}_n - \bar{\Delta}_m + \sum_i \bar{k}_i} \phi_p^{\{k\}, \{\bar{k}\}}(0, 0), \quad (4.1)$$

где $\phi_p^{\{k\}, \{\bar{k}\}}$ являются вторичными полями, принадлежащими конформному блоку $[\phi_p]$. Обе части равенства (4.1) должны обладать одинаковыми конформными свойствами. Закон преобразования левой части определяется при помощи (3.8); конформные свойства каждого слагаемого в правой части могут быть выведены при помощи (3.18). Требование конформной инвариантности равенства (4.1) приводит к соотношениям для числовых констант $C_{nm}^{p, \{k\}, \{\bar{k}\}}$ с разными $\{k\}$, но одинаковыми индексами (см. приложение В). В принципе, эти соотношения могут быть решены рекуррентно, при этом решение представляется в следующем виде:

$$C_{nm}^{p, \{k\}, \{\bar{k}\}} = C_{nm}^p \beta_{nm}^{p, \{k\}} \bar{\beta}_{nm}^{p, \{\bar{k}\}}, \quad (4.2)$$

где C_{nm}^p — константы самих примарных полей ϕ_p и множители β ($\bar{\beta}$) однозначно выражаются лишь через размерности

$$\Delta_n, \Delta_m, \Delta_p (\bar{\Delta}_n, \bar{\Delta}_m, \bar{\Delta}_p);$$

предполагается выполнение условия $\beta_{nm}^{p, \{0\}} = \bar{\beta}_{nm}^{p, \{0\}} = 1$. Факторизованная (в терминах β) форма уравнения (4.2) является следствием (3.25). Разложение (4.1) может быть переписано как

$$\phi_n(z, \bar{z}) \phi_m(0, 0) = \sum_p C_{nm}^p z^{\Delta_p - \Delta_n - \Delta_m} \bar{z}^{\bar{\Delta}_p - \bar{\Delta}_n - \bar{\Delta}_m} \Psi_p(z, \bar{z} | 0, 0), \quad (4.3)$$

где

$$\Psi_p(z, \bar{z} | 0, 0) = \sum_{\{k\}, \{\bar{k}\}} \beta_{nm}^{p, \{k\}} \bar{\beta}_{nm}^{p, \{\bar{k}\}} z^{\sum k_i} \bar{z}^{\sum \bar{k}_i} \phi_p^{\{k\}, \{\bar{k}\}}(0, 0) \quad (4.4)$$

является вкладом конформного блока $[\phi_p]$. Подчеркнем, что конформные свойства “билокальных” операторов (4.4) совпадают со свойствами произведения $\phi_n(z, \bar{z}) \phi_m(0, 0)$, причем все коэффициенты в степенных рядах (4.4) однозначно определяются этим требованием. К сожалению, уравнения, определяющие эти коэффициенты, слишком сложны для точного решения. Первые несколько коэффициентов β приводятся в приложении В для частного случая $\Delta_n = \Delta_m$.

Константы C_{nm}^p в (4.3) и значения размерностей Δ_n , $\bar{\Delta}_n$ не определяются одной лишь конформной симметрией. Эти числовые параметры являются наиболее важными динамическими характеристиками в конформной квантовой теории поля. Заметим, что при условии ортонормальности (3.28) коэффициенты $C_{nm}^l = C_{nml}$ симметричны относительно индексов n, m, l и совпадают с числовыми множителями в трехточечных функциях

$$\langle n | \phi_m(z, \bar{z}) | l \rangle = C_{nml} z^{\Delta_n - \Delta_m - \Delta_l} \bar{z}^{\bar{\Delta}_n - \bar{\Delta}_m - \bar{\Delta}_l}, \quad (4.5)$$

где для простоты мы положили две точки равными 0 и ∞ . Чтобы определить параметры C_{nm}^l и Δ_n , необходимо применить динамический принцип. При бутстрапном подходе, описанном во введении, ассоциативность операторной алгебры (1.6) была выбрана в качестве основного динамического принципа. Как показано в приложении В, условие ассоциативности эквивалентно кроссинг-симметрии четырехточечных функций

$$\langle A_{j_1}(\xi_1) A_{j_2}(\xi_2) A_{j_3}(\xi_3) A_{j_4}(\xi_4) \rangle. \quad (4.6)$$

Вследствие соотношений, рассмотренных в конце предыдущего пункта, достаточно рассмотреть четырехточечные функции примарных полей

$$\langle \phi_k(\xi_1) \phi_l(\xi_2) \phi_n(\xi_3) \phi_m(\xi_4) \rangle. \quad (4.7)$$

Благодаря проективной инвариантности (см. приложение А), четырехточечные функции по существу зависят лишь от двух ангармонических дробей

$$x = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}, \quad \bar{x} = \frac{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_4)}. \quad (4.8)$$

Поэтому удобно положить $z_1 = \bar{z}_1 = \infty$, $z_2 = \bar{z}_2 = 1$, $z_3 = x$, $\bar{z}_3 = \bar{x}$, $z_4 = \bar{z}_4 = 0$ и определить функции

$$G_{nm}^{lk}(x, \bar{x}) = \langle k | \phi_l(1, 1) \phi_n(x, \bar{x}) | m \rangle. \quad (4.9)$$

В терминах этих функций условие кроссинг-симметрии принимает вид

$$G_{nm}^{lk}(x, \bar{x}) = G_{nl}^{mk}(1 - x, 1 - \bar{x}) = x^{-2\Delta_n} \bar{x}^{-2\bar{\Delta}_n} G_{nk}^{lm}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\bar{x}}\right). \quad (4.10)$$

Подставляя разложение (4.3) для произведения $\phi_n(x, \bar{x}) \phi_m(0, 0)$, можно переписать (4.9) как

$$G_{nm}^{lk}(x, \bar{x}) = \sum_p C_{nm}^p C_{klp} A_{nm}^{lk}(p|x, \bar{x}), \quad (4.11)$$

где каждая из “парциальных волн”

$$A_{nm}^{lk}(p|x, \bar{x}) = (C_{kl}^p)^{-1} x^{\Delta_p - \Delta_n - \Delta_m} \bar{x}^{\bar{\Delta}_p - \bar{\Delta}_n - \bar{\Delta}_m} \times \\ \times \langle k | \phi_l(1, 1) \Psi_p(x, \bar{x} | 0, 0) | 0 \rangle \quad (4.12)$$

представляет “s-канальный” вклад конформного блока $[\phi_p]$ в четырехточечную функцию (4.9). Удобно ввести диаграммы, связанные с этими амплитудами:

$$A_{nm}^{lk}(p|x, \bar{x}) = \begin{array}{c} (0) \quad (1) \\ \diagdown \quad \diagup \\ n \quad l \\ \diagup \quad \diagdown \\ m \quad k \\ (x) \quad (\infty) \end{array} \quad (4.13)$$

Тогда разложение (4.11) по “парциальным волнам” может быть представлено в следующем виде:

$$G_{nm}^{lk}(x, \bar{x}) = \begin{array}{c} n \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bigcirc \\ \diagup \quad \diagdown \\ m \quad k \end{array} = \sum_p C_{nm}^p C_{klp} \begin{array}{c} n \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} p \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ m \quad k \end{array} \quad (4.14)$$

Из (4.4) ясно, что амплитуды (4.12) имеют факторизованную форму

$$A_{nm}^{lk}(p|x, \bar{x}) = \mathcal{F}_{nm}^{lk}(p|x) \bar{\mathcal{F}}_{nm}^{lk}(p|\bar{x}), \quad (4.15)$$

где, например, функция \mathcal{F} дается степенным рядом

$$\mathcal{F}_{nm}^{lk}(p|x) = x^{\Delta_p - \Delta_n - \Delta_m} \times \\ \times \sum_{\{k\}} \beta_{nm}^p \{k\} x^{\sum k_i} \frac{\langle k | \phi_l(1, 1) L_{-k_1} \dots L_{-k_N} | p \rangle}{\langle k | \phi_l(1, 1) | p \rangle}. \quad (4.16)$$

Матричные элементы в правой части (4.16) могут быть вычислены точно при помощи коммутационных соотношений (3.9) и уравнений (3.30). Поэтому функции (4.16) полностью определяются конформной симметрией. Эти функции зависят от шести параметров: пяти размерностей $\Delta_n, \Delta_m, \Delta_k, \Delta_l, \Delta_p$ и центрального заряда s . Мы будем называть (4.16) *конформными блоками*, так как любая корреляционная функция (4.7) строится из этих функций \mathcal{F} .

Условие кроссинг-симметрии для четырехточечных функций (4.9) может быть представлено как следующее диаграммное уравнение:

$$\sum_p C_{nm}^p C_{lkp} \quad \begin{array}{c} n \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} p \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ m \quad k \end{array} = \sum_q C_{nl}^q C_{mkq} \quad \begin{array}{c} n \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} q \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ m \quad k \end{array} \quad (4.17)$$

Аналитическая форма этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_p C_{nm}^p C_{lkp} \mathcal{F}_{nm}^{lk}(p|x) \bar{\mathcal{F}}_{nm}^{lk}(p|\bar{x}) = \\ = \sum_q C_{nl}^q C_{mkq} \mathcal{F}_{nl}^{mk}(q|1-x) \bar{\mathcal{F}}_{nl}^{mk}(q|1-\bar{x}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Если конформные блоки \mathcal{F} известны, то (4.18) дает систему уравнений, определяющую константы C_{nm}^l и размерности Δ_n , $\bar{\Delta}_n$. Поэтому вычисление конформных блоков (4.16) для общих значений Δ_n есть проблема принципиальной важности для конформной квантовой теории поля. Несколько первых членов степенного разложения для этих функций приводятся в приложении В, где для простоты рассматривается случай $\Delta_n = \Delta_m = \Delta_k = \Delta_l = \Delta$. Хотя в общем случае вид конформных блоков в настоящее время не известен, найдены отдельные значения размерностей Δ (связанные с вырожденными представлениями алгебры Вирасоро, см. пункт 5), такие, что соответствующие конформные блоки могут быть точно вычислены, поскольку они являются решениями линейных дифференциальных уравнений. Простейший пример — гипергеометрическая функция. В некоторых случаях бутстрапное уравнение (4.18) может быть решено полностью.

5. Вырожденные конформные блоки

Представление V_Δ алгебры Вирасоро неприводимо, кроме того случая, когда размерность Δ принимает некоторые выделенные значения [6, 7]. Оказывается, что для этих значений векторное пространство V_Δ содержит особый вектор (*нуль-вектор*) $|\chi\rangle \in V_\Delta$, удовлетворяющий уравнениям

$$\begin{aligned} L_n |\chi\rangle &= 0, \quad \text{если } n > 0, \\ L_0 |\chi\rangle &= (\Delta + K) |\chi\rangle. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь K — целое положительное число. Например, легко проверить, что вектор

$$|\chi\rangle = \left[L_{-2} + \frac{3}{2(2\Delta + 1)} L_{-1}^2 \right] |\Delta\rangle, \quad (5.2)$$

(где $|\Delta\rangle$ обозначает примарное состояние размерности Δ) удовлетворяет (5.1) с $K = 2$ при условии, что Δ принимает одно из двух значений

$$\Delta = \frac{1}{16} \left[5 - c \pm \sqrt{(c-1)(c-25)} \right]. \quad (5.3)$$

Вообще говоря, нуль-вектор $|\chi\rangle$ может рассматриваться как примарное состояние своего собственного модуля Верма $V_{\Delta+K}$. Поэтому представление V_{Δ} оказывается приводимым. Неприводимое представление $V_{\Delta}^{(ir)}$ получается, если нуль-вектор $|\chi\rangle$ (вместе со всеми состояниями, принадлежащими $V_{\Delta+K}$) формально полагается равным нулю:

$$|\chi\rangle = 0. \quad (5.4)$$

Заметим, что уравнение (5.4) не приводит к противоречиям, так как вследствие (5.1) нуль-вектор ортогонален любому состоянию представления V_{Δ} и, в частности, имеет нулевую норму

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \chi \rangle &= 0, & |\Psi\rangle &\in V_{\Delta}, \\ \langle \chi | \chi \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В конформной квантовой теории поля значение этого явления состоит в следующем. Если размерность Δ некоего примарного поля ϕ_{Δ} принимает одно из выделенных значений, приведенных выше, то конформный блок $[\phi_{\Delta}]$, формально вычисленный согласно (3.18), содержит выделенное вторичное поле $\chi_{\Delta+K} \in [\phi_{\Delta}]$, которое имеет конформные свойства примарного поля, то есть удовлетворяет коммутационным соотношениям типа (3.9). Это поле соответствует нуль-вектору $|\chi\rangle \in V_{\Delta}$, и мы называем его *нулевым полем*. Например, если Δ задано согласно (5.3), то оператор

$$\chi_{\Delta+2} = \phi_{\Delta}^{(-2)} + \frac{3}{2(2\Delta+1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_{\Delta} \quad (5.6)$$

является нулевым полем.

Формально дополнительное примарное поле $\chi_{\Delta+K}$ происходит из конформного блока $[\chi_{\Delta+K}]$, который вложен в $[\phi_{\Delta}]$. Однако заметим, что корреляционные функции вида

$$\langle \chi_{\Delta+K}(z) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle$$

исчезают. Поэтому нулевое поле $\chi_{\Delta+K}$ без противоречий может быть положено равным нулю:

$$\chi_{\Delta+K} = 0 \quad (5.7)$$

Очевидно, что это условие аннулирует все вторичные поля нулевого поля

$$[\chi_{\Delta+K}] = 0. \quad (5.8)$$

Если мы применим уравнение (5.7), то действительно получим неприводимый конформный блок $[\phi_{\Delta}]$ исходного примарного поля ϕ_{Δ} . В

этом случае конформный блок содержит "меньше" полей, чем обычно, и мы называем его *вырожденным конформным блоком*. Мы также будем называть вырожденным соответствующее примарное поле ϕ_Δ .

Все выделенные значения Δ , соответствующие приводимым представлениям V_Δ , были приведены Кацем [7] (см. также [6]). Эти значения, которые можно занумеровать двумя положительными целыми числами n и m , задаются формулой

$$\Delta_{(n,m)} = \Delta_0 + \left(\frac{1}{2} \alpha_+ n + \frac{1}{2} \alpha_- m \right)^2, \quad (5.9)$$

где

$$\Delta_0 = \frac{1}{24} (c - 1), \quad (5.10)$$

$$\alpha_\pm = \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}}. \quad (5.11)$$

Если $\Delta = \Delta_{(n,m)}$, то соответствующий нуль-вектор имеет размерность

$$\Delta_{(n,m)} + nm. \quad (5.12)$$

Обозначим вырожденное примарное поле $\phi_{\Delta_{(n,m)}}$, имеющее размерность $\Delta_{(n,m)}$, через $\psi_{(n,m)}$ ¹³⁾. Заметим, что

$$\Delta_{(1,1)} = 0. \quad (5.13)$$

Можно показать, что поле $\psi_{(1,1)}$ не зависит от z , то есть¹⁴⁾

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi_{(1,1)} = 0. \quad (5.14)$$

Размерности $\Delta_{(1,2)}$ и $\Delta_{(2,1)}$ являются как раз двумя значениями, указанными в (5.3).

Рассмотрим корреляционные функции вида

$$\langle \psi_{(n,m)}(z) \phi_1(\xi_1) \dots \phi_N(\xi_N) \rangle. \quad (5.15)$$

Важное свойство этих корреляционных функций заключается в том, что они удовлетворяют линейным уравнениям в частных производных, причем максимальный порядок производных равен nm ¹⁵⁾. Чтобы это показать, напомним, что корреляционные функции любых вторичных полей

$$\langle \psi_{(n,m)}^{(-k_1, \dots, -k_L)}(z) \phi_1(\xi_1) \dots \phi_N(\xi_N) \rangle \quad (5.16)$$

¹³⁾ Это обозначение не является полным, потому что оно ничего не говорит о второй размерности Δ примарного поля. Этот факт, который надо всегда иметь в виду, не сказывается на выводах, которые делаются ниже.

¹⁴⁾ Если обе размерности Δ и $\bar{\Delta}$ поля ψ равны нулю, то это поле вообще не зависит от координат и совпадает с единичным оператором I .

¹⁵⁾ Простейший пример этих уравнений есть уравнение (5.14).

могут быть выражены через корреляционную функцию (5.15) при помощи линейных дифференциальных операторов (см. (3.37)). Нулевое поле $\chi_{\Delta+nm}$ является некой линейной комбинацией вторичных полей $\Psi_{(n,m)}^{(-k_1, \dots, k_L)}$. Поэтому дифференциальное уравнение для (5.15) непосредственно следует из уравнения (5.7). Например, учитывая (5.6) и (3.37), получаем для вырожденного поля $\psi_{(1,2)}(z)$

$$\left\{ \frac{3}{2(2\delta+1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sum_{i=1}^N \frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{z-z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right\} \times \\ \times \langle \Psi_{(1,2)}(z) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle = 0, \quad (5.17)$$

где $\delta = \Delta_{(1,2)}$ и $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ — размерности примарных полей ϕ_1, \dots, ϕ_N , соответственно. Корреляционная функция, включающая поле $\psi_{(2,1)}$, удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению с одной лишь разницей, что $\delta = \Delta_{(2,1)}$ ¹⁶⁾ Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют вырожденные поля $\psi_{(1,3)}$ и $\psi_{(3,1)}$, приведено в приложении D в качестве другого примера.

В случае четырехточечных функций

$$\Psi_{(n,m)}(z | z_1, z_2, z_3) = \langle \psi_{(n,m)}(z) \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) \rangle \quad (5.18)$$

дифференциальные уравнения в частных производных могут быть сведены к обычным. Действительно, в этом случае соотношения (A.6) могут быть решены относительно производных $\partial/\partial z_i$, $i = 1, 2, 3$. Например, подставляя эти производные в (5.17), мы получаем обыкно-

¹⁶⁾ Стоит упомянуть о следующей интерпретации уравнения (5.17). Пусть $\psi(z)$ обозначает одно из полей $\psi_{(1,2)}$ или $\psi_{(2,1)}$, δ — соответствующую размерность $\Delta_{(1,2)}$ или $\Delta_{(2,1)}$. Тогда поле $\psi(z)$ удовлетворяет операторному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(z) = \gamma :T(z) \psi(z):, \quad (*)$$

где $\gamma = \frac{2}{3}(2\delta+1)$, в то время как сингулярное операторное произведение регуляризуется при помощи вычитаний

$$:T(z) \psi(z): = \lim_{\zeta \rightarrow z} \left\{ T(\zeta) \psi(z) - \frac{\delta}{(\zeta-z)^2} \psi(z) - \frac{1}{\zeta-z} \frac{\partial}{\partial z} \psi(z) \right\}.$$

Классический предел уравнения (*), (который соответствует выбору $\psi = \psi_{(1,2)}$ и $c \rightarrow \infty$) является существенной частью классической теории уравнения Лиувилля (см., например, [13]). Мы полагаем, что уравнение (*) играет аналогичную роль в квантовой теории этого уравнения, которое, очевидно, связано с теорией струн [14]. Мы планируем обсудить этот вопрос в другой статье.

венное дифференциальное уравнение Римана

$$\left\{ \frac{3}{2(2\delta+1)} \frac{d^2}{dz^2} + \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{z-z_i} \frac{d}{dz} - \frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} \right] + \sum_{j<i} \frac{\delta + \Delta_{ij}}{(z-z_i)(z-z_j)} \right\} \Psi(z|z_1, z_2, z_3) = 0, \quad (5.19)$$

где $\Delta_{12} = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3$ и т.д., $\delta = \Delta_{(1,2)}$, $\Psi = \Psi_{(1,2)}$ или $\delta = \Delta_{(2,1)}$, $\Psi = \Psi_{(2,1)}$. Таким образом, для случаев $(n, m) = (1, 2)$ или $(2, 1)$ четырехточечная функция (5.18) может быть выражена через гипергеометрическую функцию.

Рассмотрим операторную алгебру, включающую вырожденные поля. Некоторая важная информация об этой операторной алгебре может быть получена из дифференциальных уравнений, рассмотренных выше. Для примера рассмотрим произведение $\psi(z) \phi_\Delta(z_1)$, где ϕ_Δ — некое примарное поле размерности Δ , в то время как $\psi(z)$ временно обозначает одно из вырожденных полей $\psi_{(1,2)}(z)$ или $\psi_{(2,1)}(z)$. Подставим разложение

$$\psi(z) \phi_\Delta(z_1) = \text{Const} \cdot (z - z_1)^\kappa [\phi_{\Delta'}(z_1) + \beta^{(-1)}(z - z_1) \phi_{\Delta'}^{(-1)}(z_1) + \dots] \quad (5.20)$$

в дифференциальное уравнение (5.17). В уравнении (5.20) $\phi_{\Delta'}$ обозначает некоторое примарное поле размерности Δ' , $\kappa = \Delta' - \Delta - \delta$, где δ является размерностью поля ψ , то есть одним из значений, даваемых (5.3). Рассматривая наиболее сингулярный член при $z \rightarrow z_1$, мы немедленно получаем характеристическое уравнение, определяющее экспоненту

$$\frac{3\kappa(\kappa-1)}{2(2\delta+1)} - \Delta + \kappa = 0. \quad (5.21)$$

Чтобы описать решения этого уравнения, удобно ввести следующую параметризацию размерностей:

$$\delta(\alpha) = \Delta_0 + \frac{1}{4} \alpha^2, \quad (5.22)$$

где Δ_0 определяется при помощи (5.10). Если $\Delta = \Delta(\alpha)$, то два решения (5.21) даются выражениями

$$\begin{aligned} \Delta'_{(1)} &= \Delta_0 + \frac{1}{4} (\alpha + \alpha_\pm)^2, \\ \Delta'_{(2)} &= \Delta_0 + \frac{1}{4} (\alpha - \alpha_\pm)^2, \end{aligned} \quad (5.23)$$

где α_\pm задаются формулой (5.11), при этом берется α_+ (α_-), если $\psi = \psi_{(1,2)}$ ($\psi = \psi_{(2,1)}$). Пусть $\phi_\alpha(z)$ — примарное поле с размерностью (5.22). Результат приведенного вычисления может быть пред-

ставлен следующими символическими формулами:

$$\begin{aligned}\psi_{(1,2)} \phi_{(\alpha)} &= [\phi_{(\alpha-\alpha_+)}] + [\phi_{(\alpha+\alpha_+)}], \\ \psi_{(2,1)} \phi_{(\bar{\alpha})} &= [\phi_{(\alpha-\alpha_-)}] + [\phi_{(\alpha+\alpha_-)}].\end{aligned}\quad (5.24)$$

Здесь квадратные скобки обозначают вклады соответствующих конформных блоков в операторное разложение произведения

$$\psi(z) \phi_{(\alpha)}(z_1).$$

В уравнении (5.24) все множители, стоящие перед этими вкладами, опущены. Эти множители не могут быть, конечно, определены при помощи простых вычислений, как это было раньше¹⁷⁾. В следующем пункте мы увидим, что некоторые из этих коэффициентов могут исчезать.

Можно показать, что “правило слияния” (5.24) обобщается на случай произвольных вырожденных полей $\psi_{(n,m)}$ следующим образом:

$$\psi_{(n,m)} \phi_{\alpha} = \sum_{l=1-m}^{1+m} \sum_{k=1-n}^{1+n} [\phi_{(\alpha+l\alpha_-+k\alpha_+)}], \quad (5.25)$$

где переменная k пробегает четные (нечетные) значения при условии, что индекс n является нечетным (четным); то же самое имеет место для переменной l и индекса m . Таким образом, в общем случае сумма в (5.25) содержит nm членов в согласии с тем фактом, что вырожденное поле $\psi_{(n,m)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению порядка nm .

Мы видим, что дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют вырожденные поля, накладывают жесткие ограничения на операторную алгебру. Конечно, в общем случае эти дифференциальные уравнения не дают достаточно информации для полного определения корреляционных функций (5.15). Даже в случаях четырехточечных функций (5.18) необходимо принять во внимание зависимость полей от \bar{z} и их локальные свойства. В следующем пункте мы изучим “минимальные модели” конформной квантовой теории поля, в которых все рассматриваемые примарные поля вырождены.

6. Минимальные теории

Рассмотрим “правило слияния” (5.24). Подстановка $\phi_{(\alpha)} = \psi_{(1,2)}$ дает

$$\psi_{(1,2)} \psi_{(1,2)} = [\psi_{(1,1)}] + [\psi_{(1,3)}]. \quad (6.1)$$

¹⁷⁾ Чтобы определить эти множители в квантовой теории поля, следует принять во внимание условие ассоциативности для операторной алгебры и локальные свойства полей.

Здесь принято во внимание (5.9). Аналогично для $m > 1$ получаем

$$\psi_{(1,2)} \psi_{(1,m)} = [\psi_{(1,m-1)}] + [\psi_{(1,m+1)}]. \quad (6.2)$$

Таким образом, вырожденное поле $\psi_{(1,2)}$ содержится в операторной алгебре, при этом в общем случае эта алгебра включает также все вырожденные поля $\psi_{(1,m)}$. Более того, полагая, что операторная алгебра также включает вырожденное поле $\psi_{(2,1)}$ и используя (5.24), можно получить все вырожденные поля $\psi_{(n,m)}$. Согласно “правилу слияния” (5.24) поля $\psi_{(1,2)}$ и $\psi_{(2,1)}$ действуют как “операторы сдвига”:

$$\psi_{(1,2)} \psi_{(n,m)} = [\psi_{(n,m-1)}] + [\psi_{(n,m+1)}], \quad (6.3a)$$

$$\psi_{(2,1)} \psi_{(n,m)} = [\psi_{(n-1,m)}] + [\psi_{(n+1,m)}]. \quad (6.3b)$$

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Используя формально правила (6.3), можно было бы в результате получить все поля с размерностями $\Delta_{(n,m)}$, заданными согласно (5.9), где целые числа n, m принимают как положительные, так нулевое и отрицательные значения. На самом деле поля с размерностями $\Delta_{(n,m)}$ с нулевыми и отрицательными n, m выпадают из операторной алгебры, возникающей при “слиянии” полей $\psi_{(1,2)}$ и $\psi_{(2,1)}$. Оказывается, что поле $\psi_{(2,1)}$ содержит лишь вырожденные поля $\psi_{(n,m)}$ ($n, m > 0$). Чтобы понять природу этого явления, рассмотрим, например, произведение $\psi_{(1,2)} \psi_{(2,1)}$. Используя дифференциальное уравнение для вырожденного поля $\psi_{(1,2)}$, мы получаем, согласно (6.3a) соотношение

$$\psi_{(1,2)} \cdot \psi_{(2,1)} = C_1 [\phi_{(2,0)}] + C_2 [\Psi_{(2,2)}], \quad (6.4)$$

где $\phi_{(2,0)}$ обозначает примарное поле размерности

$$\Delta_{(2,0)} = \Delta_0 + (\alpha_+)^2.$$

В (6.4) мы явным образом записали числовые коэффициенты C_1 и C_2 в операторном разложении при соответствующих примарных полях. В приведенных выше символических формулах (6.1)–(6.3) такие коэффициенты опускались. С другой стороны, поскольку поле $\psi_{(2,1)}$ также вырождено, оно удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.17), которое приводит к разложению

$$\psi_{(1,2)} \cdot \psi_{(2,1)} = C'_1 [\phi_{(0,2)}] + C'_2 [\Psi_{(2,2)}], \quad (6.5)$$

где поле $\phi_{(0,2)}$ имеет размерность

$$\Delta_{(0,2)} = \Delta_0 + (\alpha_-)^2$$

и C'_1, C'_2 — некоторые числовые коэффициенты. Сравнение этой формулы с (6.4) приводит к равенствам $C_1 = C'_1 = 0$ и $C_2 = C'_2$. Поэтому разложение произведения $\psi_{(1,2)} \psi_{(2,1)}$ содержит лишь вклад от конформного блока

$$\psi_{(1,2)} \psi_{(2,1)} = [\psi_{(2,2)}]. \quad (6.6)$$

Мы будем называть описанное явление *редукцией* операторной алгебры¹⁸⁾. Можно показать, что для вырожденных полей $\psi_{(n,m)}$ это — общая ситуация: вырожденные конформные блоки $[\psi_{(n,m)}]$ с $n, m > 0$ действительно появляются лишь в “правилах слияния” типа (6.3). Общие “правила слияния” для вырожденных полей имеют вид¹⁹⁾

$$\psi_{(n_1, m_1)} \psi_{(n_2, m_2)} = \sum_{k=|n_1 - n_2| + 1}^{n_1 + n_2 - 1} \sum_{l=|m_1 - m_2| + 1}^{m_1 + m_2 - 1} [\psi_{(k, l)}], \quad (6.7)$$

где переменная k (l) пробегает четные значения, если $n_1 + n_2$ ($m_1 + m_2$) является нечетной величиной, и наоборот.

Таким образом, вырожденные поля (точнее — вырожденные конформные блоки) образуют замкнутую операторную алгебру. Этот факт приводит к идее о конформной квантовой теории, в которой все примарные поля вырождены. Чтобы изучить эту возможность, рассмотрим еще раз формулу Каца (5.9). Ясно, что имеется три различных области параметра c . Если $c \geq 25$, то второй член в (5.9) отрицателен и размерности $\Delta_{(n,m)}$ становятся отрицательными для достаточно больших n и m . Если $25 > c > 1$, то размерности $\Delta_{(n,m)}$ являются, вообще говоря, комплексными. Эта ситуация неприемлема в квантовой теории поля²⁰⁾. Поэтому далее мы будем рассматривать область

$$0 < c \leq 1. \quad (6.8)$$

Чтобы лучше понять свойства спектра (5.9), рассмотрим “диаграмму размерностей”, показанную на рис. 1. Вертикальная и горизонтальная оси на этом рисунке соответствуют значениям параметров n и m

¹⁸⁾ Интересно понять связь явления редукции со свойствами монодромии дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют корреляционные функции. Эта проблема легче всего может быть исследована для четырехточечных дифференциальных уравнений. Если все включенные поля вырождены, то оказывается, что пространство решений дифференциальных уравнений содержит подпространство, инвариантное относительно преобразований монодромии. Решения, принадлежащие этому подпространству, соответствуют вырожденным полям $\psi_{(k,l)}$ ($k, l > 0$) в (6.7) и дают вклад в корреляционную функцию.

¹⁹⁾ “Правило слияния” (6.7) может быть получено из следующей формулы

$$\psi_{(n,m)} = (\Psi_{(1,2)})^{m-1} (\Psi_{(2,1)})^{n-1}$$

для вырожденных полей $\psi_{(n,m)}$. Хотя эта формула едва ли имеет точный математический смысл, ее можно использовать для вывода (6.7), предполагая ассоциативность и принимая во внимание явление редукции.

²⁰⁾ Чтобы избежать непонимания, подчеркнем, что это утверждение не означает исключения возможности существования квантовой теории поля с $c > 1$, но закрывает возможность включения в операторную алгебру вырожденных полей.

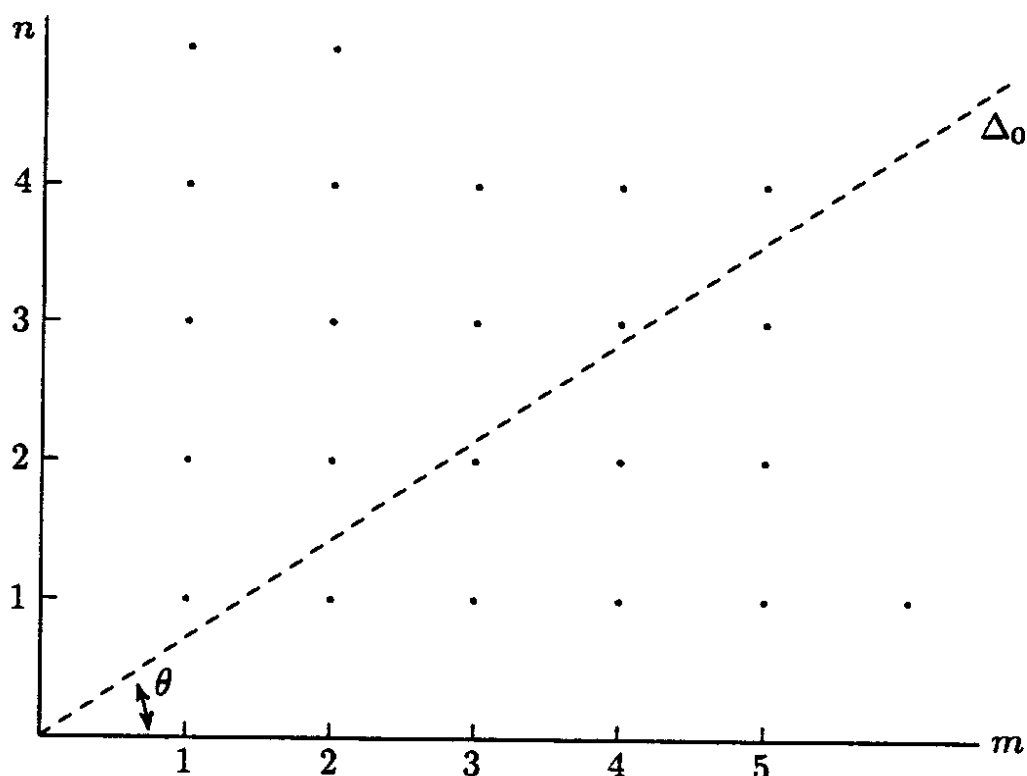


Рис. 1. "Диаграмма размерностей". С каждой точкой на плоскости связана размерность $\Delta = \Delta_0 + \frac{1}{4} \alpha^2$, причем α пропорционально расстоянию между точкой и пунктирной линией. Точки с координатами (n, m) соответствуют размерности $\Delta_{(n,m)}$, описанной формулой Каца (5.9)

в (5.9). "Физические" (т.е. положительные целые) значения этих параметров изображены точками. Пунктирная линия имеет следующий наклон:

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{\alpha_+}{\alpha_-} = \frac{\sqrt{25-c} - \sqrt{1-c}}{\sqrt{25-c} + \sqrt{1-c}}. \quad (6.9)$$

Каждой точке плоскости на рис. 1 соответствует величина размерности (5.22), причем параметр α пропорционален расстоянию между точкой и пунктирной линией.

Если наклон (6.9) принимает произвольное иррациональное значение, то пунктирная линия на рис. 1 проходит на сколь угодно близком расстоянии от некоторой из точек. Так как при $c < 1$ Δ_0 отрицательно, то мы снова сталкиваемся с проблемой отрицательных размерностей. Рассмотрим, однако, случаи с рациональным наклоном

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{\alpha_-}{\alpha_+} = \frac{p}{q}, \quad (6.10)$$

где p и q — положительные целые числа. Характерное свойство соответствующих значений состоит в том, что каждое вырожденное представление $V_{\Delta_{(n,m)}}$ содержит не один, а бесконечно много нулевых векторов разной размерности. Это очевидно из (5.9) и (6.10). В этих случаях неприводимые конформные блоки $[\psi_{n,m}]$, полученные путем обнуления всех нулевых полей, содержат гораздо меньшее количество

полей, чем обычные блоки, и мы называем конформные квантовые теории поля, соответствующие (6.10) и включающие эти вырожденные поля $\psi_{(n,m)}$, минимальными теориями. Важно, что в минимальных теориях корреляционные функции удовлетворяют бесконечному числу дифференциальных уравнений, полученных обнулением всех соответствующих нулевых полей²¹⁾. Этот факт позволяет доказать, что операторная алгебра вырожденных полей в минимальных теориях обладает не только свойством “редукции снизу”, описанным в начале этого пункта, но также и свойством “редукции сверху”. А именно, если начинать с полей $\psi_{(n,m)}$ с $0 < n < p$, $0 < m < q$, то вырожденные поля с $n \geq p$ или $m \geq q$ выпадают из “правила слияния” (6.7) (аналогично полям $\phi_{(2,0)}$ и $\phi_{(0,2)}$ в (6.4), (6.5)). Иными словами, конформные блоки $[\psi_{(n,m)}]$ с $0 < n < p$, $0 < m < q$ образуют замкнутую алгебру, которая может интерпретироваться как операторная алгебра в квантовой теории поля. Заметим, что (при условии (6.10)) $n = p$, $m = q$ есть координаты ближайшей точки на рис. 1, через которую

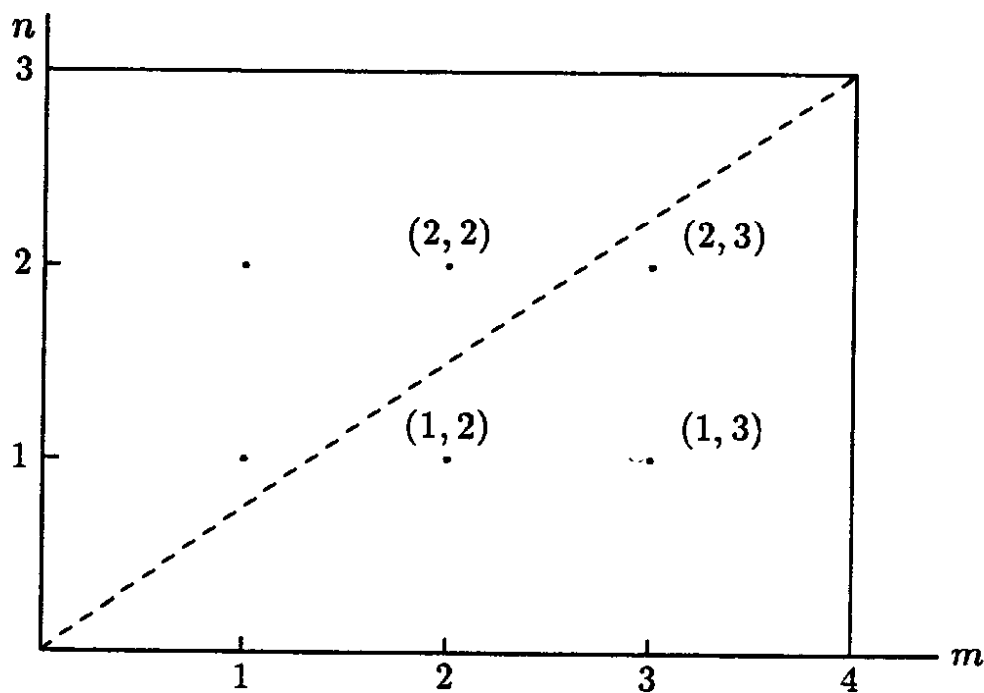


Рис. 2. Диаграмма размерностей, соответствующая случаю $\operatorname{tg} \theta = 3/4$ ($c = 1/2$). Вырожденные конформные блоки, связанные с точками внутри прямоугольника, образуют замкнутую операторную алгебру

проходит пунктирная линия. Вырожденные поля с размерностями, связанными с точками внутри прямоугольника $0 < n < p$, $0 < m < q$, показанного на рис. 2 и рис. 3, образуют замкнутую операторную

²¹⁾ На самом деле эти дифференциальные уравнения не являются независимыми, они следуют из двух “базисных” уравнений.

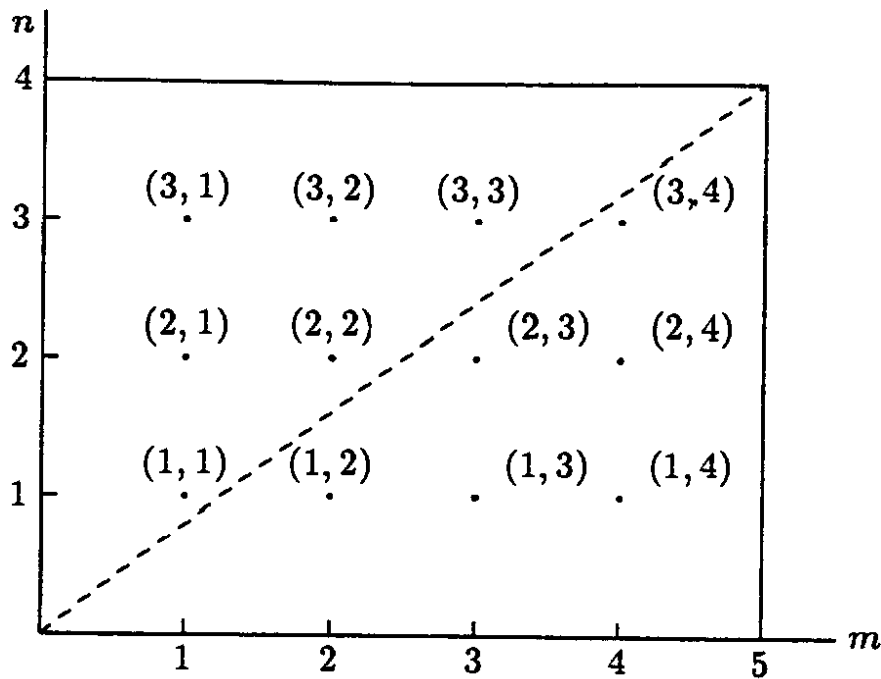


Рис. 3. Диаграмма размерностей для случая $\operatorname{tg} \theta = 4/5$ ($c = 7/10$)

алгебру. Вследствие диагональной симметрии этого прямоугольника имеем $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$ разных размерностей.

Рассмотрим подробнее простейший нетривиальный пример минимальной теории, соответствующей случаю

$$p/q = \frac{3}{4}, \quad (6.11)$$

который имеет место, когда

$$c = \frac{1}{2}. \quad (6.12)$$

“Диаграмма размерностей” для этого случая изображена на рис. 2. Продемонстрируем “редукцию сверху”, используя этот пример. Размерности, соответствующие точкам на рис. 2, равны

$$\begin{aligned} \Delta_{(1,1)} &= \Delta_{(2,3)} = 0, \\ \Delta_{(2,1)} &= \Delta_{(1,3)} = \frac{1}{2}, \\ \Delta_{(1,2)} &= \Delta_{(2,2)} = \frac{1}{16}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Соответственно, имеется три вырожденных поля²²⁾, которые мы обо-

²²⁾ Конечно, анализ размерностей (6.13) не доказывает, что операторная алгебра содержит лишь три примарных поля. Чтобы выяснить структуру полей, составляющих операторную алгебру, следует принять во внимание зависимость от \bar{z} и локальные свойства полей. Для рассматриваемой модели это сделано в приложении Е.

значим следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \psi_{(1,1)} = \psi_{(2,3)}, \\ \varepsilon &= \psi_{(2,1)} = \psi_{(1,3)}, \\ \sigma &= \psi_{(1,2)} = \psi_{(2,2)}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Рассмотрим, например, произведение $\varepsilon \cdot \varepsilon$. Поле ε , совпадающее с $\psi_{(2,1)}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка (5.17). Поэтому при помощи (6.36) мы получаем

$$\varepsilon \cdot \varepsilon = \psi_{(2,1)} \psi_{(2,1)} = c_1 [I] + c_2 [\Psi_{(3,1)}], \quad (6.15)$$

где поле $\psi_{(3,1)}$ имеет размерность

$$\Delta_{(3,1)} = \frac{5}{3}.$$

С другой стороны, так как

$$\varepsilon = \psi_{(1,3)},$$

это поле удовлетворяет дифференциальному уравнению третьего порядка (D.8) и, следовательно,

$$\varepsilon \cdot \varepsilon = \psi_{(1,3)} \psi_{(1,3)} = c'_1 [I] + c'_2 [\psi_{(1,3)}] + c'_3 [\psi_{(1,5)}], \quad (6.16)$$

где поле $\psi_{(1,5)}$ имеет размерность

$$\Delta_{(1,5)} = \frac{5}{2}.$$

Сравнивая (6.16) и (6.15), мы заключаем, что на самом деле

$$\varepsilon \cdot \varepsilon = [I]. \quad (6.17)$$

При помощи аналогичного рассмотрения могут быть получены следующие “правила слияния” для поля (6.14):

$$\begin{aligned} I \cdot \varepsilon &= [\varepsilon], & \varepsilon \cdot \varepsilon &= [I], \\ I \cdot \sigma &= [\sigma], & \varepsilon \cdot \sigma &= [\sigma], \\ I \cdot I &= [I], & \sigma \cdot \sigma &= [I] + [\varepsilon]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

В приложении Е показано, что эта минимальная теория описывает критическую точку двумерной модели Изинга, причем примарные поля σ , ε и I отождествляются с локальными операторами спина, плотности энергии и единиц, соответственно.

На рис. 3. “диаграммы размерностей” для минимальной теории, определяемой значениями

$$p/q = \frac{4}{5}, \quad c = \frac{7}{10} \quad (6.19)$$

представлен другой пример. Соответствующие численные значения

размерностей таковы:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{(1,1)} &= \Delta_{(3,4)} = 0, \\
 \Delta_{(1,2)} &= \Delta_{(3,3)} = \frac{1}{10} \\
 \Delta_{(1,3)} &= \Delta_{(3,2)} = \frac{3}{5} \\
 \Delta_{(1,4)} &= \Delta_{(3,1)} = \frac{3}{2} \\
 \Delta_{(2,2)} &= \Delta_{(2,3)} = \frac{3}{80}, \\
 \Delta_{(2,4)} &= \Delta_{(2,1)} = \frac{7}{16}.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Заметим, что вследствие неравенств (6.8) целые числа p и q ограничены неравенством

$$\frac{2}{3} < \frac{p}{q} < 1. \tag{6.21}$$

Тем не менее имеется бесконечно много рациональных чисел, удовлетворяющих (6.21), каждое из которых соответствует некоторой минимальной модели конформной квантовой теории поля. Мы полагаем, что минимальные теории описывают фазовые переходы второго рода в двумерных системах с дискретной группой симметрии²³). Во всяком случае представляется, что любая из минимальных моделей должна быть подвергнута детальному изучению. Заметим, что аномальные размерности, связанные с каждой из минимальных моделей, известны точно (они задаются формулой Каца (5.9)), в то время как корреляционные функции могут быть вычислены следующим образом. В первую очередь следует получить соответствующие конформные блоки как решения соответствующих дифференциальных уравнений с подходящими начальными условиями. Затем, подставляя эти конформные блоки в бутстрапные уравнения (4.18) и принимая во внимание локальные свойства полей, следует вычислить структурные константы $C_{n,m}^i$ операторной алгебры, которые дают достаточно информации для построения корреляционных функций. Для минимальной теории (6.11) это вычисление приведено в приложении Е. В общем случае эта задача не решена.

²³) В. Доценко заметил, что спектр размерностей, связанный с минимальной моделью

$$p/q = \frac{5}{6}, \quad c = \frac{4}{5}$$

содержит некоторые размерности, характерные для трехпозиционной модели Поттса.

Мы благодарны Б. Фейгину за многочисленные консультации по представлениям алгебры Вирасоро и А.А. Мигдалу за полезные обсуждения. Двое из нас (А.Б. и А.З.) очень признательны Д. Макагоненко и А.А. Ансельму за гостеприимный прием в Научном Центре в Комарово в январе 1983 г., где была выполнена эта работа.

Приложение А

Пусть L_{-1} , L_0 , L_{+1} и \bar{L}_{-1} , \bar{L}_0 , \bar{L}_{+1} — генераторы бесконечно малых проективных преобразований

$$\begin{aligned} z &\rightarrow z + \epsilon_{-1} + \epsilon_0 z + \epsilon_1 z^2, \\ \bar{z} &\rightarrow \bar{z} + \bar{\epsilon}_{-1} + \bar{\epsilon}_0 \bar{z} + \bar{\epsilon}_1 \bar{z}^2, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

где ϵ и $\bar{\epsilon}$ — бесконечно малые параметры. Операторы L_s , $s = 0, \pm 1$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [L_0, L_{\pm 1}] &= \pm L_{\pm 1}, \\ [L_1, L_{-1}] &= 2 L_0. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Аналогичные соотношения имеют место для \bar{L} , причем L и \bar{L} взаимно коммутируют. Операторы

$$P^0 = L_{-1} + \bar{L}_{-1} \quad \text{и} \quad P^1 = -i(L_{-1} - \bar{L}_{-1})$$

являются компонентами полного импульса, тогда как

$$M = i(L_0 - \bar{L}_0) \quad \text{и} \quad D = L_0 + \bar{L}_0$$

являются генераторами вращений (лоренцевы бусты в пространстве-времени Минковского) и растяжений соответственно. Операторы L_1 и \bar{L}_1 соответствуют специальным конформным преобразованиям. Вакуум в конформной квантовой теории поля удовлетворяет соотношениям

$$\langle 0 | L_s = L_s | 0 \rangle = 0 \quad s = 0, \pm 1, \quad (\text{A.3})$$

которые эквивалентны асимптотическому условию (2.14).

Мы назовем локальное поле $O_l(z, \bar{z})$ *квазипримарным*, если оно удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [L_s, O_l(z, \bar{z})] &= \left[z^{s+1} \frac{\partial}{\partial z} + (s+1) \Delta_l z^s \right] O_l(z, \bar{z}), \\ [\bar{L}_s, O_l(z, \bar{z})] &= \left[\bar{z}^{s+1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + (s+1) \bar{\Delta}_l \bar{z}^s \right] O_l(z, \bar{z}), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

где $s = 0, \pm 1$. Константы Δ_l и $\bar{\Delta}_l$ — размерности поля O_l . Эти соотношения означают, что при проективных преобразованиях (1.15) поле $O_l(z, \bar{z})$ преобразуется согласно формуле (1.16). Это отличает его от примарных полей ϕ_n , которые преобразуются согласно (1.16) при

всех конформных преобразованиях (1.9)²⁴). В конформной квантовой теории поля полный набор локальных полей A_j , образующих алгебру (1.6), может быть составлен из бесконечного числа квазипримарных полей и их координатных производных всех порядков:

$$\{A_j\} = \left\{ O_l, \frac{\partial}{\partial z} O_l, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} O_l, \frac{\partial^2}{\partial z^2} O_l, \dots \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Рассмотрим N -точечную корреляционную функцию квазипримарных полей. Из (A.3) и (A.4) следует, что эта корреляционная функция удовлетворяет уравнениям

$$\hat{\Lambda}_s \langle O_{l_1}(z_1, \bar{z}_1) \dots O_{l_N}(z_N, \bar{z}_N) \rangle = 0, \quad (\text{A.6})$$

где $s = 0, \pm 1$ и $\hat{\Lambda}_s$ являются следующими дифференциальными операторами:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_{-1} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial z_i}, & \hat{\Lambda}_0 &= \sum_{i=1}^N \left(z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \Delta_i \right), \\ \hat{\Lambda}_1 &= \sum_{i=1}^N \left(z_i^2 \frac{\partial}{\partial z_i} + 2z_i \Delta_i \right), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ размерности полей O_{l_1}, \dots, O_{l_N} , соответственно. Уравнения (A.6) являются проективными тождествами Уорда. Заметим, что эти тождества Уорда непосредственно вытекают из общего соотношения (2.9). Для бесконечно малых проективных преобразований функция $\varepsilon(z)$ является регулярной в конечной части z -плоскости и, благодаря асимптотическому условию (2.14), контурный интеграл в (2.9) равен нулю. Подчеркнем, что для общих конформных преобразований аналитическая функция $\varepsilon(z)$ имеет особенности. Поэтому соответствующие тождества Уорда не могут быть сведены к замкнутым уравнениям для корреляционных функций вида (A.6). Общее решение уравнений (A.6) (и аналогичных уравнений, полученных при помощи подстановки $z_i \rightarrow \bar{z}_i$, $\Delta_i \rightarrow \bar{\Delta}_i$) имеет вид

$$\langle O_{l_1}(z_1, \bar{z}_1) \dots O_{l_N}(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\gamma_{ij}} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^{\bar{\gamma}_{ij}} Y(x_{ij}^{kl}, \bar{x}_{ij}^{kl}), \quad (\text{A.8})$$

где γ_{ij} и $\bar{\gamma}_{ij}$ произвольные решения уравнений

$$\sum_{j \neq i} \gamma_{ij} = 2 \Delta_i, \quad \sum_{j \neq i} \bar{\gamma}_{ij} = 2 \bar{\Delta}_i, \quad (\text{A.9})$$

²⁴) Очевидно, что любое примарное поле является квазипримарным, в то время как имеется бесконечно много квазипримарных полей, являющихся вторичными.

и Y является произвольной функцией от $2(N-3)$ ангармонических дробей

$$x_{ij}^{kl} = \frac{(z_i - z_j)(z_k - z_l)}{(z_i - z_l)(z_k - z_j)}, \quad \bar{x}_{ij}^{kl} = \frac{(\bar{z}_i - \bar{z}_j)(\bar{z}_k - \bar{z}_l)}{(\bar{z}_i - \bar{z}_l)(\bar{z}_k - \bar{z}_j)}. \quad (\text{A.10})$$

В частном случае $N=2$ и $N=3$ корреляционные функции определяются полностью по формулам (A.8)–(A.10) с точностью до числового множителя. А именно

$$\begin{aligned} \langle O_{l_1}(z_1, \bar{z}_1) O_{l_2}(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } \Delta_{l_1} \neq \Delta_{l_2} \\ & \text{или } \bar{\Delta}_{l_1} \neq \bar{\Delta}_{l_2}, \\ (z_1 - z_2)^{-2\Delta_{l_1}} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{-2\bar{\Delta}_{l_1}} D_{l_1}, & \text{если } \Delta_{l_1} = \Delta_{l_2} \\ & \text{и } \bar{\Delta}_{l_1} = \bar{\Delta}_{l_2} \end{cases} \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

для $N=2$ и

$$\begin{aligned} \langle O_{l_1}(z_1, \bar{z}_1) O_{l_2}(z_2, \bar{z}_2) O_{l_3}(z_3, \bar{z}_3) \rangle = \\ = Y_{l_1 l_2 l_3} \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{-\Delta_{ij}} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^{-\bar{\Delta}_{ij}}, \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

для $N=3$, где D_l и $Y_{l_1 l_2 l_3}$ — константы и

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 \quad \text{и т.д.} \\ \bar{\Delta}_{12} &= \bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2 - \bar{\Delta}_3 \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Заметим, что функции (A.11) и (A.12) однозначны в евклидовом пространстве (получаемом путем подстановки $\bar{z} = z_i^*$) при условии, что спины всех рассматриваемых полей $S_l = \Delta_l - \bar{\Delta}_l$ принимают целые или полуцелые значения.

В конформной квантовой теории поля разложение (1.6) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} O_{l_1}(z, \bar{z}) O_{l_2}(0, 0) = \\ = \sum_{l_3} \sum_{k, \bar{k}=0}^{\infty} Y_{l_1 l_2}^{l_3, k, \bar{k}} z^{\Delta_3 + k - \Delta_1 - \Delta_2} \bar{z}^{\bar{\Delta}_3 + \bar{k} - \bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2} \times \\ \times \left[\frac{\partial^{k+\bar{k}}}{\partial \zeta^k \partial \bar{\zeta}^{\bar{k}}} O_{l_3}(\zeta, \bar{\zeta}) \right]_{\zeta, \bar{\zeta}=0}, \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

где $Y_{l_1 l_2}^{l_3, k, \bar{k}}$ константы, k и \bar{k} — целые числа. Свойства преобразования обеих частей этого уравнения относительно проективных преобразований (A.1) должны совпадать. Коммутируя обе части (A.14) с проективными операторами L_s , $s = 0, \pm 1$ и используя (A.4), мы получаем уравнение, связывающее коэффициенты $Y_{l_1 l_2}^{l_3, k, \bar{k}}$ с различными

ми значениями k . Решая эти уравнения, можно переписать (A.14) как

$$O_l(z, \bar{z}) O_l(0, 0) = \sum_{l'} G_{ll'}^{\prime\prime} z^{\Delta' - 2\Delta} \bar{z}^{\bar{\Delta}' - 2\bar{\Delta}} \times \\ \times F\left(\Delta', 2\Delta', z \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) F\left(\bar{\Delta}', 2\bar{\Delta}', \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\right) O_l(\zeta, \bar{\zeta})|_{\zeta, \bar{\zeta}=0}, \quad (\text{A.15})$$

где для простоты рассматривается случай $l_1 = l_2$: $\Delta_{l_1} = \Delta_{l_2} = \Delta$, $\Delta_{l'} = \Delta'$. В (A.15) $G_{ll'}^{\prime\prime}$ являются константами, совпадающими с $Y_{ll'}^{\prime\prime, 0, 0}$ в (A.14), и $F(a, c, x)$ обозначает вырожденную гипергеометрическую функцию.

Очевидно, что каждый конформный блок $[\phi_n] = V_n \times \bar{V}_n$ (см. пункт 3) содержит бесконечно много квазипримарных полей. Эти поля соответствуют состояниям, удовлетворяющим уравнениям

$$L_1 |l\rangle = \bar{L}_1 |l\rangle = 0, \\ L_0 |l\rangle = \Delta_l |l\rangle, \quad \bar{L}_0 |l\rangle = \bar{\Delta}_l |l\rangle. \quad (\text{A.16})$$

Можно показать, что базис в $[\phi_n]$ может быть составлен из состояний

$$(L_{-1})^n (\bar{L}_{-1})^{\bar{n}} |l\rangle, \quad (\text{A.17})$$

где $n, \bar{n} = 0, 1, 2, \dots$ и $|l\rangle$ являются квазипримарными состояниями, принадлежащими $[\phi_n]$. Это утверждение эквивалентно (A.5), так как операторы L_{-1} и \bar{L}_{-1} связаны с производными $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial \bar{z}$.

Приложение В

Здесь мы продемонстрируем тот факт, что коэффициенты $\beta_{nm}^{l\{k\}}$ в (4.2) полностью определяются требованием конформной симметрии разложения (4.1), рассматривая для простоты частный случай $\Delta_n = \Delta_m = \Delta$. Применяя обе части (4.1) к вакуумному состоянию, получаем уравнение

$$\phi_\Delta(z, \bar{z}) |\Delta\rangle = \sum_l C_{\Delta\Delta}^{\Delta_l} z^{\Delta_l - 2\Delta} \bar{z}^{\bar{\Delta}_l - 2\bar{\Delta}} \varphi_\Delta(z) \bar{\varphi}_\Delta(\bar{z}) |\Delta_l\rangle, \quad (\text{B.1})$$

где $|\Delta\rangle$ является примарным состоянием размерностей $\Delta, \bar{\Delta}$ и оператор $\varphi_\Delta(z)$ задается рядом

$$\varphi_\Delta(z) = \sum_{\{k\}} z^{\sum k_i} \beta_{\Delta\Delta}^{\Delta_l, \{k\}} L_{-k_1} \dots L_{-k_N}. \quad (\text{B.2})$$

Аналогичная формула с подстановками $z \rightarrow \bar{z}, \beta \rightarrow \bar{\beta}, L \rightarrow \bar{L}$ имеет место для $\bar{\varphi}_\Delta(\bar{z})$. Рассмотрим состояние

$$|z, \Delta'\rangle = \varphi_\Delta(z) |\Delta'\rangle. \quad (\text{B.3})$$

Это состояние может быть представлено как степенной ряд

$$|z, \Delta'\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} z^N |N, \Delta'\rangle, \quad (\text{B.4})$$

где векторы $|N, \Delta'\rangle$ удовлетворяют уравнениям

$$L_0 |N, \Delta'\rangle = (\Delta_l + N) |N, \Delta'\rangle. \quad (\text{B.5})$$

Чтобы вычислить эти векторы, применим операторы L_n к обеим частям (B.1). Это приводит к уравнениям

$$\left[z^{n+1} \frac{d}{dz} + \Delta(n+1) z^n \right] |z, \Delta'\rangle = L_n |z, \Delta'\rangle. \quad (\text{B.6})$$

Подставляя сюда степенной ряд (B.4), получаем

$$L_n |N+n, \Delta'\rangle = [N + (n-1)\Delta + \Delta'] |N, \Delta'\rangle. \quad (\text{B.7})$$

На самом деле можно рассматривать уравнения (B.7) лишь с $n = 1, 2$, так как вследствие (2.21) остающиеся уравнения вытекают из этих двух. Решая эти уравнения, можно найти степень за степенью степенной ряд (B.4). В первых трех степенях результат имеет вид

$$\begin{aligned} |z, \Delta'\rangle = & \left[1 + \frac{1}{2} z L_{-1} + \right. \\ & + \frac{1}{4} z^2 \frac{\Delta' + 1}{2\Delta' + 1} L_{-1}^2 + z^2 \frac{\Delta'(\Delta' - 1) + 2\Delta(2\Delta' + 1)}{c(2\Delta' + 1) + 2\Delta'(8\Delta' - 5)} \times \\ & \times \left(L_{-2} + \frac{3}{2(2\Delta' + 1)} L_{-1}^2 \right) + \dots \left. \right] |\Delta'\rangle. \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

Эта формула дает первые три коэффициента β в (B.2).

Очевидно, что конформный блок

$$\mathcal{F}(\Delta, \Delta', x) \equiv \mathcal{F}_{\Delta\Delta}^{\Delta\Delta}(\Delta' | x)$$

задается скалярным произведением

$$\mathcal{F}(\Delta, \Delta', x) = x^{\Delta' - 2\Delta} \langle 1, \Delta' | x, \Delta' \rangle. \quad (\text{B.9})$$

Несколько первых членов степенного разложения этой функции могут быть непосредственно получены из (B.8):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta, \Delta', x) = & x^{\Delta' - 2\Delta} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \Delta' x + \frac{\Delta'(\Delta' + 1)^2}{4(2\Delta' + 1)} x^2 + \right. \\ & + \frac{[\Delta'(1 - \Delta') - 2\Delta(2\Delta' + 1)]^2}{2(2\Delta' + 1)[c(2\Delta' + 1) + 2\Delta'(8\Delta' - 5)]} x^2 + \dots \left. \right\}. \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

Приложение С

Рассмотрим ассоциативную алгебру, заданную соотношениями

$$A_I A_J = \sum_K C_{IJ}^K A_K. \quad (C.1)$$

Уравнение (1.6) есть не что иное как (C.1), где каждый из индексов, например I , объединяет пространственные координаты ξ и индекс i , нумерующий поля. Пусть алгебра (C.1) снабжена симметричной билинейной формой

$$D_{IJ} = \langle A_I A_J \rangle, \quad (C.2)$$

которая на самом деле является множеством двухточечных корреляционных функций. Введем форму

$$C_{IJK} = \sum_{K'} D_{KK'} C_{IJ}^{K'} \quad (C.3)$$

и предположим, что она симметрична относительно индексов I, J, K . Очевидно, (C.3) совпадает с трехточечной корреляционной функцией

$$C_{IJK} = \langle A_I A_J A_K \rangle, \quad (C.4)$$

и удобно представляется при помощи “вершинной” диаграммы

$$C_{IJK} = \begin{array}{c} I \\ | \\ \diagup \quad \diagdown \\ K \quad J \end{array} \quad (C.5)$$

Введем также диаграмму

$$D^{IJ} = \begin{array}{c} I \quad \text{---} \quad J \end{array} \quad (C.6)$$

для “обратного пропагатора” D^{IJ} , определяемого уравнением

$$\sum_K D^{IK} D_{KJ} = \delta_J^I \quad (C.7)$$

Условие ассоциативности алгебры (C.1)

$$\sum_K C_{IJ}^K C_{KL}^M = \sum_K C_{IK}^M C_{JL}^K \quad (C.8)$$

может быть представлено диаграммным уравнением

$$\sum_K \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} K \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \sum_K \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \\ K \\ | \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad (C.9)$$

которое совпадает с условием “кроссинг-симметрии” для четырехточечных функций

$$\langle A_I A_J A_L A_M \rangle. \quad (\text{C.10})$$

Приложение D

В этом приложении мы выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет корреляционная функция

$$\langle \psi(z) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle, \quad (\text{D.1})$$

где $\psi(z)$ обозначает любое из вырожденных полей $\psi_{(1,3)}(z)$ и $\psi_{(3,1)}(z)$, в то время как $\phi_i(z)$ — произвольные примарные поля с размерностями Δ_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Прежде всего, заметим, что состояние

$$|\chi_3\rangle = \left[(\Delta + 2) L_{-3} - 2 L_{-1} L_{-2} + \frac{1}{(\Delta + 1)} L_{-1}^3 \right] |\Delta\rangle, \quad (\text{D.2})$$

(где $|\Delta\rangle$ — примарное состояние размерности Δ) является нуль-вектором (размерности $\Delta + 3$), при условии, что Δ принимает любое из значений $\Delta_{(1,3)}$ или $\Delta_{(3,1)}$, то есть

$$\Delta = \frac{1}{6} [7 - c \pm \sqrt{(1 - c)(25 - c)}]. \quad (\text{D.3})$$

Эквивалентное утверждение заключается в том, что оператор

$$\chi_{\Delta+3}(z) = (\Delta + 2) \psi^{(-3)}(z) - 2 \frac{\partial}{\partial z} \psi^{(-2)}(z) + \frac{1}{\Delta + 1} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \psi(z) \quad (\text{D.4})$$

является нулевым полем размерности $\Delta + 3$. В (D.4) имеются вторичные поля от примарных полей $\psi(z)$ ($= \psi_{(1,3)}$ или $\psi_{(3,1)}$) и Δ задается согласно (D.3). Дифференциальное уравнение для корреляционной функции (D.1) вытекает из условия

$$\chi_{\Delta+3} = 0. \quad (\text{D.5})$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \langle \psi^{(-2)}(z) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle = \\ & = \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\Delta_i}{(z - z_i)^2} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{z - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right\} \langle \psi(z) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} & \langle \psi^{(-3)}(z) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle = \\ & = - \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{2\Delta_i}{(z - z_i)^3} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{(z - z_i)^2} \frac{\partial}{\partial z_i} \right\} \langle \psi(z) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Подставляя (D.4) в (D.5) и принимая во внимание (D.6) и (D.7), получаем дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\left\{ \frac{1}{\Delta + 1} \frac{\partial^3}{\partial z^3} - \sum_{i=1}^N \frac{2\Delta\Delta_i}{(z - z_i)^3} - \sum_{i=1}^N \frac{\Delta}{(z - z_i)^2} \frac{\partial}{\partial z_i} - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^N \frac{2\Delta_i}{(z - z_i)^2} \frac{\partial}{\partial z} - \sum_{i=1}^N \frac{2}{z - z_i} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z_i} \right\} \langle \psi(z) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle = 0. \quad (D.8)$$

В частном случае $N = 3$ производные могут быть исключены при помощи проективных тождеств Уорда (A.7). Простые вычисления приводят к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\left\{ \frac{1}{\Delta + 1} \frac{d^3}{dz^3} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{z - z_i} \frac{d^2}{dz^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{\Delta - 2\Delta_i}{(z - z_i)^2} \frac{d}{dz} - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^3 \frac{2\Delta\Delta_i}{(z - z_i)^3} + \sum_{i < j}^3 \frac{2\Delta + 2 + \Delta_{ij}}{(z - z_i)(z - z_j)} + \right. \\ \left. + \sum_{i < j}^3 \frac{\Delta + \Delta_{ij}}{(z - z_i)(z - z_j)} \left(\frac{1}{(z - z_i)} + \frac{1}{(z - z_j)} \right) \right\} \times \\ \times \langle \psi(z) \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) \rangle = 0, \quad (D.9)$$

где

$$\Delta_{12} = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 \quad \text{и т.д.}$$

Приложение Е

Как хорошо известно (см., например, [15] и ссылки там), двумерная модель Изинга эквивалентна теории майорановских фермионов. В непрерывном пределе эта теория описывается лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \psi \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial z} \psi + m \bar{\psi} \psi, \quad (E.1)$$

где m — массовый параметр, пропорциональный $T - T_c$ и $(\psi, \bar{\psi})$ — двухкомпонентное майорановское поле²⁵⁾. Далее мы рассматриваем эту модель лишь в критической точке, где поле безмассовое:

$$m = 0. \quad (E.2)$$

²⁵⁾ Поле $\bar{\psi}$ представляет собой независимый компонент и в общем случае не является комплексно сопряженной величиной к полю ψ .

Согласно (Е.1) в этом случае поля ψ , $\bar{\psi}$ удовлетворяют уравнениям движения

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \bar{\psi} = 0, \quad (\text{Е.3})$$

и потому эти поля являются аналитическими функциями переменных z и \bar{z} , соответственно. Мы будем писать

$$\psi = \psi(z), \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}(\bar{z}). \quad (\text{Е.4})$$

Тензор энергии-импульса, соответствующий этой теории может быть вычислен непосредственно. В случае (Е.2) он имеет нулевой след и компоненты (2.5) задаются формулами

$$T(z) = -\frac{1}{2} : \psi(z) \frac{\partial}{\partial z} \psi(z) :, \quad \bar{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{2} : \bar{\psi}(\bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{\psi}(\bar{z}) :. \quad (\text{Е.5})$$

Легко проверить, что поля (Е.5) удовлетворяют алгебре Вирасоро (2.21) с центральным зарядом

$$c = \frac{1}{2}. \quad (\text{Е.6})$$

Фундаментальные поля ψ и $\bar{\psi}$ удовлетворяют соотношениям (1.16), т.е. эти поля примарны. Размерности поля $\psi(z)$ ($\bar{\psi}(\bar{z})$) равны $\Delta = \frac{1}{2}$, $\bar{\Delta} = 0$ ($\Delta = 0$, $\bar{\Delta} = \frac{1}{2}$). Можно показать, что четыре конформных блока $[I]$, $[\psi]$, $[\bar{\psi}]$, $[:\psi\psi:]$ составляют полный набор полей $\{A_j\}$, образующих операторную алгебру (1.6).

Возьмем, например, поле $\psi(z)$. Оказывается, что это примарное поле совпадает с вырожденным полем $\psi_{(2,1)}(z)$ (см. (6.13)). Действительно, операторное разложение произведения $T(\zeta) \psi(z)$ (которое легко вычисляется, если имеет место (Е.5)) задается (с точностью до первых трех членов) формулой

$$T(\zeta) \psi(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{(\zeta - z)^2} \psi(z) + \frac{1}{\zeta - z} \frac{\partial}{\partial z} \psi(z) + \frac{3}{4} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(z) + O(\zeta - z), \quad (\text{Е.7})$$

которая показывает, что вторичное поле (5.2) исчезает. Поэтому корреляционные функции, включающие вырожденное поле $\psi(z)$, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\left\{ \frac{3}{4} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sum_{i=1}^N \frac{\Delta_i}{(z - z_i)^2} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{z - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right\} \langle \psi(z) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle = 0, \quad (\text{Е.8})$$

где $\phi_i(z)$ — произвольные примарные поля (которые сами по себе локальны, но не обязательно локальны относительно $\psi(z)$). В частности, корреляционные функции

$$\langle \psi(z) \psi(z_1) \dots \psi(z_N) \rangle, \quad (\text{Е.9})$$

(которые могут быть вычислены при помощи правила Вика) удовлетворяют (Е.8).

С другой стороны, критическая модель Изинга может быть описана в терминах либо поля параметра порядка $\sigma(z, \bar{z})$, либо поля параметра беспорядка $\mu(z, \bar{z})$ ²⁶⁾. Очевидно, поля σ и μ примарны. Эти поля имеют нулевые спины, т.е. $\Delta_\sigma = \bar{\Delta}_\sigma$, $\Delta_\mu = \bar{\Delta}_\mu$, и, вследствие симметрии Краммерса–Ванье, имеют одинаковые скейлинговые размерности

$$\Delta_\sigma = \Delta_\mu = \Delta. \quad (\text{E.10})$$

Поля $\sigma(z, \bar{z})$ и $\mu(z, \bar{z})$ не являются локальными как относительно полей $\psi(z)$ и $\psi(\bar{z})$, так и относительно друг друга. В самом деле, корреляционная функция

$$\langle \psi(z) \sigma(\xi_1) \dots \sigma(\xi_{2N-1}) \mu(\xi_{2N}) \dots \mu(\xi_{2M}) \rangle \quad (\text{E.11})$$

является двузначной аналитической функцией переменной z , которая приобретает фазовый множитель (-1) после аналитического обхода вокруг любой из сингулярных точек $z_k = \xi_k^1 + i \xi_k^2$, $k = 1, \dots, 2M$. Из определения следует, что произведения $\psi(\zeta) \sigma(z, \bar{z})$ и $\psi(\zeta) \mu(z, \bar{z})$ можно разложить следующим образом

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) \sigma(z, \bar{z}) &= (\zeta - z)^{-1/2} \{ \mu(z, \bar{z}) + O(\zeta - z) \}, \\ \psi(\zeta) \mu(z, \bar{z}) &= (\zeta - z)^{-1/2} \{ \sigma(z, \bar{z}) + O(\zeta - z) \} \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Подставляя эти разложения в дифференциальное уравнение (E.8), получаем характеристическое уравнение, определяющее параметр Δ

$$\Delta = \frac{1}{16} \quad (\text{E.13})$$

в согласии с известным значением скейлинговой размерности спинного поля $d_\sigma = 2\Delta = \frac{1}{8}$ [15]. Таким образом, дифференциальное уравнение (E.8) вместе с качественными свойствами (E.12) операторной алгебры позволяет точно вычислить размерность поля $\sigma(z, \bar{z})$.

Теперь мы должны вычислить корреляционные функции полей порядка и беспорядка

$$\langle \sigma(\xi_1) \dots \sigma(\xi_{2N}) \mu(\xi_{2N+1}) \dots \mu(\xi_{2M}) \rangle. \quad (\text{E.14})$$

Заметим, что двузначная функция (E.11) может быть представлена как

$$\langle \psi(z) \sigma(\xi_1) \dots \mu(\xi_{2M}) \rangle = \prod_{i=1}^{2M} (z - z_i)^{-1/2} P(z | z_i, \bar{z}_i), \quad (\text{E.15})$$

где $P(z | z_i, \bar{z}_i)$ — полином по z :

$$P(z | z_i, \bar{z}_i) = \sum_{k=0}^{2M-1} (z - z_{2N})^k G_k(z_i, \bar{z}_i). \quad (\text{E.16})$$

²⁶⁾ Поля σ и μ являются скейлинговыми пределами решеточного спина $\sigma_{n,m}$ и дуального спина $\mu_{n+1/2, m+1/2}$, соответственно. Для детальных определений см. [15].

Порядок $2M - 1$ этого полинома определяется асимптотическим условием

$$\psi(z) \sim z^{-1}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (\text{E.17})$$

Коэффициенты G_k являются некоторыми функциями от $z_1, \dots, z_{2M}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{2M}$. Вследствие (E.12) коэффициент $G_0(z_i, \bar{z}_i)$ совпадает с корреляционной функцией (E.14). Подставляя (E.15) в дифференциальное уравнение (E.8), мы получаем дифференциальные уравнения для коэффициентов $G_k(z_i, \bar{z}_i)$, которые позволяют вычислить корреляционную функцию (E.14). На самом деле дифференциальные уравнения для корреляционных функций (E.14) могут быть получены более простым путем. Заметим, что из сравнения (E.13) с (6.13) видно, что поле $\sigma(z, \bar{z})$ является вырожденным полем $\psi_{(1,2)}$ относительно обеих переменных z и \bar{z} . Это же утверждение имеет место для поля $\mu(z, \bar{z})$. Поэтому корреляционные функции (E.14) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left\{ \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} - \sum_{i \neq j}^{2M} \frac{1/16}{(z_i - z_j)^2} - \sum_{j \neq i}^{2M} \frac{1}{z_i - z_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right\} \times \\ \times \langle \sigma(z_1, \bar{z}_1) \dots \sigma(z_{2N}, \bar{z}_{2N}) \mu(z_{2N+1}, \bar{z}_{2N+1}) \dots \mu(z_{2M}, \bar{z}_{2M}) \rangle = 0 \quad (\text{E.18})$$

(здесь $i = 1, 2, \dots, 2M$), а также дифференциальным уравнениям, полученным из (E.18) путем подстановки $z_i \rightarrow \bar{z}_i$.

Рассмотрим, например, четырехточечную корреляционную функцию

$$G(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \langle \sigma(\xi_1) \sigma(\xi_2) \sigma(\xi_3) \sigma(\xi_4) \rangle = \\ = [(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_4)]^{-1/8} Y(x, \bar{x}), \quad (\text{E.19})$$

где $Y(x, \bar{x})$ — некоторая функция ангармонических дробей

$$x = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}, \quad \bar{x} = \frac{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_4)} \quad (\text{E.20})$$

(мы приняли во внимание (A.8)). В этом случае дифференциальное уравнение (E.18) приводится к следующему виду:

$$\left\{ \frac{4}{3} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{16} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \frac{1}{x(x-1)} + \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right] \frac{d}{dx} \right\} Y(x, \bar{x}) = 0. \quad (\text{E.21})$$

Такое же уравнение имеет место относительно \bar{x} . Делая подстановку

$$Y(x, \bar{x}) = [x\bar{x}(1-x)(1-\bar{x})]^{-1/8} u(x, \bar{x}), \quad (\text{E.22})$$

мы получаем следующее уравнение:

$$\left\{ x(x-1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2} - x \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{16} \right\} u(x, \bar{x}) = 0. \quad (\text{E.23})$$

Замена переменных

$$x = \sin^2 \theta, \quad \bar{x} = \sin^2 \bar{\theta} \quad (\text{E.24})$$

приводит (E.23) к виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{4} \right) u(\theta, \bar{\theta}) = 0. \quad (\text{E.25})$$

Имеется также уравнение, полученное из (E.25) путем подстановки $\theta \rightarrow \bar{\theta}$. Поэтому общим решением этих дифференциальных уравнений будет

$$u(\theta, \bar{\theta}) = u_{11} \cos \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \bar{\theta} + u_{12} \cos \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} \bar{\theta} + \\ + u_{21} \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \bar{\theta} + u_{22} \sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} \bar{\theta}, \quad (\text{E.26})$$

где $u_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) — произвольные константы.

Заметим, что два независимых решения (E.21) совпадают с конформными блоками (см. (B.9))

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{16}, 0, x\right) = [x(1-x)]^{-1/8} \cos \frac{1}{2} \theta, \\ \mathcal{F}\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{2}, x\right) = [x(1-x)]^{-1/8} \sin \frac{1}{2} \theta, \quad (\text{E.27})$$

и потому формула (E.26) может рассматриваться как разложение (4.11), причем коэффициенты $u_{\alpha\beta}$ являются структурными константами.

Так как поле $\sigma(z, \bar{z})$ локально, то корреляционная функция (E.20) должна быть однозначной в евклидовой области

$$\bar{x} = x^*, \quad (\text{E.28})$$

где * обозначает комплексное сопряжение. Как видно из (E.24), аналитическое продолжение переменных x и \bar{x} вокруг сингулярных точек $x = \bar{x} = 0$ соответствует подстановке

$$\theta \rightarrow -\theta, \quad \bar{\theta} \rightarrow -\bar{\theta} \quad (\text{E.29})$$

Функция (E.26) инвариантна при этом преобразовании, если

$$u_{12} = u_{21} = 0. \quad (\text{E.30})$$

Аналогичное исследование сингулярной точки $x = \bar{x} = 1$ (или, что то же самое, наложение условия кроссинг-симметрии) приводит к соотношению

$$u_{11} = u_{22}. \quad (\text{E.31})$$

Общий множитель в (Е.26) зависит от нормировки σ -поля. Мы будем нормировать его так, что

$$\langle \sigma(z, \bar{z}) \sigma(0, 0) \rangle = [z \bar{z}]^{-1/8}. \quad (\text{Е.32})$$

Тогда

$$u(\theta, \bar{\theta}) = \cos \frac{1}{2} (\theta - \bar{\theta}). \quad (\text{Е.33})$$

Четырехточечная функция, заданная формулами (Е.20), (Е.22) и (Е.33) находится в согласии с более ранними результатами (см. [16]), полученными другим методом.

Заметим, что вследствие (Е.27) четырехточечная функция (Е.20) может быть представлена в виде

$$G = \mathcal{F}\left(\frac{1}{16}, 0, x\right) \bar{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{16}, 0, \bar{x}\right) + \mathcal{F}\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{2}, x\right) \bar{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{2}, \bar{x}\right). \quad (\text{Е.34})$$

Из этой формулы видно, что только два конформных блока дают вклад в операторное разложение $\sigma(\xi) \sigma(0)$. Соответствующие примарные поля имеют размерности $\Delta = \bar{\Delta} = 0$ и $\Delta = \bar{\Delta} = \frac{1}{2}$. Первое из них, очевидно, идентифицируется с единичным оператором I , а второе известно как поле плотности энергии

$$\varepsilon(z, \bar{z}) = \bar{\psi}(\bar{z}) \psi(z). \quad (\text{Е.35})$$

Четырехточечная корреляционная функция

$$H(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \langle \sigma(\xi_1) \mu(\xi_2) \sigma(\xi_3) \mu(\xi_4) \rangle \quad (\text{Е.36})$$

может быть представлена в виде

$$H = [(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_4)]^{-1/8} \bar{Y}(x, \bar{x}), \quad (\text{Е.37})$$

где функция \bar{Y} удовлетворяет все тому же дифференциальному уравнению (Е.21). Исследование, аналогичное проведенному выше, приводит к результату

$$\bar{Y}(x, \bar{x}) = [x \bar{x} (1 - x)(1 - \bar{x})]^{-1/8} \sin \frac{1}{2} (\theta + \bar{\theta}). \quad (\text{Е.38})$$

Поэтому функция (Е.36) имеет вид

$$H = \mathcal{F}\left(\frac{1}{16}, 0, x\right) \bar{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{2}, \bar{x}\right) + \mathcal{F}\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{2}, x\right) \bar{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{16}, 0, \bar{x}\right). \quad (\text{Е.39})$$

Эта формула соответствует следующему операторному разложению

$$\begin{aligned} \sigma(z, \bar{z}) \mu(0, 0) &= z^{3/8} \bar{z}^{-1/8} \{\Psi(z) + O(z, \bar{z})\} + z^{-1/8} \bar{z}^{3/8} \{\bar{\Psi}(\bar{z}) + O(z, \bar{z})\}, \end{aligned} \quad (\text{Е.40})$$

которое находится в согласии с идеей, что поле ψ пропорционально регуляризованному произведению $:\sigma\mu:$.

Во избежание недоразумения, подчеркнем, что имеется три различных набора полей:

$$\begin{aligned}\{A_j\} &= \{[I], [\psi], [\bar{\psi}], [\varepsilon]\}, \\ \{B_j\} &= \{[I], [\sigma], [\varepsilon]\}, \\ \{C_j\} &= \{[I], [\mu], [\varepsilon]\}.\end{aligned}\tag{E.41}$$

Каждый из этих наборов образует замкнутую операторную алгебру и подходит для описания критической теории поля Изинга. Все поля, входящие в один набор, являются взаимно локальными, в то время как поля, входящие в разные наборы, вообще говоря, не локальны друг относительно друга.

Литература

1. *Patashinskii A.Z. and Pokrovskii V.L.*, Fluctuation theory of phase transitions (Pergamon, Oxford, 1979).
2. *Поляков А.М.*, Письма в ЖЭТФ, 12 (1970) 538.
3. *Migdal A.A.*, Phys. Lett., 44B (1972) 112.
4. *Поляков А.М.*, ЖЭТФ, 66 (1974) 23.
5. *Wilson K.G.*, Phys. Rev. 179 (1969) 1499.
6. *Фейгин Б.Л. и Фукс Д.Б.*, Функ. анализ, 16 (1982) 47.
7. *Кас V.G.*, Lecture notes in phys., 94 (1979) 441.
8. *Mandelstam S.*, Phys. Reports, 12C (1975) 1441.
9. *Schwarz J.H.*, Phys. Reports, 8C (1973) 269.
10. *Гельфанд И.М. и Фукс Д.Б.*, Функ. анализ, 2 (1968) 92.
11. *Virasoro M.*, Phys. Rev., D1 (1969) 2933.
12. *Bateman H. and Erdelyi A.*, Higher transcendental functions (McGraw-Hill, 1953).
13. *Пуанкаре А.*, Избранные труды, т. 3 (Наука, Москва, 1974).
14. *Polyakov A.M.*, Phys. Lett., 103B (1981) 207.
15. *McKoy B. and Wu T.T.*, The two-dimensional Ising model (Harvard Univ. Press, 1973).
16. *Luther A. and Peschel*, Phys. Rev., B12 (1975) 3908.

КОНФОРМНАЯ АЛГЕБРА И МНОГОТОЧЕЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ В $2D$ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Доценко Вл.С., Фатеев В.А.

Nucl. Phys. B240 [FS 12] (1984). P. 312-348

Дана общая схема, основанная на конформной алгебре, для вычисления многоточечных корреляционных функций в $2D$ статистических моделях в критической точке. Найдена специальная конформная операторная алгебра для операторов в $2D$ q -компонентной модели Поттса ($1 < q < 4$) и в $O(N)$ модели ($0 < N < 2$) в критической точке. В этих моделях вычислено множество четырехточечных корреляционных функций.

1. Введение

В недавней статье Белавина, Полякова и Замолотчикова [1] был предложен новый подход к $2D$ конформно инвариантным теориям. В этой статье была дана полная классификация операторов в таких теориях. Было также показано, что существует специальный класс $2D$ конформно инвариантных теорий, так называемых вырожденных конформных теорий, в которых все аномальные размерности операторов задаются простым алгебраическим уравнением. Все корреляторы в таких теориях удовлетворяют специальным линейным дифференциальным уравнениям.

При этом новом подходе различные $2D$ конформно инвариантные теории являются специальными представлениями общей конформной операторной алгебры.

В работе [1] были найдены еще более специальные конформные теории, в которых операторная алгебра состоит лишь из конечного числа базисных конформных операторов. В [1] было сделано предположение, что такие минимальные теории должны описывать критические флуктуации в $2D$ статистических моделях в точке фазового перехода второго рода. В качестве подкрепления этой идеи было показано, что простейшая минимальная операторная алгебра соответствует алгебре операторов ε (энергии) и σ (спина) в $2D$ модели Изинга в критической точке.

Эта идея разрабатывалась далее в работе [2], где было показано, что вырожденные конформные теории дают операторные алгебры, описывающие критические флуктуации в $2D$ q -компонентных моделях Поттса. В [2] было проведено детальное изучение частной операторной алгебры, порожденной операторами энергии и спина в Z_3 модели. В этой алгебре, так же, как и в случае модели Изинга (Z_2), имеется лишь конечное число базисных операторов (пять вместо двух, как в случае модели Изинга). Но, вообще говоря, модель Поттса с общим $q \leq 4$ содержит бесконечное число базисных операторов, которые порождаются операторными произведениями операторов энергии (ε) и спина (σ).

В теориях с масштабной инвариантностью двухточечная корреляционная функция имеет следующий простой вид:

$$\langle A(z) A(z') \rangle \sim \frac{1}{|z - z'|^{2\Delta}}. \quad (1.1)$$

Здесь $A(z)$ — некоторый базисный оператор теории и Δ — его скейлинговая размерность. Несколько лет тому назад Поляков в работе [3] предположил, что масштабная инвариантность обобщается до конформной инвариантности. В частности, было сделано предположение, что критические флуктуации на самом деле конформно инвариантны. Как было показано в [3], в конформно инвариантной теории также и трехточечные корреляторы описываются простой формулой:

$$\langle A(z_1) B(z_2) C(z_3) \rangle \sim \frac{1}{|z_{12}|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |z_{23}|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} |z_{13}|^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2}}. \quad (1.2)$$

Нетривиальные функции могут появиться в четырех- и более точечных корреляторах. Например, четырехточечный коррелятор имеет следующий общий вид [3]:

$$\langle A(z_1) B(z_2) C(z_3) D(z_4) \rangle \sim \frac{f(\eta)}{\prod_{i < j} |z_{ij}|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta/3}}, \quad \Delta = \sum \Delta_i. \quad (1.3)$$

Здесь $\eta = z_{12} z_{34} / z_{13} z_{24}$ и $f(\eta)$ — вообще говоря, нетривиальная функция, которая не фиксируется специальной (конечно параметрической) конформной группой (проективной группой в $2D$). Развитие $2D$ конформной теории в работе [1], основанное на использовании общей (бесконечно параметрической) конформной группы в двух измерениях, позволяет найти и эту функцию. В частности, в вырожденных конформных теориях она находится как квадратичная форма от решений конформных линейных дифференциальных уравнений. (Это то, что имеется в виду, когда говорят, что корреляторы в вырожденных конформных теориях удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям. Решения этих уравнений еще не являются коррелятора-

ми, но они являются конформными функциями, из которых составляются корреляторы. В [1] эти функции называются "конформными блоками".)

В работе [1] четырехспиновый коррелятор в модели Изинга $\langle \sigma \sigma \sigma \sigma \rangle$ был найден при помощи конформной теории, причем результат совпал с результатами Каданова [4] и Лютера и Пешела [5].

В работе [2] было найдено несколько четырехточечных корреляционных функций в Z_3 модели. Вычисления в [2] ограничивались корреляторами, в которых входящие в них конформные функции как, например, функция $f(\eta)$ в (1.3), являются решениями уравнений второго порядка. В Z_3 модели — это корреляторы, содержащие оператор энергии ϵ .

Недавно Фейгин и Фукс [6] развили специальное интегральное представление для конформных функций (конформных блоков) в общей конформной теории. В частности, эти интегралы дают удобную форму для конформных решений в вырожденных конформных теориях.

В данной статье и нашей следующей статье [7] мы определяем, используя интегральное представление Фейгина-Фукса, корреляционные функции (или амплитуды, по терминологии общей теории в [1]) для операторов в вырожденных конформных теориях. Для статистической физики это дает корреляционные функции в точке фазового перехода для всех операторов в специальных статистических моделях, в которых известна конформная алгебра.

В настоящее время мы нашли две серии таких специальных алгебр. Точнее, было найдено подходящее отождествление конформных операторов с физическими операторами спина и энергии. Первая серия — это модель Поттса с непрерывным числом компонент $q \leq 4$ [8], а вторая — это $O(n)$ -модель с непрерывным $0 \leq n \leq 2$ [9]. Эти модели описаны в пункте 2.

В пункте 3 вводятся интегралы Фейгина-Фукса и описывается связь этих интегралов с операторной алгеброй вырожденных конформных операторов. В пункте 4 рассматривается проблема монодромии, которая возникает при построении физических корреляторов из конформных функций. В этом пункте мы также разбираем простейший случай нетривиальных корреляторов — четырехточечных корреляторов, составленных из функций второго порядка (гипергеометрических функций).

В пункте 5 мы начинаем изучение функций более высокого порядка. Здесь мы вычисляем четырехточечные корреляторы для конформных операторов третьего порядка. В $O(n)$ -модели это — оператор энергии (см. пункт 2).

Обобщение на операторы более высокого порядка осуществляется непосредственно, хотя и технически сложно. Первые замечания о конформных функциях для общих вырожденных операторов дают-

ся в пункте 3. Явные формулы будут приведены в нашей следующей работе [7].

Обсуждение результатов проводится в пункте 6.

2. Конформная алгебра моделей Поттса и $O(n)$ -моделей, порожденная операторами энергии и спина.

Отождествление операторов энергии и спина в обобщенных моделях Поттса с базисными операторами вырожденной конформной алгебры было найдено уже в работе [2]. Здесь мы кратко изложим этот результат и затем проведем отождествление для операторов энергии и спина в $O(n)$ -модели с $0 \leq n \leq 2$. Эта модель недавно рассматривалась Ниенхьюзом [9].

Базисные операторы вырожденной конформной алгебры нумеруются двумя целыми числами и обозначаются $\phi_{n,m}(z)$, где n, m — целые числа [1]. Конформные размерности $\Delta_{n,m}$ этих операторов задаются формулой Каца [10]:

$$\Delta_{n,m} = \frac{1}{4} [(\alpha_- n + \alpha_+ m)^2 - (\alpha_+ + \alpha_-)^2]. \quad (2.1)$$

Здесь

$$\alpha_{\pm} = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}, \quad (2.2)$$

и α_0 связано с аномальным числом C конформной алгебры соотношением

$$C = 1 - 24\alpha_0^2. \quad (2.3)$$

(см. также пункт 3). Аномальное число C является непрерывным параметром и определяет однопараметрическое множество вырожденных конформных теорий. Не вдаваясь в подробности, мы покажем, что в операторной алгебре для моделей Поттса и $O(n)$ -моделей число C является функцией q и n , соответственно.

В работах [1, 2] было найдено, что оператор энергии ϵ в моделях Изинга ($q = 2$) и Z_3 ($q = 3$) соответствует оператору $\phi_{1,2}(z)$ конформной алгебры. Было найдено, что число $(\alpha_-)^2 = (\alpha_+)^{-2}$ в (2.1) в этих двух моделях равно соответственно $3/4$ и $5/6$. Оба этих числа соответствуют конечным или минимальным алгебрам.

Общее правило заключается в том, что вырожденная конформная алгебра становится конечной, если число $(\alpha_-)^2$ является рациональным, т.е.

$$(\alpha_-)^2 = p/k. \quad (2.4)$$

Здесь p, k — целые числа. Главная серия минимальных теорий, найденная в [1], соответствует значению $k - p = 1$. Модели Изинга и Z_3 Поттса являются двумя такими теориями. Теперь посмотрим на всю

серию. Мы определим

$$k = 2N, \quad p = 2N - 1, \quad (2.5)$$

где N принимает целые и полуцелые значения.

Для минимальных теорий формула Каца (2.1) принимает вид:

$$\Delta_{n,m} = \frac{(pn - km)^2 - (k - p)^2}{4pk}. \quad (2.6)$$

Как было сказано выше, в моделях Изинга и Z_3 оператор энергии ε представляется в соответствующих конформных алгебрах оператором $\phi_{1,2}$ с конформной размерностью $\Delta_{1,2}$. Предположим, что это имеет место для обобщенной модели Поттса. Для k, p , определенных как в (2.5), мы находим

$$\Delta_{1,2} = \frac{(2N - 1 - 2N \times 2)^2 - 1}{4 \times 2N \times (2N - 1)} = \frac{N + 1}{2(2N - 1)}. \quad (2.7)$$

Теперь вспомним, что наблюдаемые критические размерности статистических операторов вдвое больше, чем их размерности в конформной алгебре (см. [2]). Таким образом, из (2.7) мы получаем

$$(\Delta_\varepsilon)_{ph} = 2\Delta_{1,2} = \frac{1+y}{2-y}, \quad y = \frac{1}{N}. \quad (2.8)$$

Последняя формула есть в точности формула ден Нижса [11, 12]. Согласно его обозначениям это — первый термический показатель X_{T_1} . Кроме того, соотношение (2.8) может рассматриваться здесь как определение параметра y . Согласованность устанавливается при помощи вычисления второго термического показателя X_{T_2} при использовании того же параметра $y = 1/N$. В терминах конформной теории второй термический показатель соответствует оператору $\phi_{1,3}$, который получается при перемножении двух операторов энергии:

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) \varepsilon(z') &\sim \phi_{1,2}(z) \phi_{1,2}(z') \sim \\ &\sim \frac{1}{(z - z')^{2\Delta_{1,2}}} I + \frac{1}{(z - z')^{2\Delta_{1,2} - \Delta_{1,3}}} \phi_{1,3}(z') \end{aligned} \quad (2.9)$$

(см. [1, 2]). Далее мы будем записывать такие локальные операторные разложения в компактной форме, опуская стандартные скейлинговые множители и указывая в разложении лишь базисные конформные операторы:

$$\phi_{1,2} \phi_{1,2} \sim I + \phi_{1,3}. \quad (2.9')$$

Здесь I является единичным оператором алгебры и $\phi_{1,3}$ — оператор, следующий за главным термальным оператором. Его размерность на-

ходится при помощи (2.6):

$$\Delta_{1,3} = \frac{(2N-1-2N \times 3)^2 - 1}{4 \times 2N \times (2N-1)} = \frac{4+2y}{2(2-y)},$$

$$X_{T_2} = 2\Delta_{1,3} = \frac{4+2y}{2-y}. \quad (2.10)$$

Эта размерность корректно задает второй термальный показатель (сравни с [12]).

В ведущих сериях минимальных конформных теорий с $k = 2N$, $\hat{p} = 2N - 1$ и целым N спиновый оператор расположен справа от центра таблицы, содержащей операторы $\phi_{n,m}$ (см. [2]), и соответствует оператору $\phi_{N,N-1}$. Это единственное место в таблицах для конечных теорий в том смысле, что только этот оператор возникает снова в произведении с оператором энергии:

$$\varepsilon S \sim S + \dots \quad (2.11)$$

В любом случае, в моделях Изинга и Z_3 оператор спина соответствует конформному оператору $\phi_{N,N-1}$. Мы предположим, что это имеет место также и в общем случае. Тогда первый и второй магнитные показатели, соответствующие операторам $\phi_{N,N-1}$ и $\phi_{N,N-2}$, задаются равенствами

$$X_{H_1} = 2\Delta_{N,N-1} = \frac{N^2 - 1}{4N(2N-1)} = \frac{1-y^2}{4(2-y)}, \quad (2.12)$$

$$X_{H_2} = 2\Delta_{N,N-2} = \frac{9N^2 - 1}{4N(2N-1)} = \frac{9-y^2}{4(2-y)}. \quad (2.13)$$

Это — в точности соотношения, предложенные Ниенхьюзом и другими [13] а также Пирсоном [14] и выведенные в терминах кулоновского газа ден Нижсом [15].

В общем случае термальная и магнитная серии показателей для моделей Поттса определяются следующими формулами:

$$X_{T_n} = 2\Delta_{1,n+1} = \frac{n^2 + ny}{2-y}, \quad (2.14)$$

$$X_{H_n} = 2\Delta_{N,N-1-n} = \frac{(2n-1)^2 - y^2}{4(2-y)}. \quad (2.15)$$

Введенный выше параметр $y = 1/N$ до сих пор был ограничен дискретными значениями. Спиновый оператор, являющийся оператором $\phi_{N,N-1}$, содержится во множестве вырожденных конформных операторов $\{\phi_{n,m}\}$, если только N есть целое число.

Можно также проверить, что множество конформных размерностей $\{\Delta_{n,m}\}$, заданное формулой Каца (2.1), не содержит отрицательных размерностей (которые, конечно, физически неприемлемы)

только для главных серий минимальных конформных теорий. Это соответствует целым или полуцелым значениям N . Заметим, что это множество теорий также было выделено при другом подходе Фриданом, Кью и Шенкером в их недавней статье [18], в которой использовалось требование отсутствия состояний с отрицательной нормой в модулях алгебры Вирасоро.

Важный факт заключается в том, что даже в теориях, содержащих некоторые из операторов $\{\phi_{n,m}\}$ с отрицательной размерностью, возможно проведение редукции полной операторной алгебры к некоторым подалгебрам, которые не содержат патологических операторов. Такие подалгебры корректно определены по крайней мере с точки зрения статистической теории.

Мы не анализировали детально все возможные подалгебры, которые могут быть выделены из других конечных теорий, не принадлежащих к одной из главных серий $((\alpha_-)^2 = p/k, \text{ но } k - p > 1)$. В любом случае, так как оператор $\phi_{N,N-1}$ содержится в множестве вырожденных конформных операторов только для целого N , мы считаем, что оператор спина в поттсовских сериях моделей определен в нашей теории только для этого дискретного, но бесконечного, множества значений определенного ранее параметра $y = 1/N$.

Но подалгебра “термальных” операторов, порожденная произведениями оператора энергии $\epsilon \sim \phi_{1,2}$ и содержащая конформные операторы $\{\phi_{1,n}\}$, не содержит патологических операторов для всей непрерывной области значений параметра y . Именно в этом смысле, если только рассматриваются эта термальная алгебра и соответствующие термальные критические показатели, мы говорим, что конформная теория модели Поттса корректно определена для непрерывной области параметра y или q .

Наконец заметим, что параметр q в модели Поттса связан с параметром y формулой [16, 17]

$$\sqrt{q} = 2 \cos\left(\frac{1}{2} \pi y\right) \quad (2.16)$$

С другой стороны, для непрерывного $(\alpha_-)^2$ параметр $y = 1/N$ определяется равенством

$$y = \frac{1}{N} = 2(1 - \alpha_-^2) = 4\alpha_0 \left(\sqrt{\alpha_0^2 + 1} - 1 \right),$$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{1}{24} (1 - C)}. \quad (2.17)$$

Таким образом “число компонент” параметра q модели Поттса оказывается связанным с константами конформной алгебры $(\alpha_-)^2$, C .

Заметим здесь, что модель $q = 4$ получается в пределе $N \rightarrow \infty$, $(\alpha_-)^2 \rightarrow 1$. Эта алгебра имеет значение константы $C = 1$, это — тривиальный случай конформной теории в том смысле, что все многоточеч-

ные корреляторы в этой теории задаются простыми алгебраическими функциями. Некоторые примеры этого приводятся в приложении Б.

Теперь мы подошли к тому, чтобы найти конформную алгебру для $O(n)$ -модели. Эта модель недавно рассматривалась Ниенхьзом для непрерывной области параметра n : $-2 \leq n \leq 2$ [9]. При правдоподобных предположениях он вывел следующие соотношения для термальных показателей в этой модели:

$$X_{T_1} = 2 - Y_{T_1} = 2t - 2, \quad (2.18)$$

$$X_{T_2} = 6t - 4 \quad (2.19)$$

$$c \quad n = -2 \cos \frac{2\pi}{t}. \quad (2.20)$$

Он же предложил соотношение для магнитного показателя

$$X_{H_1} = 1 - \frac{3}{4t} - \frac{t}{4}. \quad (2.21)$$

Соотношение (2.18) было предложено ранее Карди и Хамбером в [19].

Мы нашли реализацию конформной алгебры для этой модели, опираясь на следующий ряд аргументов. Во-первых, нетрудно убедиться в том, что показатели X_{T_1} и X_{T_2} в (2.18), (2.19) существенно отличаются от соответствующих показателей для модели Поттса в (2.8), (2.10). Даже если мы ничего не знаем о (2.20) и точно скорректировали параметр t в (2.18) с параметром y в модели Поттса, чтобы сделать одним и тем же X_{T_1} в (2.8) и в (2.18), то показатели X_{T_2} , выраженные через эти параметры, будут различаться.

Ниже мы увидим, что две модели должны совпадать для $q = 2$ и $n = 1$ — в этом случае мы имеем модель Изинга. В частности, показатель X_{T_1} , заданный конформной размерностью Δ_ϵ оператора энергии, должен быть одним и тем же в этой точке пересечения двух моделей. В минимальных конформных теориях, к которым принадлежит модель Изинга, каждый физический оператор имеет два “представителя” среди конформных операторов $\phi_{n,m}$ (см. [1, 2]). В алгебре модели Изинга [1] вторым партнером оператора энергии $\epsilon \sim \phi_{1,2}$ является оператор $\phi_{3,1}$. Можно проверить, что, например, для модели Изинга $(\alpha_-)^2 = 3/4$ в (2.1),

$$\Delta_{1,2} = \Delta_{3,1} = \frac{1}{2}$$

($(\Delta_\epsilon)_{ph} = 2\Delta_{1,2} = 1$, как и должно быть). Только в одной этой точке ($(\alpha_-)^2 = 3/4$) оператор $\phi_{3,1}$ эквивалентен оператору энергии в модели Поттса $\phi_{1,2}$. Теперь естественно предположить, что оператор $\phi_{3,1}$ должен быть оператором энергии в $O(n)$ модели. Проверим эту гипотезу. Мы вычислим $\Delta_{3,1}$, используя ту же параметризацию, что и в модели Поттса: $(\alpha_-)^2 = p/k$, $k = 2N$, $p = 2N - 1$, $y = 1/N$. Мы полу-

чаем

$$\Delta_{3,1} = \frac{(3p-k)^2 - (p-k)^2}{4pk} = 1 - \frac{1}{N} = 1 - y,$$

$$X_{T_1} = 2 \Delta_{3,1} = 2 - 2y. \quad (2.22)$$

Согласуя это уравнение с (2.18), мы находим следующее соотношение между параметрами

$$y = 2 - t. \quad (2.23)$$

Оператор, следующий за оператором с главным термальным показателем относительно оператора $\phi_{3,1}$, соответствует конформному оператору, который возникает при перемножении двух операторов энергии. Согласно общей теории [1] имеем

$$\phi_{3,1} \phi_{3,1} \sim I + \phi_{3,1} + \phi_{5,1}. \quad (2.24)$$

Таким образом, следующим за главным термальным оператором является оператор $\phi_{5,1}$. Вычисляя

$$\Delta_{5,1} = \frac{(5p-k)^2 - 1}{4pk} = 4 - 3y$$

и используя соотношение (2.23), находим

$$X_{T_2} = 2 \Delta_{5,1} = 6t - 4. \quad (2.25)$$

Это согласуется с (2.19). Наконец, если мы предположим, что операторы спина как в модели Поттса, так и в $O(n)$ -модели, соответствуют одному и тому же конформному оператору $\phi_{N,N-1}$, то получим

$$X_{H_1} = 2 \Delta_{N,N-1} = \frac{1-y^2}{4(2-y)} = 1 - \frac{3}{4t} - \frac{t}{4}. \quad (2.26)$$

Это совпадает с гипотезой Ниенхьюза (2.21).

Таким образом мы установили следующее отождествление: операторы энергии в модели Поттса и $O(n)$ -модели соответствуют базисным операторам $\phi_{1,2}$ и $\phi_{3,1}$ вырожденной конформной теории, соответственно; операторы спина в обеих моделях соответствуют одному и тому же конформному оператору $\phi_{N,N-1}$.

Наконец заметим, что получается еще одна бесконечная серия моделей, если в качестве оператора энергии ε мы выберем оператор $\phi_{2,1}$. Фридан, Кью и Шенкер [18] показали, что этому выбору соответствуют трехкритическая модель Изинга (Z_2) и Z_3 -модель Поттса. Ими было установлено, что оператор спина опять находится в центре таблицы. Полагая $y = 1/N$, где N принимает полуцелые значения, получаем бесконечное множество трикритических моделей Поттса. Термальная подалгебра операторов $\phi_{2n+1,1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) корректно определена для непрерывных значений параметра y .

3. Интегральное представление конформных корреляторов

В этом пункте будет показано, что корреляторы в общей конформной $2D$ -теории [1] могут быть представлены через средние от вершинных операторов в системе, подобной кулоновской со специальными граничными условиями (ГУ).

На этом языке основные конформные операторы представляются в виде экспонент от свободных полей $\varphi(z, \bar{z})$:

$$V_\alpha(z, \bar{z}) = e^{i\alpha\varphi(z, \bar{z})}, \quad (3.1)$$

а динамика поля φ определяется действием

$$A[\varphi] \sim \int dz d\bar{z} \partial_z \varphi \partial_{\bar{z}} \varphi. \quad (3.2)$$

Для обычных ГУ для поля φ на бесконечности корреляторы операторов (3.1) в теории (3.2) тривиальны:

$$\begin{aligned} \langle V_\alpha(z) V_{-\alpha}(z') \rangle &= \frac{\int D\varphi e^{i\alpha\varphi(z)} e^{-i\alpha\varphi(z')} e^{-A[\varphi]}}{\int D\varphi e^{-A[\varphi]}} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha^2 [2\langle \varphi^2 \rangle - 2\langle \varphi(z) \varphi(z') \rangle] \right\} = \\ &= \exp \left\{ -4\alpha^2 \left(\ln \frac{R}{a} - \ln \frac{R}{|z - z'|} \right) \right\} = \\ &= \left| \frac{a}{z} \right|^{4\alpha^2} \sim \frac{1}{|z|^{4\alpha^2}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} \langle V_{\alpha_1}(z_1) V_{\alpha_2}(z_2) V_{\alpha_3}(z_3) V_{\alpha_4}(z_4) \rangle &\sim \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{4\alpha_i \alpha_j}, \\ \sum \alpha_i &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь мы учли, что

$$\langle \varphi(z) \varphi(z') \rangle = 4 \ln(R/|z - z'|),$$

где a — параметр обрезания на малых масштабах (шаг решетки), R — размер системы, $R \rightarrow \infty$. Корреляторы вершинных операторов (3.1) не равны нулю лишь в том случае, когда параметр R сокращается, откуда следует обычное условие нейтральности $\sum \alpha_i = 0$.

Выражение (3.3) показывает, что размерность оператора $V_\alpha(z)$ равна $2\alpha^2$.

В этой теории тензор энергии-импульса (ЭИ) определяется равенствами

$$\begin{aligned} T_{zz} &= -\frac{1}{4} \partial_z \varphi \partial_z \varphi, & T_{\bar{z}\bar{z}} &= -\frac{1}{4} \partial_{\bar{z}} \varphi \partial_{\bar{z}} \varphi, \\ T(z) \equiv T_{zz} &= -\frac{1}{4} : \partial_z \varphi \partial_z \varphi :. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Эта теория с операторами (3.1) и тензором ЭИ (3.5) представляет собой простой пример двумерной конформно инвариантной операторной системы, к которой также применима общая теория [1].

В частности, как было показано

$$\langle T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \dots \rangle = 0, \quad (3.6)$$

$$\partial_{\bar{z}} \langle T_{zz}(z, \bar{z}) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \dots \rangle = 0 \quad (3.7)$$

(ϕ_1, ϕ_2, \dots — произвольные конформно инвариантные операторы). Отсюда следует, что z - и \bar{z} -динамики разделяются (см. [1, 2]), то есть можно рассматривать все операторы и их корреляторы зависящими лишь от z_i , формально считая все \bar{z}_i фиксированными. Зависимость от $\{\bar{z}_i\}$ будет восстановлена ниже путем наложения на физические корреляторы требования инвариантности по отношению к некоторым симметриям (см. пункты 4 и 5).

Таким образом, пока мы будем опускать зависимость от \bar{z} . Тогда выражения (3.3) и (3.4) принимают вид

$$\langle V_\alpha(z) V_{-\alpha}(z') \rangle \sim (z - z')^{-2\alpha^2}, \quad (3.3')$$

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1) V_{\alpha_2}(z_2) V_{\alpha_3}(z_3) V_{\alpha_4}(z_4) \rangle \sim \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2\alpha_i \alpha_j}, \quad (3.4')$$

и существенная компонента тензора ЭИ выражается равенством

$$T(z) \equiv T_{zz}(z) = -\frac{1}{4} : \partial_z \varphi \partial_z \varphi :. \quad (3.5')$$

Из (3.3') следует, что конформная размерность оператора $V_\alpha(z)$ имеет значение

$$\Delta_\alpha = \alpha^2,$$

которое равно половине ее вещественной размерности.

Произведение полей в (3.5') "нормально упорядочено", что означает устранение из произведений полей несущественных расходимостей, которые могли бы возникнуть, если поместить эти произведения внутри некоторых корреляторов, т.е.

$$: \partial_z \varphi \partial_z \varphi : = \lim_{z, z' \rightarrow (z+z')/2} \{ \partial_z \varphi(z) \partial_{z'} \varphi(z') - \langle \partial_z \varphi(z) \partial_{z'} \varphi(z') \rangle \}.$$

Вершинный оператор (3.1) также "нормально упорядочен". Это снова означает, что, если этот оператор помещен внутри некоторого

коррелятора и экспонента разложена по степеням φ :

$$\exp(i\alpha\varphi(z)) = 1 + i\alpha\varphi + \frac{1}{2}(i\alpha)^2\varphi\varphi + \dots,$$

то при функциональном усреднении виковские спаривания полей φ в этом разложении должны производиться лишь с внешними полями. Все внутренние спаривания устранены; они дали бы общий расходящийся множитель

$$V_\alpha(z) = :\exp(i\alpha\varphi(z)):_\sim \frac{1}{\alpha^2} \exp(i\alpha\varphi(z)). \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) явно показывает, что квантовая размерность вершинного оператора $V_\alpha(z)$ имеет значение $\Delta_\alpha = \alpha^2$.

Кулоновская система (3.1)–(3.5) может быть модифицирована, если предположить, что имеется фиксированный заряд $-2\alpha_0$, помещенный на ∞ . Этот заряд приводит к модификации ГУ на ∞ для поля $\varphi(z)$. Теперь условие нейтральности принимает вид

$$\sum \alpha_i = 2\alpha_0. \quad (3.9)$$

В такой теории не равны нулю только корреляторы, удовлетворяющие условию (3.9). Двухточечный коррелятор определяется соотношением

$$\langle V_\alpha(z) V_{2\alpha_0-\alpha}(z') \rangle \sim \frac{1}{(z-z')^{2\alpha(\alpha-2\alpha_0)}}. \quad (3.10)$$

Здесь $V_{2\alpha_0-\alpha}$ — оператор, в некотором смысле сопряженный к V_α (вместо $V_{-\alpha}$, в случае $\alpha_0 = 0$), при этом конформная размерность принимает значение

$$\Delta_\alpha = \Delta_{2\alpha_0-\alpha} = \alpha^2 - 2\alpha\alpha_0. \quad (3.11)$$

Вследствие модификации ГУ тензор ЭИ $T(z)$ приобретает дополнительное слагаемое (ср. с (3.5')):

$$T(z) = -\frac{1}{4}:\partial_z\varphi\partial_z\varphi: + A\partial_z^2\varphi. \quad (3.12)$$

Коэффициент при $\partial_z^2\varphi$ задается конформным тождеством Уорда (ТУ) [1]:

$$\begin{aligned} \langle T(z) \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \dots \rangle = \\ = \sum_i \left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i} \partial_i \right) \langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \dots \rangle. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь $\{\phi_i\}$ — конформные операторы с размерностями $\{\Delta_i\}$. ТУ (3.13) определяет первые два члена в операторном разложении произведения $T(z) V_\alpha(z')$:

$$T(z) V_\alpha(z') = \frac{\Delta_\alpha}{(z-z')^2} V_\alpha(z') + \frac{1}{z-z'} \partial_{z'} V_\alpha(z') + \dots \quad (3.14)$$

С другой стороны, мы можем вывести это разложение непосредственно:

$$\begin{aligned}
 T(z) V_\alpha(z') &= : \left(-\frac{1}{4} \partial_z \varphi \partial_z \varphi + A \partial^2 \varphi \right) : e^{i\alpha \varphi(z')} : = \\
 &= \frac{\alpha^2 + 2i\alpha A}{(z - z')^2} : e^{i\alpha \varphi(z)} : + \frac{i\alpha}{z - z'} : \partial_z \varphi(z) e^{i\alpha \varphi(z')} : + \\
 &\quad + : \left(-\frac{1}{4} \partial_z \varphi \partial_z \varphi + A \partial^2 \varphi(z) \right) e^{i\alpha \varphi(z')} : = \\
 &= \frac{\alpha^2 + 2i\alpha A}{(z - z')^2} V_\alpha(z') + \frac{1}{z - z'} \partial_{z'} V_\alpha(z') + \dots \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Здесь мы использовали то, что

$$\langle \varphi(z) \varphi(z') \rangle = 2 \ln(R/(z - z')).$$

Теперь, сравнивая Δ_α в (3.11) с (3.14) и (3.15), мы находим, что $A = i\alpha_0$, и потому

$$T(z) = -\frac{1}{4} : \partial_z \varphi \partial_z \varphi : + i\alpha_0 \partial_z^2 \varphi. \quad (3.16)$$

Закон трансформации поля $\varphi(z)$ при конформных преобразованиях также изменяется. По определению, базисный конформный оператор $\phi(z)$ размерности Δ преобразуется следующим образом (см. [1])

$$z \rightarrow f(z) \approx z + \varepsilon(z), \quad (3.17)$$

$$\phi(z) \rightarrow (f'(z))^\Delta \phi(f(z)) \approx \phi(z) + (\Delta \varepsilon'(z) + \varepsilon(z) \partial_z) \phi(z). \quad (3.18)$$

В кулоновской теории (3.1), (3.2) с $\alpha_0 = 0$ при конформных преобразованиях изменяется лишь переменная z поля $\varphi(z)$:

$$\varphi(z) \rightarrow \varphi(f(z)), \quad (3.19)$$

а вершинный оператор $V_\alpha(z)$ приобретает лишь дополнительный масштабный множитель, вследствие его зависимости от параметра обрезания a (см. (3.8)):

$$V_\alpha(z) = : e^{i\alpha \varphi(z)} : \rightarrow (f'(z))^{\Delta_\alpha} : e^{i\alpha \varphi(f(z))} :, \quad \Delta_\alpha = \alpha^2. \quad (3.20)$$

В кулоновской теории с $\alpha_0 \neq 0$ закон преобразования поля $\varphi(z)$ должен быть модифицирован вследствие наложения специальных ГУ для $\varphi(z)$ на ∞ . Простейший путь отыскания соответствующего дополнительного вклада в $\delta\varphi(z)$ состоит в учете того, что размерность Δ_α в преобразовании (3.20) вершинного оператора $V_\alpha(z)$ должна быть такой же, как и полученная из двухточечного коррелятора (3.10). Это приводит к следующему закону преобразования для скалярного по-

ля $\varphi(z)$:

$$\varphi(z) \rightarrow \varphi(f(z)) + 2i\alpha_0 \ln f'(z) \approx \varphi(z) + \varepsilon(z) \partial_z \varphi(z) + 2i\alpha_0 \varepsilon'(z). \quad (3.21)$$

Используя (3.21) и (3.8), находим

$$\begin{aligned} V_\alpha = :e^{i\alpha \varphi(z)}: &\rightarrow (f'(z))^{\alpha^2} : \exp\{i\alpha \varphi(f(z)) - 2\alpha\alpha_0 \ln f'(z)\}: = \\ &= (f'(z))^{\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0} V_\alpha(f(z)), \end{aligned} \quad (3.22)$$

что согласуется с равенством

$$\Delta_\alpha = \alpha^2 - 2\alpha\alpha_0$$

(см. (3.11)).

Другое полезное соотношение описывает вклад “вакуумного” заряда α_0 в аномальное число C общей конформной алгебры [1]. Двухточечный коррелятор для $T(z)$ имеет вид

$$\langle T(z) T(z') \rangle = \frac{\frac{1}{2} C}{(z - z')^4},$$

где C — центральный заряд алгебры Вирасоро для L_n -компонент поля $T(z)$:

$$T(z) = \sum_n \frac{L_n(z_1)}{(z - z_1)^{n+2}},$$

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{1}{2} C n (n^2 - 1) \delta_{n, -m}. \quad (3.23)$$

(см. [1, 2]). Теперь явно вычислим коррелятор $\langle T(z) T(z') \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle T(z) T(z') \rangle &= \left\langle : \left(-\frac{1}{4} \partial \varphi(z) \partial \varphi(z) + i\alpha_0 \partial^2 \varphi(z) \right) : \times \right. \\ &\quad \times : \left(-\frac{1}{4} \partial \varphi(z') \partial \varphi(z') + i\alpha_0 \partial^2 \varphi(z') \right) : \left. \right\rangle = \\ &= \frac{1}{(z - z')^4} \frac{1}{2} (1 - 24\alpha_0^2). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Отсюда имеем

$$C = 1 - 24\alpha_0^2. \quad (3.25)$$

Теперь мы начнем вывод интегрального представления для многоточечных конформных корреляторов, используя установленную выше связь кулоновской системы с $\alpha_0 \neq 0$ с общей конформной теорией.

Сначала определим, какую именно операторную теорию мы хотели бы получить. Мы рассмотрим свойства операторов $\{V_\alpha\}$ кулоновской системы и наложим некоторые требования, которые должны были бы иметь место, если бы эти операторы были отождествлены с физическими операторами некоторой статистической теории.

Первое требование заключается в том, что 4-точечный коррелятор любых операторов в теории должен быть ненулевым:

$$\langle \varphi(z_1) \varphi(z_2) \varphi(z_3) \varphi(z_4) \rangle \neq 0. \quad (3.26)$$

В нашей кулоновской системе мы можем построить следующую функцию:

$$\langle V_{\alpha_1} V_{\alpha_2} V_{\alpha_3} V_{\alpha_4} \rangle \quad (3.27)$$

с $\sum \alpha_i = 2\alpha_0$. Далее мы потребуем, чтобы все кулоновские операторы в этой функции имели одинаковую конформную размерность Δ в том случае, если они отождествлены с простыми физическими операторами, из которых строится 4-точечный коррелятор вида (3.26). Это приводит нас к выбору между V_α и $V_{2\alpha_0-\alpha}$ для любого V_{α_i} из (3.27). Если $\alpha_0 = 0$, то такая функция может быть легко найдена:

$$\langle V_\alpha V_\alpha V_{-\alpha} V_{-\alpha} \rangle.$$

На первый взгляд кажется, что в случае $\alpha_0 \neq 0$, невозможно совместить два требования:

$$\sum_i \alpha_i = 2\alpha_0 \quad \text{и} \quad \alpha_i = \alpha \quad \text{или} \quad 2\alpha_0 - \alpha.$$

В нашей кулоновской теории функции вида

$$\langle V_\alpha V_\alpha V_{2\alpha_0-\alpha} V_{2\alpha_0-\alpha} \rangle, \quad (3.28)$$

$$\langle V_\alpha V_\alpha V_\alpha V_{2\alpha_0-\alpha} \rangle \quad (3.29)$$

равны нулю, так как $\sum \alpha_i \neq 2\alpha_0$.

Однако, на самом деле существует возможность сделать корреляторы вида (3.29) ненулевыми. В кулоновской теории с $\alpha_0 \neq 0$ имеется два нетривиальных оператора, которые могут “экранировать” добавочный заряд. Такие экранирующие операторы должны быть конформно инвариантными (иметь конформную размерность $\Delta = 0$) для того, чтобы они не изменяли конформные свойства коррелятора. Локальный оператор с $\Delta = 0$ — это единичный оператор алгебры. В кулоновской теории он имеет два представителя: $V_{\alpha=0}(z)$ и $V_{2\alpha_0}(z)$. Ни один из этих операторов не дает необходимого экранирования. Остается возможность интегрального оператора вида

$$Q = \oint_C dz J(z). \quad (3.30)$$

Чтобы оператор Q был конформно инвариантен, оператор $J(z)$ должен иметь конформную размерность $\Delta = 1$. Возьмем вершинный оператор $V_\alpha(z)$ и наложим условие

$$\Delta_\alpha = \alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 = 1. \quad (3.31)$$

Это уравнение имеет два решения:

$$\alpha_{\pm} = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}, \quad (3.32)$$

и потому существует два экранирующих оператора

$$Q_{\pm} = \oint_C dz J_{\pm}(z),$$

$$J_{\pm}(z) = V_{\alpha_{\pm}}(z). \quad (3.33)$$

Теперь мы можем поместить любое число операторов (3.33) под знак кулоновского среднего. Они не влияют на конформные свойства, которые будут определяться одними лишь операторами $V_{\alpha_i}(z_i)$, содержащимися в корреляторе. При этом операторы Q_{\pm} сдвинут баланс зарядов $\{\alpha_i\}$.

Посмотрим теперь на 4-точечные корреляторы (3.28), (3.29). В (3.28) $\sum \alpha_i - 2\alpha_0 = 2\alpha_0$. Излишек $2\alpha_0$ не может быть сокращен зарядами α_{\pm} операторов J_{\pm} . Но в случае (3.29) имеем $\sum \alpha_i - 2\alpha_0 = 2\alpha$, что можно сократить, добавляя Q_{\pm} , если α квантовано:

$$2\alpha = -\tilde{n}\alpha_- - \tilde{m}\alpha_+,$$

или

$$\alpha = \alpha_{n,m} = \frac{1}{2}(1-n)\alpha_- + \frac{1}{2}(1-m)\alpha_+. \quad (3.34)$$

Здесь \tilde{n} , \tilde{m} — положительные целые числа, которые в (3.34) для удобства сдвинуты.

Таким образом, мы можем построить 4-точечные корреляторы со свойствами, естественными для статистической теории (ненулевые, если все четыре оператора одинаковы), лишь из кулоновских вершинных операторов $V_{\alpha}(z)$, если параметр α ограничен дискретным множеством значений $\alpha_{n,m}$, заданных уравнением (3.34). (Заметим здесь, что множество (3.34) не единственно. Мы получим другой случай, если начнем с кулоновского среднего $\langle V_{\alpha} V_{\alpha} V_{\alpha} V_{\alpha} \rangle$ и придем к условию [20]

$$4\alpha = 2\alpha_0 - n\alpha_- - m\alpha_+, \quad \alpha = \frac{1}{4}(1-n)\alpha_- + \frac{1}{4}(1-m)\alpha_+.$$

В этой статье мы ограничиваемся конформной алгеброй, связанной с множеством (3.34). Соответствующие конформные размерности задаются согласно формуле

$$\Delta_{n,m} = \alpha_{n,m}^2 - 2\alpha_{n,m}\alpha_0 = \frac{1}{4} \left[(\alpha_- n + \alpha_+ m)^2 - (\alpha_+ + \alpha_-)^2 \right], \quad (3.35)$$

которая является в точности формулой Када для вырожденных конформных операторов [10] (см. также уравнение (2.1) и уравнения (32),

(33) в [2]). В общем случае 4-точечная функция имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \langle \phi_{n,m}(z_1) \phi_{n,m}(z_2) \phi_{n,m}(z_3) \phi_{n,m}(z_4) \rangle \sim \\ & \sim \oint_{C_1} du_1 \dots \oint_{C_{n-1}} du_{n-1} \oint_{S_1} dv_1 \dots \oint_{S_{m-1}} dv_{m-1} \times \\ & \times \langle V_{\alpha_{n,m}}(z_1) V_{\alpha_{n,m}}(z_2) V_{\alpha_{n,m}}(z_3) V_{\alpha_{n,m}}(z_4) \times \\ & \times J_-(u_1) \dots J_-(u_{n-1}) J_+(v_1) \dots J_+(v_{m-1}) \rangle. \quad (3.36) \end{aligned}$$

Так как все интегрирования аналитичны, то интеграл не зависит от конкретной формы контуров интегрирования

$$\{C_1 \dots C_{n-1}, S_1, \dots S_{m-1}\}.$$

Однако эти контуры должны быть выбраны подходящим образом, так чтобы они охватывали точки z_1, z_2, z_3, z_4 и, таким образом, не могли быть стянуты в точку, что привело бы к обращению интегралов в нуль.

Это интегральное представление для конформных функций недавно было найдено Фейгиным и Фуксом [6]. Здесь оно приводится на несколько ином языке.

В оставшейся части этого пункта мы при помощи интегралов (3.36) начнем более детальное изучение конформных функций.

Сначала рассмотрим специальный коррелятор:

$$\langle \phi_{n,m} \phi_{1,2} \phi_{1,2} \phi_{n,m} \rangle. \quad (3.37)$$

Мы предполагаем, что $(n, m) \geq (1, 2)$. Соответствующий интеграл с минимальным числом J -вставок имеет вид

$$\begin{aligned} & \oint_C dv \langle V_{\alpha_{n,m}}(z_1) V_{\alpha_{1,2}}(z_2) V_{\alpha_{1,2}}(z_3) V_{2\alpha_0 - \alpha_{n,m}}(z_4) J_+(v) \rangle \sim \\ & \sim (z_{12} z_{13})^{2\alpha_{1,2} \alpha_{n,m}} (z_{23})^{2\alpha_{1,2}^2} (z_{24})^{2\alpha_{n,m} (2\alpha_0 - \alpha_{n,m})} \times \\ & \times (z_{24} z_{34})^{2\alpha_{1,2} (2\alpha_0 - \alpha_{n,m})} \oint_C dv (v - z_1)^{2\alpha + \alpha_{n,m}} \times \\ & \times ((v - z_2)(v - z_3))^{2\alpha + \alpha_{1,2}} (v - z_4)^{2\alpha + (2\alpha_0 - \alpha_{n,m})}. \quad (3.38) \end{aligned}$$

Этот интеграл задает функцию от переменных z_1, z_2, z_3, z_4 , которая является проективно инвариантной. Используя эту инвариантность, мы можем зафиксировать три точки тремя произвольными значениями переменных. Стандартный выбор этих значений есть

$$z_1 = 0, \quad z_2 = z, \quad z_3 = 1, \quad z_4 \rightarrow \infty.$$

Тогда интеграл принимает вид

$$z^{2\alpha_{1,2}\alpha_{n,m}} (1-z)^{2\alpha_{1,2}^2} \oint_C dv v^{2\alpha+\alpha_{n,m}} (v-1)^{2\alpha+\alpha_{1,2}} (v-z)^{2\alpha+\alpha_{1,2}}. \quad (3.39)$$

Этот интеграл представляет собой гипергеометрическую функцию, которая является решением дифференциального уравнения второго порядка.

В (3.39) имеется два независимых выбора контура C (см. рис. 1.).

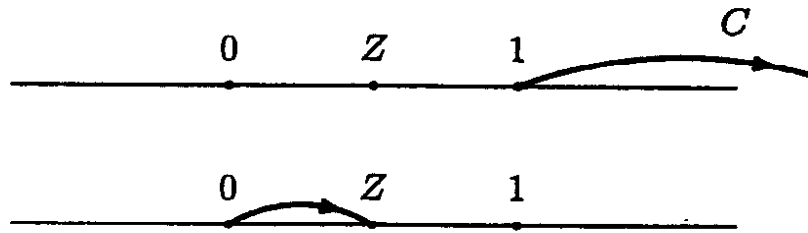


Рис. 1

Эти выборы соответствуют двум независимым решениям гипергеометрического дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} I_1(a, b, c; z) &= \int_1^\infty dv v^a (v-1)^b (v-z)^c = \\ &= \frac{\Gamma(-a-b-c-1) \Gamma(b+1)}{\Gamma(-a-c)} F(-c, -a-b-c-1; -a-c; z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2(a, b, c; z) &= \int_0^z dv v^a (1-v)^b (z-v)^c = \\ &= z^{1+a+c} \int_0^1 dv v^a (1-v)^c (1-zv)^b = \\ &= z^{1+a+c} \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(c+1)}{\Gamma(a+c+2)} F(-b, a+1, a+c+2; z). \quad (3.40) \end{aligned}$$

Здесь $a = 2\alpha + \alpha_{n,m}$, $b = c = 2\alpha + \alpha_{1,2}$ и $F(\alpha, \beta; \gamma;)$ — гипергеометрическая функция. Предполагается, что в этих интегралах степени подынтегральных множителей v , $v-1$, $v-z$ таковы, что интегралы сходятся. В противном случае контуры интегрирования должны охватывать соответствующие точки или, что эквивалентно, но технически проще, функции в (3.40) должны рассматриваться как аналитические продолжения интегралов (3.40) из тех областей параметров, в которых эти интегралы сходятся. Такое аналитическое продолже-

ние существенно упрощает работу с высшими интегралами (с числом интегрирований большим единицы) (см. пункт 5 и статью [7]).

Аналогично, интеграл для коррелятора:

$$\langle \phi_{n,m}(0) \phi_{3,1}(z) \phi_{3,1}(1) \phi_{n,m}(\infty) \rangle \quad (3.41)$$

принимает вид

$$z^{2\alpha_{3,1}\alpha_{n,m}} (1-z)^{2\alpha_{3,1}^2} \int_{C_1} du_1 \int_{C_2} du_2 u_1^a (u_1-1)^b (u_1-z)^c \times \\ \times u_2^a (u_2-1)^b (u_2-z)^c (u_1-u_2)^g. \quad (3.42)$$

Здесь $a = 2\alpha_{-}\alpha_{n,m}$, $b = c = 2\alpha_{-}\alpha_{3,1}$, $g = 2\alpha_{-}^2$. В этом случае мы выбираем набор контуров, показанный на рис. 2. Соответствующие интегралы детально изучаются в пункте 5. Здесь мы лишь заметим, что в данном случае имеется три независимых конфигурации контуров C_1 , C_2 , которые показаны на рис. 2. Соответствующие интегра-

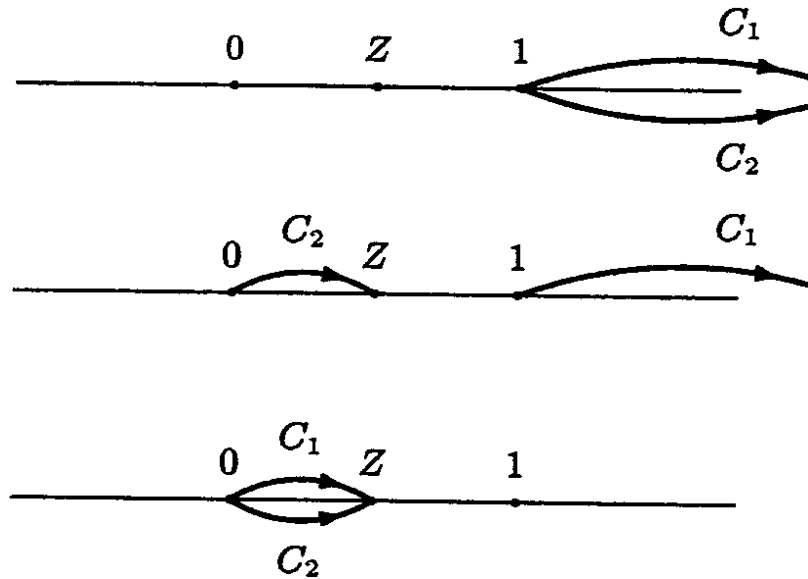


Рис. 2

лы дают три независимых решения дифференциального уравнения третьего порядка, вытекающего из общей теории [1].

Для коррелятора

$$\langle \phi_{n,m}(0) \phi_{2,2}(z) \phi_{2,2}(1) \phi_{n,m}(\infty) \rangle \quad (3.43)$$

кулоновское среднее содержит как $J_{-}(u)$ так и $J_{+}(v)$. Соответствующий интеграл определяется выражением

$$z^{2\alpha_{2,2}\alpha_{n,m}} (1-z)^{2\alpha_{2,2}^2} \int_C du \int_S dv u^a (u-1)^b (u-z)^c \times \\ \times v^{a'} (v-1)^{b'} (v-z)^{c'} (u-v)^g. \quad (3.44)$$

Здесь $a = 2\alpha_- \alpha_{n,m}$, $b = c = 2\alpha_- \alpha_{2,2}$, $a' = 2\alpha_+ \alpha_{n,m}$, $b' = c' = 2\alpha_+ \alpha_{2,2}$, $g = 2\alpha_+ \alpha_- = -2$.

В данном случае имеется четыре независимых конфигурации контуров, показанных на рис. 3, которые дают четыре решения диффе-

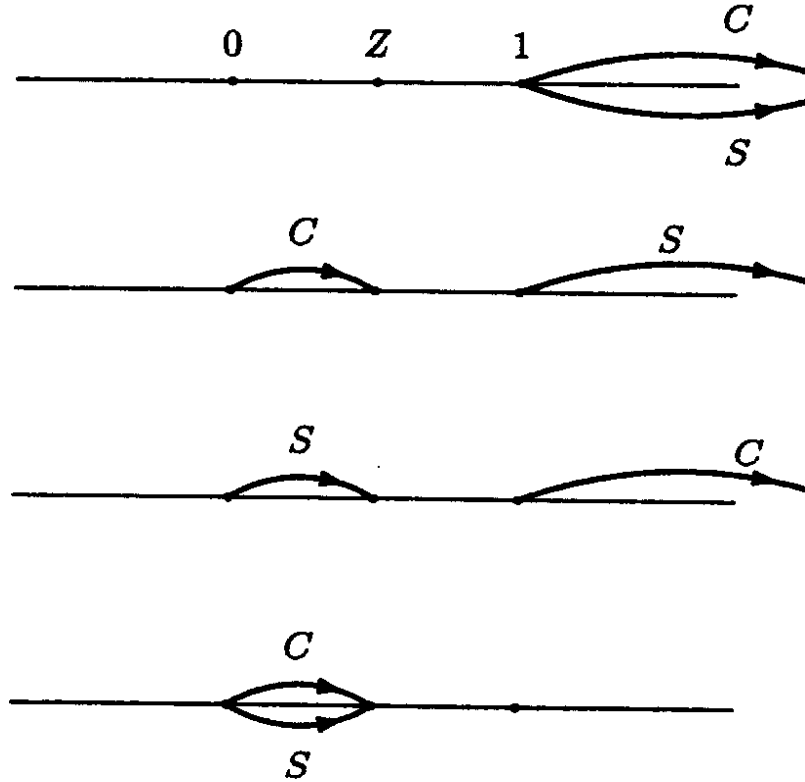


Рис. 3

ренциального уравнения четвертого порядка.

Теперь очевидно обобщение. Легко проверить, что коррелятору

$$\langle \phi_{n,m}(0) \phi_{k,l}(z) \phi_{k,l}(1) \phi_{n,m}(\infty) \rangle \quad (3.45)$$

соответствует $k \times l$ независимых интегралов (мы предполагаем, что $k \times l < n \times m$). Таким образом, мы воспроизводим результат общей теории, состоящий в том, что конформные корреляторы, содержащие вырожденные операторы $\phi_{k,l}$, удовлетворяют дифференциальному уравнению порядка $(k \times l)$. Используя описанное выше кулоновское представление, мы можем явно найти все решения нужных дифференциальных уравнений.

Сделаем в конце замечание по поводу неоднозначности выбора контуров интегрирования для конкретных корреляторов. Например, для коррелятора (3.41) мы могли бы с равным успехом написать следующий интеграл:

$$\int_{C_1} du_1 \dots \int_{C_{n-1}} du_{n-1} \int_{S_1} dv_1 \dots \int_{S_{m-1}} dv_{m-1} \langle V_{\alpha_{3,1}}(0) V_{\alpha_{n,m}}(z) \times \\ \times V_{\alpha_{n,m}}(1) V_{2\alpha_0 - \alpha_{3,1}}(\infty) J_-(u_1) \dots J_-(u_{n-1}) J_+(v_1) \dots J_+(v_{m-1}) \rangle.$$

Перебрав все независимые конфигурации контуров, мы получили бы $n \times m$ функций, которые являются решениями дифференциального уравнения, соответствующего оператору $\phi_{n,m}$. Интересно, что среди этих $n \times m$ функций имеется три, заданных интегралами (3.42), которые одновременно являются решениями уравнения третьего порядка (соответствующего оператору $\phi_{3,1}$), в то время как остальные функции избыточны.

Примеры того, как эта техника на практике позволяет найти физические корреляторы в двумерных статистических моделях, подробно описаны в следующих пунктах.

4. Проблема монодромии в задаче вычисления конформных операторов. Коррелятор второго порядка.

В этом пункте мы продемонстрируем нашу технику в применении к простейшему нетривиальному примеру — четырехточечному коррелятору, содержащему конформный оператор второго порядка $\phi_{1,2}$.

Как было показано в предыдущем пункте, конформные функции, связанные с коррелятором

$$\langle \phi_{n_1, m_1}(0) \phi_{1,2}(z) \phi_{n_3, m_3}(1) \phi_{n_4, m_4}(\infty) \rangle, \quad (4.1)$$

задаются интегралом

$$\begin{aligned} \int_C dt \langle V_{\alpha_1}(0) V_{\alpha_2}(z) V_{\alpha_3}(1) V_{\alpha_4}(\infty) J_+(t) \rangle = \\ = z^{2\alpha_1\alpha_2} (1-z)^{2\alpha_2\alpha_3} \int_C dt t^a (t-1)^b (t-z)^c, \end{aligned} \quad (4.2)$$

для которого контур интегрирования C может быть выбран двумя способами, как показано на рис. 1. Здесь

$$a = 2\alpha_1\alpha_+, \quad b = 2\alpha_3\alpha_+, \quad c = 2\alpha_2\alpha_+ \quad \text{и} \quad \alpha_i \equiv \alpha_{n_i, m_i}$$

заданы согласно (3.34), в частности,

$$\alpha_2 \equiv \alpha_{1,2} = -\frac{1}{2}\alpha_+.$$

Кроме того, $\{\alpha_i\}$ подчинены условию нейтральности (3.9), так что

$$\alpha_4 = 2\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_+.$$

Двум выборам контура C , приведенным на рис. 1, соответствуют два интеграла $I_1(z)$ и $I_2(z)$ (см. (3.40)). Чтобы составить физический

коррелятор, нам нужно восстановить зависимость от \bar{z} . Этот физический коррелятор должен иметь следующий вид:

$$G(z, \bar{z}) = \sum X_{ij} I_i(z) \overline{I_j(z)}. \quad (4.3)$$

Функция $I_i(z)$ имеет сингулярные точки 0, 1 и ∞ . Если мы сделаем аналитическое продолжение по z вдоль замкнутого контура C_0

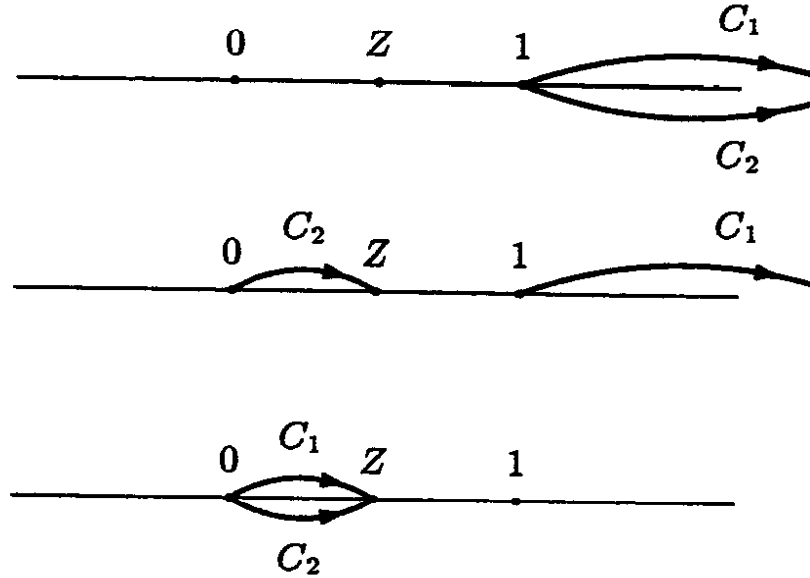


Рис. 4

или C_1 , охватывающего точку $z = 0$ или $z = 1$, соответственно (рис. 4), то функция $I_i(z)$ преобразуется согласно формулам

$$\begin{aligned} I_i(z) &\xrightarrow{C_0} (g_0)_{ij} I_j(z), \\ I_i(z) &\xrightarrow{C_1} (g_1)_{ij} I_j(z). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь g_0 и g_1 — 2×2 матрицы. Они являются образующими элементами группы преобразований мономии¹⁾. Если мы одновременно продолжим $I_i(z)$ и $\bar{I}_j(z)$ из (4.3) вдоль контура C_0 или C_1 , то функция $G(z, \bar{z})$, вообще говоря, изменится. Очевидно, что физические корреляторы операторов типа энергии или спина должны быть мономноинвариантны.

Из (3.40) следует, что матрица g_0 имеет диагональную форму

$$g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(2\pi i(1 + a + c)) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Функция $G(z, \bar{z})$ будет инвариантной относительно g_0 -преобразования, если она также диагональна. Таким образом мы приходим к выражению

$$G(z, \bar{z}) = X_1 I_1(z) \overline{I_1(z)} + X_2 I_2(z) \overline{I_2(z)}. \quad (4.6)$$

¹⁾ См. любую книгу по линейным дифференциальным уравнениям.

Остается рассмотреть преобразование g_1 . Эта матрица может быть сделана унитарной путем введения множителей в I_1 и I_2 , например (см. [2]):

$$\hat{I}_1(z) = I_1(z), \quad \hat{I}_2(z) = C I_2(z). \quad (4.7)$$

Если обе матрицы g_0 и g_1 унитарны, то квадратичная форма

$$G(z, \bar{z}) \sim \hat{I}_1(z) \overline{\hat{I}_1(z)} + \hat{I}_2(z) \overline{\hat{I}_2(z)} \quad (4.8)$$

будет монодромно инвариантной.

Однако в этой статье мы выберем несколько иной путь построения инвариантной функции $G(z, \bar{z})$, который оказывается короче и его легче обобщить на высшие корреляторы.

Мы перепишем (4.6) в компактной форме

$$G(z, \bar{z}) \sim \sum X_i I_i(z) \overline{I_i(z)}. \quad (4.9)$$

Как было установлено выше, эта функция явно g_0 -инвариантна. Теперь для интегралов $I_i(z)$, являющихся базисными решениями дифференциального уравнения, мы будем иметь следующее разложение [21]:

$$I_i(z) = \sum_j \alpha_{ij} \tilde{I}_j(1-z). \quad (4.10)$$

Говорят, что множество интегралов $I_i(z)$ является каноническим для точки $z = 0$, так как каждый интеграл имеет не более одной сингулярности при $z \rightarrow 0$. Функции $\tilde{I}_j(1-z)$ образуют каноническое множество для точки $z = 1$. В частности, для базиса $\{\tilde{I}_j(1-z)\}$ матрица g_1 имеет диагональный вид (4.5). Если мы подставим (4.10) в (4.9), то получим

$$G(z, \bar{z}) = \sum_i X_i \alpha_{ik} \alpha_{il} \tilde{I}_k(1-z) \overline{\tilde{I}_l(1-z)}. \quad (4.11)$$

Функция $G(z, \bar{z})$ будет инвариантной относительно g_1 , если квадратичная форма в правой части (4.11) диагональна, т.е.

$$\sum X_i \alpha_{ik} \alpha_{il} = 0, \quad k \neq l \quad (4.12)$$

Если матрица α_{ij} из (4.10) известна, то коэффициенты X_1, X_2 в квадратичной форме (4.7) могут быть легко найдены при помощи (4.12) (на самом деле, их отношение X_1/X_2).

Таким образом, нам остается найти матрицу α_{ij} . Для случая второго порядка, когда $\{I_i\}$ — гипергеометрические интегралы, выражение (4.10) хорошо известно. Однако, здесь мы выведем его еще раз при помощи техники, которая легко обобщается на случай высших порядков.

Возьмем интеграл $I_1(z)$ из уравнения (4.10) и аналитически продолжим контур интегрирования двумя разными способами, как показано на рис. 5. Затем мы умножим полученные интегралы на фазовые

$$\begin{aligned}
 I_1(z) &= \text{---} \underset{0}{\bullet} \text{---} \underset{Z}{\bullet} \text{---} \underset{1}{\bullet} \text{---} = \\
 &= \begin{cases} \text{---} \underset{0}{\bullet} \xrightarrow{e^{i\pi(a+b+c)}} \underset{Z}{\bullet} \xrightarrow{e^{i\pi(b+c)}} \underset{1}{\bullet} \xrightarrow{e^{i\pi b}} \times e^{-i\pi(b+c)} \\ \text{---} \underset{0}{\bullet} \xrightarrow{e^{-i\pi(a+b+c)}} \underset{Z}{\bullet} \xrightarrow{e^{-i\pi(b+c)}} \underset{1}{\bullet} \xrightarrow{e^{-i\pi b}} \times e^{i\pi(b+c)} \end{cases} \\
 &\quad a \\
 &= \text{---} \underset{0}{\bullet} \text{---} \underset{Z}{\bullet} \text{---} \underset{1}{\bullet} \text{---} = \\
 &= \text{---} \underset{0}{\bullet} \text{---} \underset{Z}{\bullet} \text{---} \underset{1}{\bullet} \text{---} + \text{---} \underset{0}{\bullet} \text{---} \underset{Z}{\bullet} \text{---} \underset{1}{\bullet} \text{---} \\
 &\quad b
 \end{aligned}$$

Рис. 5.

множители, приведенные на рис. 5, а для того, чтобы сократить фазы на интервале $(0, z)$. Теперь вычтем один интеграл из другого. В результате мы найдем соотношение (см. также рис. 5, б, где опущены коэффициенты):

$$I_1(a, b, c; z) = \frac{s(a)}{s(b+c)} I_1(b, a, c; 1-z) - \frac{s(c)}{s(b+c)} I_2(b, a, c; 1-z). \quad (4.13)$$

Здесь $s(A) \equiv \sin(\pi A)$ и т.д. Аналогичное разложение для функции $I_2(z)$ находится согласно рис. 6. Мы получаем

$$\begin{aligned}
 I_2(a, b, c; z) &= -\frac{s(a+b+c)}{s(b+c)} I_1(b, a, c; 1-z) - \\
 &\quad - \frac{s(b)}{s(b+c)} I_2(b, a, c; 1-z) \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

и, таким образом, находим

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{s(a)}{s(b+c)}, & a_{12} &= -\frac{s(c)}{s(b+c)}, \\
 a_{21} &= -\frac{s(a+b+c)}{s(b+c)}, & a_{22} &= -\frac{s(b)}{s(b+c)}. \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Теперь из уравнений (4.12) имеем

$$\frac{X_1}{X_2} = -\frac{\alpha_{21}\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22}} = \frac{s(a+b+c)s(b)}{s(a)s(c)}, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
 I_2(z) &= \text{diagram with points 0, Z, 1 and a curved arrow from 0 to Z} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{diagram with points 0, Z, 1 and arrows with labels } e^{i\pi a}, -e^{i\pi c}, -e^{i\pi(b+c)} \\ \text{diagram with points 0, Z, 1 and arrows with labels } -e^{i\pi a}, e^{i\pi c}, e^{i\pi(b+c)} \end{array} \right\} \times e^{-i\pi(b+c)} \\
 &= \text{diagram with points 0, Z, 1 and a curved arrow from 0 to Z} = \\
 &= \text{diagram with points 0, Z, 1 and an arrow from 0 to Z} + \text{diagram with points 0, Z, 1 and an arrow from Z to 1}
 \end{aligned}$$

Рис. 6.

Инвариантная функция $G(z, \bar{z})$ в (4.6) теперь определяется равенством

$$G(z, \bar{z}) \sim s(a+b+c) s(b) |I_1(a, b, c; z)|^2 + s(a) s(c) |I_2(a, b, c; z)|^2. \quad (4.17)$$

Восстанавливая все стандартные масштабные множители и возвращаясь в калибровку, в которой z_1, z_3 и z_4 — произвольны, мы находим следующее выражение для общего коррелятора второго порядка (с точностью до общей нормировки):

$$\begin{aligned}
 &\langle \phi_{n_1, m_1}(z_1) \phi_{n_2, m_2}(z_2) \phi_{n_3, m_3}(z_3) \phi_{n_4, m_4}(z_4) \rangle \sim \\
 &\sim \frac{|z_{13}|^{2[\Delta(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_+) - \Delta_1 - \Delta_3 + 2\alpha_+ + \alpha_2]} |z_{24}|^{2[\Delta(\alpha_2 + \alpha_4) - \Delta_2 - \Delta_4 + 2\alpha_+ + \alpha_2]}}{|z_{12}|^{-2[\Delta(\alpha_1 + \alpha_2) - \Delta_1 - \Delta_2]} |z_{23}|^{-2[\Delta(\alpha_2 + \alpha_3) - \Delta_2 - \Delta_3]}} \times \\
 &\times |z_{34}|^{-2[\Delta(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_+) - \Delta_3 - \Delta_4]} |z_{14}|^{-2[\Delta(\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_+) - \Delta_1 - \Delta_4]} \times \\
 &\times \{s(a+b+c) \times s(b) |I_1(a, b, c; \eta)|^2 + s(a) s(c) |I_2(a, b, c; \eta)|^2\}. \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Здесь $\eta = z_{12} z_{34} / z_{13} z_{24}$; параметры определены согласно (4.2), а конформные размерности $\Delta(\alpha_i)$ связаны с кулоновскими параметрами $\alpha_i \equiv \alpha_{n_i, m_i}$ операторов ϕ_{n_i, m_i} при помощи формулы Каца (3.35).

Интегралы $I_i(\eta)$ здесь пропорциональны гипергеометрическим функциям (см. (3.40)). Если $\eta \rightarrow 0$, то разложения интегралов $I_i(\eta)$ начинаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I_1(\eta) &\approx N_1 (1 + \alpha_1 \eta + \dots), \\
 I_2(\eta) &= N_2 \eta^{1+a+c} (1 + b_1 \eta + \dots). \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Нам могут понадобиться нормировочные числа N_i в интегралах $I_i(\eta)$, так как они определяют относительные численные значения коэффициентов в алгебре операторных разложений

$$\phi_i(z_i) \phi_j(z_j) \sim \sum_p C_{ij}^p \frac{1}{|z_i - z_j|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_p}} \phi_p(z_j). \quad (4.20)$$

Последние разложения могут быть выведены из четырехточечного коррелятора

$$\langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) \phi_4(z_4) \rangle,$$

если мы устремим, например, пары точек z_1, z_2 и z_3, z_4 друг к другу, т.е. $z_1 \rightarrow z_2, z_3 \rightarrow z_4$, и изучим сингулярности, возникающие в этом пределе. В этом случае структурные константы операторной алгебры C_{ij}^p оказываются связанными с нормировочными константами N_1 и N_2 из выражений (4.19).

Общая структура конформной операторной алгебры, связанная со свойствами четырехточечного коррелятора (или амплитуды), подробно рассматривается в [1]. Мы вернемся к этой проблеме в нашей следующей статье.

Для моделей Поттса равенство (4.18) дает четырехточечные корреляционные функции, содержащие оператор энергии ε . Этот оператор соответствует конформным операторам второго порядка $\phi_{1,2}$ в модели Поттса и $\phi_{2,1}$ в трикритической модели Поттса (см. пункт 2). "Симметричные" корреляционные функции $\langle \phi_{n,m} \varepsilon \varepsilon \phi_{n,m} \rangle$ в модели Поттса были вычислены в работе [2]. Четырехточечная корреляционная функция операторов энергии $\langle \varepsilon \varepsilon \varepsilon \varepsilon \rangle$ в модели Поттса также была найдена Кадановым и Ниенхьюзом [21]. Для вычисления несимметричных корреляционных функций выражение (4.18) также является полезным. Для некоторых из частных случаев представления Z_3 -моделей эти корреляционные функции перечислены в заключении работы [2].

Для $O(n)$ -статистических моделей оператор энергии является конформным оператором третьего порядка $\phi_{3,1}$ (см. пункт 2). Таким образом, в этом случае даже для "термальных" корреляторов требуются функции более высокого порядка. В следующем пункте мы вычислим корреляционные функции третьего порядка и, в частности, найдем термальные операторы в $O(n)$ -модели.

5. Корреляционные функции третьего порядка

Конформные функции, связанные с коррелятором третьего порядка

$$\langle \phi_{n_1, m_1}(0) \phi_{3,1}(z) \phi_{n_3, m_3}(1) \phi_{n_4, m_4}(\infty) \rangle, \quad (5.1)$$

задаются интегралом (см. пункт 3):

$$\begin{aligned} \int_{C_1} dt_1 \int_{C_2} dt_2 \langle V_{\alpha_1}(0) V_{\alpha_2}(z) V_{\alpha_3}(1) V_{\alpha_4}(\infty) J_-(t_1) J_-(t_2) \rangle = \\ = z^{2\alpha_1\alpha_2} (1-z)^{2\alpha_2\alpha_3} \int_{C_1} dt_1 \int_{C_2} dt_2 t_1^a (t_1-1)^b (t_1-z)^c \times \\ \times t_2^a (t_2-1)^b (t_2-z)^c (t_1-t_2)^g. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь $a = 2\alpha_1\alpha_-$, $b = 2\alpha_3\alpha_-$, $c = 2\alpha_2\alpha_-$, $g = 2\alpha_-^2$ и $\alpha_i \equiv \alpha_{n_i, m_i}$ определены согласно (3.34). В частности, $\alpha_{3,1} = -\alpha_-$, так что $c = 2\alpha_{3,1}\alpha_- = -2\alpha_-^2 = -g$. На параметры $\{\alpha_i\}$ наложено условие нейтральности (3.9), так что $a_4 = 2\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_-$.

В этом случае имеется три независимых конфигурации контуров, показанных на рис. 2. Соответственно мы определяем следующий набор базисных функций:

$$J_1(a, b, c; g; z) = e^{-i\pi g/2} \int_1^\infty dt_1 \int_1^\infty dt_2 (\dots) =$$

$$= 2c \left(\frac{1}{2}g\right) \int_1^\infty dt_1 \int_1^\infty dt_2 (\dots) \equiv 2c \left(\frac{1}{2}g\right) I_1(a, b, c; g; z), \quad (5.3)$$

$$J_2(a, b, c; g; z) = \int_1^\infty dt_1 \int_0^z dt_2 (\dots) =$$

$$= z^{1+a+c} \int_1^\infty dt_1 \int_0^1 dt_2 t_1^a (t_1 - 1)^b (t_1 - z)^c t_2^a (1 - t_2)^b (t_1 - zt_2)^g \equiv$$

$$\equiv I_2(a, b, c; g; z), \quad (5.4)$$

$$J_3(a, b, c; g; z) = e^{-i\pi g/2} \int_0^z dt_1 \int_0^z dt_2 (\dots) =$$

$$= z^{2+2a+2c+g} 2c \left(\frac{1}{2}g\right) \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 t_1^a (1 - t_1)^c (1 - zt_1)^b \times$$

$$\times t_2^a (1 - t_2)^c (1 - zt_2)^b (t_1 - t_2)^g \equiv 2c \left(\frac{1}{2}g\right) I_3(a, b, c; g; z). \quad (5.5)$$

Здесь (...) обозначают стандартные подынтегральные выражения, стоящие в интеграле (5.2); $c(\frac{1}{2}G) = \cos(\frac{1}{2}\pi G)$. Интегрирование первых выражений в интегралах (5.3), (5.5), в которых $(t_1 - t_2)$ меняет знак, определяется согласно рис. 2, где один контур проходит над вторым.

На самом деле в интеграле (5.2) имеется лишь три параметра, так как $g = -c$. Мы построим инвариантную форму $G(z, \bar{z})$ из уравнения (4.9) (т.е. саму корреляционную функцию) для более общего случая, когда g не связано с c . Для этого есть дополнительные причины. В интеграле (5.2), связанном с коррелятором (5.1), предполагается, что один из операторов является оператором третьего порядка $\phi_{3,1}$.

Для этого частного случая интеграл третьего порядка (5.2) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению общей теории [1], которое выводится с учетом вырожденности на третьем уровне состояний Вирасоро оператора $\phi_{3,1}$. На самом деле ситуация может быть более общей. В следующем пункте приводится пример коррелятора, который не содержит операторов третьего порядка $\phi_{3,1}$ или $\phi_{1,3}$, и тем не менее корреляционная функция выражается при помощи интегралов третьего порядка (5.3)–(5.5) с $g \neq -c$. Дифференциальное уравнение для этого более общего случая, когда g является независимым параметром, приведено в приложении А. Можно проверить, что для $g = -c$ это уравнение сводится к соответствующему уравнению, приведенному в работе [1].

Заметим также, что для частного случая “симметричных” корреляторов, таких как $\langle A B B A \rangle$, ситуация будет стандартной: порядок конформных функций будет соответствовать порядку операторов, и дифференциальные уравнения будут те же, что и в [1]. В пункте 3 мы рассмотрели интегралы лишь для этого симметричного случая.

Теперь вернемся к построению инвариантной функции $G(z, \bar{z})$, определенной согласно выражению (4.9).

Интегралы $I_i(z)$ в уравнениях (5.3)–(5.5) образуют полный набор независимых решений уравнения (А.9), канонический для точки $z = 0$. Они имеют следующий вид:

$$I_i(z) = z^{\rho_i^{(0)}} f_i(z),$$

$$\rho_1^{(0)} = 0, \quad \rho_2^{(0)} = 1 + a + c, \quad \rho_3^{(0)} = 2 + 2a + 2c + g. \quad (5.6)$$

Здесь $f_i(z)$ — аналитические функции, регулярные в точке $z = 0$.

Интегралы $I_i(z)$, такие же, как интегралы второго порядка (гипергеометрические) в предыдущем пункте, имеют три сингулярные точки: 0, 1, ∞ . Существует два генерирующих элемента группы монодромии, соответствующих аналитическому продолжению этих функций вокруг точек $z = 0$ и $z = 1$: g_0 и g_1 (см. пункт 4). В рассматриваемом случае эти элементы являются 3×3 -матрицами. В частности, матрица g_0 диагональна, что следует из (5.6).

Функция $G(z, \bar{z})$ в уравнении (4.9) в этом случае имеет вид

$$G(z, \bar{z}) = X_1 |I_1(z)|^2 + X_2 |I_2(z)|^2 + X_3 |I_3(z)|^2. \quad (5.7)$$

Она с очевидностью g_0 -инвариантна. Инвариантность относительно g_1 -преобразования имеет место при соответствующем выборе коэффициентов X_i в (5.7). Как и в пункте 4, мы можем представить функции $I_i(z)$ как линейные комбинации решений $\tilde{I}_i(1 - z)$, являющихся каноническими для точки $z = 1$. В базисе функций $\{\tilde{I}_i(1 - z)\}$ матрица g_1 будет диагональной. Имеем соотношение

$$I_i(z) = \sum_j \alpha_{ij} \tilde{I}_j(1 - z), \quad (5.8)$$

подставляя которое в (5.7), находим

$$G(z, \bar{z}) = \sum_i X_i \alpha_{ik} \alpha_{il} \bar{I}_k(1-z) \overline{\bar{I}_l(1-z)}. \quad (5.9)$$

Квадратичная форма $G(z, \bar{z})$ будет g_1 -инвариантна, если матрица $\sum_i X_i \alpha_{ik} \alpha_{il}$ диагональна. Таким образом, мы получаем уравнение

$$\sum_i X_i \alpha_{ik} \alpha_{il} = 0, \quad k \neq l, \quad (5.10)$$

которое определяет коэффициенты X_i (на самом деле их отношения), если известна матрица α_{ij} .

Теперь следует заметить, что, конечно, возникает вопрос о разрешимости системы уравнений (5.10) относительно коэффициентов $\{X_i\}$. Имеет место утверждение, что, если матрица α_{ij} не произвольна, а связана с решениями дифференциального уравнения, как в (5.8), тогда система (5.10) разрешима. Мы проверили это утверждение, используя явную форму матрицы α_{ij} , но, как нам кажется, должна иметь место соответствующая общая теорема.

Остается найти матрицу α_{ij} . Она может быть найдена при помощи техники, аналогичной той, которая была использована в пункте 4 для интегралов второго порядка. Теперь мы трансформируем сначала лишь один из контуров. Он трансформируется двумя разными способами, указанными на рис. 7, а. Затем мы умножаем два полученных интеграла на фазовые множители и вычитаем их один из другого, с тем расчетом, чтобы сократить нежелательный вклад из первого контура. Теперь мы сделаем то же самое со вторым контуром, как показано на рис. 7, б. В результате мы получим первое из соотношений (5.8). Одна из манипуляций над контурами для интеграла $I_2(z)$, изображена на рис. 8. Таким путем мы находим следующее выражение для матричных элементов $\alpha_{ij}(a, b, c; g)$ из соотношения (5.8):

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{s(a) s(a + \frac{1}{2}g)}{s(b+c) s(b+c + \frac{1}{2}g)}, & \alpha_{12} &= \frac{s(a) s(c)}{s(b+c) s(b+c + g)}, \\ \alpha_{13} &= \frac{s(c) s(c + \frac{1}{2}g)}{s(b+c + \frac{1}{2}g) s(b+c + \frac{1}{2}g)}, \\ \alpha_{21} &= -\frac{s(a+b+c + \frac{1}{2}g) s(a + \frac{1}{2}g)}{s(b+c) s(b+c + \frac{1}{2}g)} 2c \left(\frac{1}{2}g \right), \\ \alpha_{23} &= \frac{s(b + \frac{1}{2}g) s(c + \frac{1}{2}g)}{s(b+c + \frac{1}{2}g) s(b+c + g)} 2c \left(\frac{1}{2}g \right), \\ \alpha_{22} &= \frac{s(a+b+c + \frac{1}{2}g) s(c)}{s(b+c) s(b+c + \frac{1}{2}g)} - \frac{s(b + \frac{1}{2}g) s(a)}{s(b+c + \frac{1}{2}g) s(b+c + g)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1(z) &= \text{diagram with points } 0, Z, 1 \text{ and arcs } t_1, t_2 = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{diagram with phases } e^{i\pi(a+b+\frac{g}{2})}, e^{i\pi(b+c+\frac{g}{2})}, e^{i\pi(b+\frac{g}{2})}, e^{i\frac{\pi}{2}g} \\ \text{diagram with phases } e^{-i\pi(a+b+\frac{g}{2})}, e^{-i\pi(b+c+\frac{g}{2})}, e^{-i\pi(b+\frac{g}{2})}, e^{-i\frac{\pi}{2}g} \end{array} \right. \\
 &= \text{diagram with points } 0, Z, 1 = \\
 &= \text{diagram with points } 0, Z, 1 + \text{diagram with points } 0, Z, 1 \\
 &\quad a \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{diagram 1} \\ \text{diagram 2} \end{array} \right. \\
 &= \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{diagram 3} \\ \text{diagram 4} \end{array} \right. \\
 &= \text{diagram 5} + \text{diagram 6} \\
 &= \text{diagram 7} + \text{diagram 8} + \text{diagram 9}
 \end{aligned}$$

б

Рис. 7.

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \text{diagram with two arcs on a line} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{diagram with two arcs and a loop} \\ \text{diagram with two arcs and a loop} \end{array} \right\} \\
 &= \text{diagram with two arcs on a line} = \\
 &= \text{diagram with a loop at 0} + \text{diagram with a loop at 1}
 \end{aligned}$$

Рис. 8.

$$\begin{aligned}
 \alpha_{31} &= \frac{s(a+b+c+\frac{1}{2}g)s(a+b+c+g)}{s(b+c)s(b+c+\frac{1}{2}g)}, \\
 \alpha_{32} &= \frac{s(a+b+c+g)s(b)}{s(b+c)s(b+c+g)}, \\
 \alpha_{33} &= \frac{s(b)s(b+\frac{1}{2}g)}{s(b+c+\frac{1}{2}g)s(b+c+g)}. \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Здесь $s(A) = \sin(\pi A)$, $c(A) = \cos(\pi A)$ и т.д. Интегралы $\tilde{I}_i(1-z)$ в соотношении (5.8) задаются формулой

$$\tilde{I}_i(1-z) = I_i(b, a, c; g; 1-z), \quad (5.12)$$

при этом I_i определяются в (5.3)–(5.5).

Теперь из (5.10) мы находим

$$\begin{aligned}
 \frac{X_1}{X_3} &= \frac{\alpha_{33} \tilde{\alpha}_{31}}{\alpha_{13} \tilde{\alpha}_{33}} = \\
 &= \frac{s(a+b+c+g)s(a+b+c+\frac{1}{2}g)s(b)s(b+\frac{1}{2}g)s(a+c+g)}{s(a)s(a+\frac{1}{2}g)s(c)s(c+\frac{1}{2}g)s(a+c)}, \\
 \frac{X_2}{X_3} &= \frac{\alpha_{33} \tilde{\alpha}_{32}}{\alpha_{23} \tilde{\alpha}_{33}} = \frac{s(a+b+c+g)s(a+c+\frac{1}{2}g)s(b)}{s(c+\frac{1}{2}g)s(a+\frac{1}{2}g)s(a+c)2c(\frac{1}{2}g)}. \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\alpha}_{ij}$ является матрицей в соотношении, обратном к (5.12):

$$\tilde{I}_i(1-z) = \sum_j \tilde{\alpha}_{ij} I_j(z). \quad (5.14)$$

Очевидно, что

$$\tilde{\alpha}_{ij}(a, b, c; g) = \alpha_{ij}^{-1}(a, b, c; g) = \alpha_{ij}(b, a, c; g). \quad (5.15)$$

Теперь, собирая все множители и возвращаясь к общим значениям z_1, z_3, z_4 , мы получаем (с точностью до общего множителя) выраже-

ние для коррелятора третьего порядка:

$$\begin{aligned}
 & \langle \phi_{n_1, m_1}(z_1) \phi_{n_2, m_2}(z_2) \phi_{n_3, m_3}(z_3) \phi_{n_4, m_4}(z_4) \rangle \sim \\
 & \sim \frac{|z_{13}|^{2[\Delta(\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_-) - \Delta_1 - \Delta_3 + 4\alpha_2 \alpha_-]} |z_{24}|^{2[\Delta(\alpha_2 + \alpha_4) - \Delta_2 - \Delta_4 + 4\alpha_2 \alpha_-]}}{|z_{12}|^{-2[\Delta(\alpha_1 + \alpha_2) - \Delta_1 - \Delta_2]} |z_{23}|^{-2[\Delta(\alpha_2 + \alpha_3) - \Delta_2 - \Delta_3]}} \times \\
 & \times |z_{34}|^{-2[\Delta(\alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_-) - \Delta_3 - \Delta_4]} |z_{14}|^{-2[\Delta(\alpha_1 + \alpha_4 + 2\alpha_-) - \Delta_1 - \Delta_4]} \times \\
 & \times \left\{ s(a + b + c + g) s\left(a + b + c + \frac{1}{2}g\right) s(b) s\left(b + \frac{1}{2}g\right) s(a + c + g) \times \right. \\
 & \times 2c \left(\frac{1}{2}g\right) |I_1(a, b, c; g; \eta)|^2 + s(a + b + c + g) s\left(a + c + \frac{1}{2}g\right) \times \\
 & \times s(b) s(a) s(c) |I_2(a, b, c; g; \eta)|^2 + s(a) s\left(a + \frac{1}{2}g\right) s(c) s\left(c + \frac{1}{2}g\right) \times \\
 & \left. \times s(a + c) 2c \left(\frac{1}{2}g\right) |I_3(a, b, c; g; \eta)|^2 \right\}. \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Здесь $\eta = z_{12}z_{34}/z_{13}z_{24}$; параметры определены так же, как в (5.2), а конформные размерности $\Delta(\alpha_i)$ задаются кулоновскими параметрами $\alpha_i = \alpha_{n_i, m_i}$ при помощи формулы Каца (3.35).

По причинам, отмеченным в пункте 4, удобно ввести нормированные функции $\mathcal{F}_i(a, b, c; g; z)$, имеющие при $z \rightarrow 0$ следующие разложения:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_i(a, b, c; g; z) &= \frac{1}{N_i} I_i(z) = z^{\rho_i^{(0)}} \left(1 + \alpha_i z + \beta_i \frac{1}{2} z^2 + \dots \right), \\
 \rho_1^{(0)} &= 0, \quad \rho_2^{(0)} = 1 + a + c, \quad \rho_3^{(0)} = 2 + 2a + 2c + g. \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Здесь нормировочные числа $\{N_i\}$ задаются формулами:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{\Gamma(g)}{\Gamma(\frac{1}{2}g)} \times \\
 & \times \frac{\Gamma(-1 - a - b - c - g) \Gamma(-1 - a - b - c - \frac{1}{2}g) \Gamma(1 + b) \Gamma(1 + b + \frac{1}{2}g)}{\Gamma(-a - c) \Gamma(-a - c - \frac{1}{2}g)}, \\
 N_2 &= \frac{\Gamma(-1 - a - b - c - g) \Gamma(1 + b)}{\Gamma(-a - c - g)} \frac{\Gamma(1 + a) \Gamma(1 + c)}{\Gamma(2 + a + c)}, \\
 N_3 &= \frac{\Gamma(g)}{\Gamma(\frac{1}{2}g)} \frac{\Gamma(1 + a) \Gamma(1 + a + \frac{1}{2}g) \Gamma(1 + c) \Gamma(1 + c + \frac{1}{2}g)}{\Gamma(2 + a + c + \frac{1}{2}g) \Gamma(2 + a + c + g)}. \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

Наконец, приведем два явных выражения для корреляционных функций в $O(n)$ -модели, которые вытекают из общей формулы (5.16). Это — четырехточечные коррелятор $\langle \varepsilon \varepsilon \varepsilon \varepsilon \rangle$ операторов энергии и коррелятор $\langle \sigma \varepsilon \varepsilon \sigma \rangle$ операторов спина и энергии. Используя параметр y ,

определенный в пункте 2, мы получим следующий результат:

$$\langle \varepsilon \varepsilon \varepsilon \varepsilon \rangle \sim |z_{12} z_{23} z_{34} z_{14}|^{4-2y} |z_{13} z_{24}|^{8y-12} \times \\ \times \sum_i A_i |\mathcal{F}_i(y-2, y-2, y-2; 2-y; \eta)|^2. \quad (5.19)$$

Здесь

$$A_1 = 2c \left(\frac{1}{2}y\right) s\left(\frac{5}{2}y\right) s(2y) s^2(y) s\left(\frac{1}{2}y\right) (N_1)^2, \\ A_2 = s(2y) s\left(\frac{3}{2}y\right) s^3(y) (N_2)^2, \\ A_3 = 2c \left(\frac{1}{2}y\right) s(2y) s^2(y) s^2\left(\frac{1}{2}y\right) (N_3)^2, \\ N_1 = \frac{\Gamma(2-y)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}y)} \frac{\Gamma(1-2y) \Gamma(4-\frac{5}{2}y) \Gamma(-1+y) \Gamma(\frac{1}{2}y)}{\Gamma(4-2y) \Gamma(3-\frac{3}{2}y)}, \\ N_2 = \frac{\Gamma(1-2y) \Gamma(-1+y)}{\Gamma(2-y)} \frac{\Gamma^2(-1+y)}{\Gamma(-2+2y)}, \\ N_3 = \frac{\Gamma(2-y)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}y)} \frac{\Gamma^2(-1+y) \Gamma^2(\frac{1}{2}y)}{\Gamma(-1+\frac{3}{2}y) \Gamma(y)}. \quad (5.20)$$

Аналогичное выражение находится для другого коррелятора:

$$\langle \sigma \varepsilon \varepsilon \sigma \rangle \sim |z_{12} z_{34}|^{1+y} |z_{13} z_{24}|^{5y-9} |z_{23}|^{4-2y} |z_{14}|^{(31-40y+13y^2)/2(2-y)} \times \\ \times \sum_{i=1}^3 B_i \left| \mathcal{F}_i\left(-\frac{1}{2}(1+y), y-2, y-2; 2-y; \eta\right) \right|^2. \quad (5.21)$$

Выражения для коэффициентов B_i из приведенных формул вытекают из уравнений (5.16) и (5.18). Как было установлено в пункте 2, параметр y связан с параметром n в $O(n)$ -модели при помощи формулы (которая следует из (2.20), (2.23)):

$$n = 2 \cos \frac{\pi y}{2-y}. \quad (5.22)$$

6. Выводы и обсуждение результатов

В этой статье мы описали технику вычисления многоточечных корреляционных функций в $2D$ -статистических моделях в критической точке, которая использует аппарат конформной алгебры, введенный недавно для этих целей Белаиным, Поляковым и Замолодчиковым [1].

Мы нашли конформные представления для серии моделей Поттса и $O(n)$ -моделей (см. [2] и пункт 2 этой статьи). Кроме того, Фридан,

Кью и Шенкер нашли представления для критических моделей Поттса [18].

Оказывается, что четырехточечные корреляционные функции в этих системах описываются высшими аналитическими функциями типа функций Фукса (см. предыдущую сноску). Простейшие из них являются гипергеометрическими функциями.

В этой статье мы также изучили некоторые аналитические свойства таких функций, особенно относительно их соотношений монодромии, которые необходимы для вычисления корреляционных функций (в соответствующих квантовых теориях поля — гриновских функций).

Детальные вычисления были представлены в этой статье лишь для функций третьего порядка. Мы также нашли общие выражения для четырехточечных гриновских функций в конформных теориях этого типа (абелевых теориях). Развитие этих вычислений мы оставляем до нашей следующей статьи [7], так как они становятся гораздо сложнее и требуют много места.

Сделаем несколько замечаний по нашей теме.

Следует отметить, что все вычисления корреляционных функций, приведенные в данной статье, проводились для случая, когда среди аналитических функций отсутствовало вырождение. Это возможно, если размерности базисных конформных операторов различаются на целые числа. Точнее, в терминах операторной алгебры вырожденность появляется, когда конформные размерности операторов, возникающих в промежуточных каналах четырехточечных гриновских функций, различаются на целые числа. Если же это не имеет места ($\rho_i^{(0)} - \rho_j^{(0)} \neq \text{целое число}$ в (5.17)), то интегралы $I_i(z)$ дают независимые решения соответствующих уравнений.

Вырожденности приводят к появлению нулей или полюсов в структурных коэффициентах $\{X_i\}$ корреляторов (см. пункты 4, 5), как функциях параметров. В таких аномальных случаях следует проявлять осторожность и определять необходимые пределы.

Проведенная нами проверка заключается в следующем. Как было показано в пункте 2, в алгебре модели Изинга операторы $\phi_{1,2} \sim \varepsilon$ и $\phi_{3,1}$ тождественно равны (см. [1]). С другой стороны, мы нашли общее выражение для коррелятора $\langle \phi_{3,1} \phi_{3,1} \phi_{3,1} \phi_{3,1} \rangle$, который должен сводиться к коррелятору $\langle \phi_{1,2} \phi_{1,2} \phi_{1,2} \phi_{1,2} \rangle$ в ИМ точке. Мы проверили, что это имеет место, но этот предел очень тонкий. В частности, некоторые из коэффициентов A_i в

$$\langle \phi_{31} \phi_{31} \phi_{31} \phi_{31} \rangle \sim \sum_i A_i |\mathcal{F}_i(z)|^2 \quad (6.1)$$

стремятся к нулю, когда мы приближаемся к ИМ точке. Но некоторые из коэффициентов разложения функций $\mathcal{F}_i(z)$ сами становятся расходящимися, приводя к конечному результату.

Другой момент заключается в том, что в $C = 1$ конформной теории корреляционные функции сводятся к простым алгебраическим функциям. Для моделей Поттса и $O(n)$ -моделей предел $C \rightarrow 1$ соответствует пределу $q \rightarrow 4$, $n \rightarrow 2$ (см. пункт 2). В результате все многоточные корреляционные функции в $q = 4$ и $n = 2$ - моделях имеют простой алгебраический вид. Мы прослеживаем это упрощение для корреляторов $\langle \epsilon \epsilon \epsilon \epsilon \rangle$ и $\langle \sigma \epsilon \epsilon \sigma \rangle$ в модели Поттса в приложении Б. То же самое может быть проверено для интегралов третьего порядка пункта 5.

Последнее наше замечание касается существования корреляционных функций, не подчиняющихся стандартным правилам. Здесь мы приводим пример следующего коррелятора:

$$\langle \phi_{12} \phi_{14} \phi_{14} \phi_{\overline{14}} \rangle. \quad (6.2)$$

Легко проверить, что соответствующий интеграл является функцией третьего порядка:

$$\int dt_1 \int dt_2 \langle V_{12}(0) V_{14}(z) V_{14}(1) V_{\overline{14}}(\infty) J_+(t_1) J_+(t_2) \rangle. \quad (6.3)$$

Этот коррелятор, являясь коррелятором третьего порядка, не содержит операторов третьего порядка $\phi_{1,3}$ или $\phi_{3,1}$. Не имеется также интегралов второго порядка для множества операторов в (6.2). Все же мы должны включить в теорию коррелятор (6.2), так как в противном случае возникли бы проблемы в соотношениях операторной алгебры.

Некоторые замечания по этому вопросу были сделаны в пункте 5. Детальное изучение проблем операторной алгебры в этой теории остается для нашей следующей статьи [7].

Мы благодарим А.А. Белавина, А.М. Полякова и А.Б. Замолодчикова за полезные и стимулирующие обсуждения. Один из нас (Вл.С.Д.) благодарен институту Nordita за финансовую поддержку и за продолжительную командировку в этот институт, где была проделана последняя часть этой работы. Он особенно признателен А. Лютеру.

Приложение А

Рассмотрим аналитическую функцию

$$\begin{aligned} I \left(\begin{matrix} a & b \\ c & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} c & b \\ c & \end{matrix} ; g; z \right) &\equiv I(a, b, c; g; z) = \\ &= \int_{C_1} dt_1 \int_{C_2} dt_2 t_1^a (t_1 - 1)^b (t_1 - z)^c t_2^a (t_2 - 1)^b (t_2 - z)^c (t_1 - t_2)^g. \end{aligned} \quad (A.1)$$

Предполагается, что мы можем интегрировать по частям, и концы контуров C_1 и C_2 при этом не дают вклада. Иными словами, предполагается, что интегралы всегда сходятся.

Легко проверить, что функция:

$$I\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} d & e \\ f \end{matrix}; g; z\right)$$

имеет следующие свойства:

$$I\left(\begin{matrix} a & b \\ c+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} e & f \\ c \end{matrix}; g-1; z\right) - I\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} e & f \\ c+1 \end{matrix}; g-1; z\right) = \\ = I\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} e & f \\ c \end{matrix}; g; z\right), \quad (\text{A.2})$$

$$I\left(\begin{matrix} a & b \\ c+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} e & f \\ c-1 \end{matrix}; g-1; z\right) - I\left(\begin{matrix} a & b \\ c-1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} e & f \\ c+1 \end{matrix}; g-1; z\right) = \\ = I\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} e & f \\ c-1 \end{matrix}; g; z\right) + I\left(\begin{matrix} a & b \\ c-1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} e & f \\ c \end{matrix}; g; z\right), \quad (\text{A.3})$$

$$z I\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} e & f \\ c \end{matrix}; g; z\right) = I\left(\begin{matrix} a+1 & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} e & f \\ c \end{matrix}; g; z\right) - \\ - I\left(\begin{matrix} a & b \\ c+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} e & f \\ c \end{matrix}; g; z\right), \quad (\text{A.4})$$

$$(z-1) I\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} e & f \\ c \end{matrix}; g; z\right) = I\left(\begin{matrix} a & b+1 \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} e & f \\ c \end{matrix}; g; z\right) - \\ - I\left(\begin{matrix} a & b \\ c+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} e & f \\ c \end{matrix}; g; z\right), \quad (\text{A.5})$$

$$a I\left(\begin{matrix} a-1 & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} d & e \\ f \end{matrix}; g; z\right) + b I\left(\begin{matrix} a & b-1 \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} d & e \\ f \end{matrix}; g; z\right) + \\ + c I\left(\begin{matrix} a & b \\ c-1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} d & e \\ f \end{matrix}; g; z\right) + g I\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} d & e \\ f \end{matrix}; g-1; z\right) = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$d I\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} d-1 & e \\ f \end{matrix}; g; z\right) + e I\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} d & e-1 \\ f \end{matrix}; g; z\right) + \\ + L I\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} d & e \\ f-1 \end{matrix}; g; z\right) - g I\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} d & e \\ f \end{matrix}; g-1; z\right) = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$I\left(\begin{matrix} a+1 & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} d & e \\ f-1 \end{matrix}; g-1; z\right) - I\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} d+1 & e \\ f \end{matrix}; g-1; z\right) = \\ = I\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} d & e \\ f \end{matrix}; g; z\right). \quad (\text{A.8})$$

Используя соотношения (А.2)–(А.8), мы можем показать, что функция

$$I\left(\begin{matrix} a & b \\ c & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} a & b \\ c & \end{matrix}; g; z\right) \equiv I(a, b, c; g; z)$$

удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} z^2(z-1)^2 I'''(z) + (K_1 z + K_2(z-1)) z(z-1) I''(z) + \\ + (L_1 z^2 + L_2(z-1)^2 + L_3 z(z-1)) I'(z) + \\ + (M_1 z + M_2(z-1)) I(z) = 0. \quad (\text{А.9}) \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты выражаются через параметры a, b, c и g функции $I(a, b, c; g; z)$ из уравнения (А.1) при помощи соотношений

$$\begin{aligned} K_1 &= -(g + 3b + 3c), \\ K_2 &= -(g + 3a + 3c), \\ L_1 &= (b + c)(2b + 2c + g + 1), \\ L_2 &= (a + c)(2a + 2c + g + 1), \\ L_3 &= (b + c)(2a + 2c + g + 1) + (a + c)(2b + 2c + g + 1) + \\ &\quad + (c - 1)(a + b + c) + (3c + g)(a + b + c + g + 1), \\ M_1 &= -c(2b + 2c + g + 1)(2a + 2b + 2c + g + 2), \\ M_2 &= -c(2a + 2c + g + 1)(2a + 2b + 2c + g + 2). \quad (\text{А.10}) \end{aligned}$$

Приложение Б

Мы покажем, как корреляторы в пределе $C \rightarrow 1$ сводятся к простым алгебраическим функциям, используя для этого относительно простой пример корреляторов $\langle \varepsilon \varepsilon \varepsilon \varepsilon \rangle$ и $\langle \sigma \varepsilon \varepsilon \sigma \rangle$ в модели Поттса. Для этой модели предел $C \rightarrow 1$ соответствует пределу $q \rightarrow 4$ (см. (2.16), (2.17)).

Из (3.40), (4.18) в калибровке

$$z_1 = 0, \quad z_2 = z, \quad z_3 = 1, \quad z_4 \rightarrow \infty$$

мы получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(0) \varepsilon(z) \varepsilon(1) \varepsilon(\infty) \rangle \sim |z(1-z)|^{1+\delta} \left\{ s(3+3\delta) s(1+\delta) \times \right. \\ \times \left| \frac{\Gamma(2+3\delta) \Gamma(-\delta)}{\Gamma(2+2\delta)} \right|^2 |F(1+\delta, 2+3\delta; 2+2\delta; z)|^2 + \\ + |z(1-z)|^{2(-1-2\delta)} s(1+\delta) s(1+\delta) \times \\ \times \left| \frac{\Gamma(-\delta) \Gamma(-\delta)}{\Gamma(-2\delta)} \right|^2 |F(-1-3\delta, -\delta; -2\delta; z)|^2 \left. \right\}, \quad (\text{Б.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma(0) \varepsilon(z) \varepsilon(1) \sigma(\infty) \rangle &\sim |z|^{-1/2-3\delta/2} |1-z|^{1+\delta} \times \\
 &\times \left\{ s\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\delta\right) s(\delta) \left| \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\delta) \Gamma(-\delta)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\delta)} \right|^2 \left| F\left(1+\delta, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}-\delta; z\right) \right|^2 + \right. \\
 &\quad + |z|^{2(1/2+\delta/2)} |1-z|^{2(-1-2\delta)} s\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\delta\right) s(\delta) \times \\
 &\quad \times \left. \left| \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\delta) \Gamma(-\delta)}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\delta)} \right|^2 \left| F\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\delta, -\delta; \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\delta; z\right) \right|^2 \right\}. \quad (\text{Б.2})
 \end{aligned}$$

Здесь мы использовали следующие выражения для параметров:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &\sim \phi_{1,2}, \quad \alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \alpha_+, \\
 a = b = c &= 2\alpha_{1,2} \alpha_+ = -\alpha_+^2 \approx -1 - \delta, \\
 \Delta(\alpha_i) + \Delta(\alpha_j) - \Delta(\alpha_i + \alpha_j) &= -2\alpha_i \alpha_j, \\
 4\alpha_{1,2}^2 &= \alpha_+^2 \approx 1 + \delta
 \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

в случае коррелятора (Б.1) и

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &\sim \phi_{1,2}, \quad \sigma \sim \phi_{N,N-1}, \quad \alpha_{N,N-1} = \frac{1}{2}(1-N) \alpha_- + \frac{1}{2}(2-N) \alpha_+, \\
 a = 2\alpha_{N,N-1} \alpha_+ &\approx \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \delta, \quad b = c \approx -1 - \delta, \\
 4\alpha_{N,N-1} \alpha_{1,2} &= -2\alpha_{N,N-1} \alpha_+ \approx -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \delta
 \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

в случае коррелятора (Б.2). В обоих случаях $(\alpha_+)^{-2} = (\alpha_-)^2 = 1 - 1/2N \equiv 1 - \delta$.

Из $C \rightarrow 1$ следует, что $(\alpha_+)^2 \rightarrow 1$, т.е. $\delta \rightarrow 0$ (см. (3.25), (3.32)). В этом пределе мы получаем результат:

$$\langle \varepsilon \varepsilon \varepsilon \varepsilon \rangle \sim \frac{1}{|z(1-z)|} + \frac{|z|}{|1-z|} + \frac{|1-z|}{|z|}, \quad (\text{Б.5})$$

$$\langle \sigma \varepsilon \varepsilon \sigma \rangle \sim \frac{1}{|z|^{1/2} |1-z|} + \frac{|z|^{1/2}}{|1-z|}. \quad (\text{Б.6})$$

Легко проверить, что можно было бы получить тот же самый результат путем усреднения экспонент свободных полей $\varphi(z)$:

$$\begin{aligned}
 &\langle \cos(\alpha_\varepsilon \varphi(0)) \cos(\alpha_\varepsilon \varphi(z)) \cos(\alpha_\varepsilon \varphi(1)) \cos(\alpha_\varepsilon \varphi(\infty)) \rangle, \\
 \alpha_\varepsilon = \alpha_{1,2} &\rightarrow -\frac{1}{2}, \quad \delta = \frac{1}{2N} \rightarrow 0;
 \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

$$\begin{aligned}
 &\langle \cos(\alpha_\sigma \varphi(0)) \cos(\alpha_\sigma \varphi(z)) \cos(\alpha_\sigma \varphi(1)) \cos(\alpha_\sigma \varphi(\infty)) \rangle, \\
 \alpha_\sigma = \alpha_{N,N-1} &\rightarrow \frac{1}{4}, \quad \delta = \frac{1}{2N} \rightarrow 0.
 \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

Литература

1. *Belavin A.A., Polyakov A.M. and Zamolodchikov A.B.*, STATPHYS-15, Edinburg (1983); J. Stat. Phys. 34 (1984) 763; Nucl. Phys. B241 (1984) 333.
2. *Dotsenko V.I.*, STATPHYS-15, Edinburg (1983), J. Stat. Phys. 34 (1984) 781; Nucl. Phys. B235 [FS 11] (1984) 54.
3. *Поляков А.М.*, Письма в ЖЭТФ 12 (1970) 538 [JETP Lett. 12 (1970) 381]; ЖЭТФ 66 (1974) 23 [JETP 39 (1974) 10].
4. *Kadanoff L.P.*, Phys. Rev. 188 (1969) 859.
5. *Luter A. and Peschel I.*, Phys. Rev. B12 (1975) 3908.
6. *Фейгин Б.Л. и Фукс Д.Б.*, Москва, препринт (1983).
7. *Dotsenko V.I. and Fateev V.A.*, to be pubshed.
8. *Wu F.Y.*, Rev. Mod. Phys. 54 (1982) 235.
9. *Nienhuis B.*, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1062.
10. *Кас V.G.*, in Proc. Int. Congress of Mathematicians, Helsinki, 1978; Lecture Notes in Physics 94 (1979) 441; *Фейгин Б.Л. и Фукс Д.Б.*, Функ. анал. приложен. 16 (1982) 47 [Funct. Anal. Appl. 16 (1982) 114].
11. *den Nijs M.P.M.*, Phys J.. A12 (1979) 1857.
12. *Nienhuis B.*, J. Phys. A15 (1982) 199.
13. *Nienhuis B., Riedel E.K. and Schik M.*, J. Phys. A13 (1980) L189.
14. *Pearson R.B.*, Phys. Rev. B22 (1980) 2579.
15. *den Nijs M.P.M.*, Phys. Rev. B27 (1983) 1674.
16. *Temperley H.N.V. and Lieb E.H.*, Proc. Roy. Soc. A322 (1971) 251.
17. *Baxter R.J., Kelland S.B. and Wu F.Y.*, J. Phys. A9 (1976) 397.
18. *Friedan D., Qui Z. and Shenker S.*, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 1575.
19. *Gardy J. and Hamber H.W.*, Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 499.
20. *Замолодчиков А.Б.*, частное сообщение.
21. *Nienhuis B.*, private communication.

АЛГЕБРА ТОКОВ И ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ВЕССА–ЗУМИНО

Замолодчиков А.Б., Книжник В.Г.

Nuclear Physics. B247 (1984). P. 83–103

Изучается двумерная квантовая теория поля, инвариантная относительно конформной алгебры (Вирасоро) и неабелевой алгебры токов (Каца–Мули). Модель Весса–Зумино связывается со специальным случаем представлений этих алгебр, при этом конформные генераторы выражаются квадратично через токи. Точно найдены аномальные размерности полей Весса–Зумино и показано, что многоточечные корреляционные функции удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям. В частности, доказываются правила неабелевой бозонизации Виттена.

1. Введение

В недавних статьях [1–3] были открыты некоторые важные свойства двумерной σ -модели с действием Весса–Зумино

$$S_{\lambda,k}(g) = \frac{1}{4\lambda^2} \int \text{tr}(\partial_\mu g^{-1} \partial_\mu g) d^2\xi + k \Gamma(g). \quad (1.1)$$

В (1.1) матричное поле $g(\xi)$ рассматривается как элемент некоторой полупростой группы G , $\xi^\mu = (\xi^1, \xi^2)$ являются координатами двумерного пространства, λ^2 и k — безразмерные константы взаимодействия, при этом k обязательно целое число [1, 2]. Слагаемое Весса–Зумино $\Gamma(g)$ определяется интегралом

$$\Gamma(g) = \frac{1}{24\pi} \int d^3X e^{\alpha\beta\gamma} \text{tr}(g^{-1} \partial_\alpha g g^{-1} \partial_\beta g g^{-1} \partial_\gamma g) \quad (1.2)$$

над трехмерным шаром с координатами X^α ; граница шара отождествляется с двумерным пространством [2]. Граничные значения $g(\xi)$ определяют выражение (1.2), которое кратно 2π [1].

Если $k = 0$, то действие (1.1) сводится к обыкновенной σ -модели, которая, как хорошо известно, является асимптотически свободной и на самом деле массивной. Эта модель точно решена в работах [4, 5]. Если брать $k = 1, 2, \dots$, то свойства теории будут кардинально меняться, как это было показано Виттеном [2], Поляковым и Вигманом [3]. Ренорм-группа обладает инфракрасно-стабильным фикс-пойнтом

$$\lambda^2 = \frac{4\pi}{k}, \quad (1.3)$$

и, таким образом, эффективная теория является безмассовой, а ее свойства на больших масштабах определяются действием

$$S_k(g) = k W(g), \quad (1.4)$$

где

$$W(g) = \left\{ \frac{1}{16\pi} \int \text{tr}(\partial_\mu g^{-1} \partial_\mu g) d^2\xi + \Gamma(g) \right\}. \quad (1.5)$$

В дальнейшем мы будем называть теорию (1.4) моделью Весса-Зумино¹⁾.

Важнейшим свойством действия (1.4) является его инвариантность относительно бесконечномерной алгебры токов (Каца-Муди) [2, 3, 8]. Действие (1.4) остается инвариантным относительно преобразований

$$g(\xi) \rightarrow \Omega(z) g(\xi) \bar{\Omega}^{-1}(\bar{z}), \quad (1.6)$$

где $\Omega(z)$ и $\bar{\Omega}(\bar{z})$ — произвольные G -значные матрицы, аналитически зависящие от комплексных координат

$$\begin{aligned} z &= \xi^1 + i \xi^2, \\ \bar{z} &= \xi^1 - i \xi^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

соответственно. (Здесь мы придерживаемся евклидовой версии теории; в пространстве-времени Минковского переменные (1.7) являются координатами светового конуса.) Мы можем легко убедиться в существовании симметрии (1.6), используя следующее замечательное соотношение [3, 8]:

$$W(gh^{-1}) = W(g) + W(h) + \frac{\text{tr}}{16\pi} \int (g^{-1} \partial_{\bar{z}} g h^{-1} \partial_z h) d^2\xi, \quad (1.8)$$

справедливое для функционала (1.5). Заметим, что группа (1.6) обобщает обычную $G \times G$ -симметрию кирального поля и может быть также представлена как прямое произведение “левой” и “правой” калибровочных групп; мы будем обозначать эту группу как $G(z) \times G(\bar{z})$.

Симметрия (1.6) порождает бесконечное множество сохраняющихся токов, которые могут быть найдены при помощи уравнений

$$\partial_{\bar{z}} J = 0, \quad \partial_z \bar{J} = 0, \quad (1.9)$$

где базисные токи J и \bar{J} определяются по формулам

$$\begin{aligned} J &= J^a t^a = -\frac{1}{2} k \partial_z g g^{-1}, \\ \bar{J} &= \bar{J}^a t^a = -\frac{1}{2} k g^{-1} \partial_{\bar{z}} g. \end{aligned} \quad (1.10)$$

¹⁾ Теория с фиксированной точкой (1.4) заслуживает особого внимания, так как ее свойства аналогичны свойствам квантовой теории Лиувилля, связанной со струной Полякова [7].

Эти токи соответствуют образующим групп $G(z)$ и $G(\bar{z})$, соответственно [2, 3]. Здесь t^a — антиэрмитовы матрицы, представляющие (для поля $g(\xi)$) алгебру Ли

$$[t^a, t^b] = f^{abc} t^c \quad (1.11)$$

группы G , f^{abc} — структурные константы. Вследствие (1.9) имеем

$$J^a = J^a(z), \quad \bar{J}^a = \bar{J}^a(\bar{z}). \quad (1.12)$$

Вариации полей (1.10) при бесконечно малых преобразованиях (1.6) с

$$\Omega(z) = I + \omega(z) = I + \omega^a(z) t^a, \quad (1.13a)$$

$$\bar{\Omega}(\bar{z}) = I + \bar{\omega}(\bar{z}) = I + \bar{\omega}^a(\bar{z}) t^a, \quad (1.13b)$$

описываются формулами

$$\begin{aligned} \delta_\omega J(z) &= [\omega(z), J(z)] + \frac{1}{2} k \omega'(z), \\ \delta_{\bar{\omega}} \bar{J}(\bar{z}) &= [\bar{\omega}(\bar{z}), \bar{J}(\bar{z})] + \frac{1}{2} k \bar{\omega}'(\bar{z}), \end{aligned} \quad (1.14)$$

которые показывают, что генераторы J (\bar{J}) группы $G(z)$ ($G(\bar{z})$) представляют алгебру Каца–Мури [2] с центральным зарядом k^2). Так как $\delta_\omega \bar{J} = \delta_{\bar{\omega}} J = 0$, то генераторы J и \bar{J} взаимно коммутативны.

В случае $G = O(N)$ группа $G(z) \times G(\bar{z})$ описывает симметрию свободной безмассовой N -компонентной фермионной майорановской теории с действием

$$S_f(\psi, \bar{\psi}) = \frac{1}{2} \int \sum_{\alpha=1}^N [\psi_\alpha \partial_{\bar{z}} \psi_\alpha + \bar{\psi}_\alpha \partial_z \bar{\psi}_\alpha] d^2 \xi, \quad (1.15)$$

где ψ и $\bar{\psi}$ — “левая” и “правая” компоненты фермионных полей. На самом деле теории (1.4) и (1.15) связаны между собой. Виттенем было показано [2], что модель Весса–Зумино с группой $G = O(N)$ и $k = 1$ эквивалентна свободной фермионной теории (1.15), при этом поля (1.10) совпадают с соответствующими токами в теории (1.15):

$$J_{\alpha\alpha'}(z) = :\psi_\alpha(z) \psi_{\alpha'}(z):, \quad \bar{J}_{\beta\beta'}(\bar{z}) = :\bar{\psi}_\beta(\bar{z}) \bar{\psi}_{\beta'}(\bar{z}):. \quad (1.16)$$

²⁾ Очевидно, что расходящиеся перенормировки целочисленной “константы связи” k в теории (1.1) отсутствуют. Однако конечная перенормировка типа

$$k_0 \rightarrow k = k_0 + \Delta k,$$

где k_0 является множителем при “затравочном” действии (1.4) и Δk — некоторое целое число, не может быть исключена априори. Однопетлевое вычисление показывает, что $\Delta k = 0$.

Этот результат непосредственно следует из того факта, что токи в моделях (1.14) и (1.15) являются генераторами одной и той же алгебры. Более того, Виттенем было предложено локальное выражение для поля $g(\xi) = g_{\alpha\beta}(\xi)$ в терминах фермионных полей $\psi, \bar{\psi}$:

$$M g_{\alpha\beta}(z, \bar{z}) = :\psi_{\alpha}(z) \bar{\psi}_{\beta}(\bar{z}):, \quad (1.17)$$

где M — массовый параметр, зависящий от схемы регуляризации. Аналогичная формула (с небольшими изменениями, см. [8] и пункт 4) связывает модель (1.4) в случае $G = U(N)$, $k = 1$ с теорией N -компонентных заряженных ферми-полей. Формулы (1.16) и (1.17) представляют собой виттеновские правила неабелевой бозонизации.

Так как в фиксированной точке (1.3) конформная аномалия исчезает, то теория Весса–Зумино (1.4) инвариантна также относительно бесконечномерной группы координатных преобразований

$$z \rightarrow \zeta(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{\zeta}(\bar{z}) \quad (1.18)$$

с произвольными аналитическими функциями ζ и $\bar{\zeta}$; эти преобразования образуют конформную группу двумерного пространства. В конформной квантовой теории локальные поля, такие как $g(z, \bar{z})$ в (1.4), могут приобрести аномальные размерности, то есть при подстановке (1.18) преобразуются согласно формуле

$$g(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^{\Delta} \left(\frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}} \right)^{\bar{\Delta}} g(\zeta, \bar{\zeta}) \quad (1.19)$$

(с вещественными положительными Δ и $\bar{\Delta}$). Очевидно, что для бесспинового поля $g(z, \bar{z})$ из (1.4) Δ и $\bar{\Delta}$ должны совпадать.

В этой статье мы изучаем модель Весса–Зумино с произвольным целым k . Используя бесконечномерную симметрию (1.6), мы точно вычисляем аномальные размерности и развиваем метод вычисления многоточечных корреляционных функций (функций Грина)

$$\langle g(z_1, \bar{z}_1) \dots g(z_N, \bar{z}_N) \rangle, \quad (1.20)$$

некоторые из которых строятся явно. Мы применяем технику, аналогичную предложенной в [9] для двумерных конформных теорий поля. В результате мы найдем, что поле $g(z, \bar{z})$ (так же, как и некоторые другие “сложные” поля теории) ассоциировано с вырожденным представлением алгебры симметрии (полупрямого произведения алгебр токов и Вирасоро) модели (1.4); таким образом, корреляционные функции (1.20) удовлетворяют специальным линейным дифференциальным уравнениям. Вместе с общими требованиями кроссинг-симметрии эти уравнения полностью определяют функции (1.20). В частном случае $G = U(N)$ или $O(N)$ и $k = 1$ из нашего результата следуют соотношения (1.17). При $k > 1$ корреляционные функции (1.20) оказываются более сложными и теорию (1.4) труднее

связать каким-либо локальным образом со свободными полями. Оказывается, что в теории с $k > 1$ поля $g(\xi)$ и другие локальные поля имеют нетривиальные аномальные размерности.

Поляков и Вигман в работе [3] сумели точно решить модель (1.1) (с произвольным λ^2) при помощи техники анзаца Бете. Наш подход полностью основан на симметрии (1.6) и конформной симметрии и, таким образом, ограничен фикс-поинт-теорией (1.4). Однако он дает более детальную информацию о теории (1.4); в частности, за рамки возможностей метода анзаца Бете выходит вычисление корреляционных функций типа (1.20). Стоит также отметить, что корреляционные функции модели (1.4), изучаемые в этой статье, описывают точную инфракрасную асимптотику общей модели (1.1).

2. Основные свойства конформной квантовой теории поля, инвариантные относительно алгебры токов

Тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}(\xi)$ конформной квантовой теории поля удовлетворяет, кроме обычного уравнения $\partial_\mu T^{\mu\nu}(\xi) = 0$, условию отсутствия следа: $T^\mu_\mu(\xi) = 0$. В двумерном случае эти два уравнения могут быть сведены к следующим уравнениям:

$$\partial_{\bar{z}} T = 0, \quad \partial_z \bar{T} = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} T &= T_{11} - T_{22} + 2i T_{12}, \\ \bar{T} &= T_{11} - T_{22} - 2i T_{12}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вследствие (2.1) мы будем писать

$$T = T(z), \quad \bar{T} = \bar{T}(\bar{z}). \quad (2.3)$$

В теории поля операторы (2.2) определяют множество генераторов, соответствующих бесконечно малым конформным преобразованиям

$$z \rightarrow z + \varepsilon(z), \quad (2.4a)$$

$$\bar{z} \rightarrow \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z}), \quad (2.4b)$$

при этом поле T ассоциировано с бесконечно малыми подстановками переменной z вида (2.4a), а поле \bar{T} играет ту же роль для переменной \bar{z} [9]. Если кроме конформной симметрии теория поля инвариантна относительно преобразований (1.6), то существуют также локальные поля

$$J(z) = J^a(z) t^a, \quad \bar{J}(\bar{z}) = \bar{J}^a(\bar{z}) t^a, \quad (2.5)$$

удовлетворяющие уравнениям (1.9) и представляющие генераторы $G(z)$ и $G(\bar{z})$, соответственно. Эти утверждения имеют следующие точ-

ные значения. Рассмотрим корреляционные функции вида

$$\langle T(z) A_{j_1}(z_1, \bar{z}_1) \dots A_{j_N}(z_N, \bar{z}_N) \rangle, \quad (2.6a)$$

$$\langle J^a(z) A_{j_1}(z_1, \bar{z}_1) \dots A_{j_N}(z_N, \bar{z}_N) \rangle, \quad (2.6b)$$

где $A_{j_k}(z_k, \bar{z}_k)$ — произвольные локальные поля. Эти корреляторы являются однозначными аналитическими функциями переменной z , обладающими полюсами в точках $z = z_1, z_2, \dots, z_N$. Порядок и вычет каждого из этих полюсов, например z_k , определяются трансформационными свойствами соответствующих полей $A_{j_k}(z_k, \bar{z}_k)$ относительно конформных (2.4a) и калибровочных (1.13a) преобразований³⁾. Действительно, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon A_j(z, \bar{z}) &= \oint_{C_z} T(\zeta) \varepsilon(\zeta) A_j(z, \bar{z}) d\zeta, \\ \delta_\omega A_j(z, \bar{z}) &= \oint_{C_z} J^a(\zeta) \omega^a(\zeta) A_j(z, \bar{z}) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $\delta_\varepsilon A_j$ и $\delta_\omega A_j$ — вариации поля A_j при бесконечно малых преобразованиях (2.4a) и (1.13a); контур интегрирования содержит точку $\zeta = z$. Формулы (2.7) надо понимать как соотношения между корреляционными функциями. Аналогичные уравнения с подстановками $T \rightarrow \bar{T}$, $J \rightarrow \bar{J}$ имеют место для вариаций $\delta_{\bar{\varepsilon}}$ и $\delta_{\bar{\omega}}$.

В общем случае вариации самих полей $T(z)$ и $J^a(z)$ определяются формулами

$$\delta_\varepsilon T(z) = \varepsilon(z) T'(z) + 2\varepsilon'(z) T(z) + \frac{1}{12} c\varepsilon'''(z), \quad (2.8a)$$

$$\delta_\varepsilon J^a(z) = \varepsilon(z) J^{a'}(z) + \varepsilon'(z) J^a(z), \quad (2.8b)$$

$$\delta_\omega J^a(z) = f^{abc} \omega^b(z) J^c(z) + \frac{1}{2} k \omega^{a'}(z), \quad (2.8c)$$

где штрих означает производную. Вариации $\delta_{\bar{\varepsilon}}$ и $\delta_{\bar{\omega}}$ полей \bar{T} и \bar{J} задаются такими же выражениями, в то время как вариации $\delta_{\bar{\varepsilon}}$ и $\delta_{\bar{\omega}}$ полей T и J равны нулю. Величины вещественных параметров c и k в (2.8) не могут быть определены полностью из общих принципов. Однако, для значений этих параметров имеются сильные ограничения: параметр c должен быть положительным, а k — целым. Можно показать, что в противном случае не может быть выполнено условие

³⁾ Здесь и ниже мы постоянно рассматриваем корреляционные функции от комплексных координат $\xi \in \mathbb{C}^2$. В пространстве \mathbb{C}^2 координаты z и \bar{z} (1.7) являются независимыми комплексными переменными и конформная группа (аналогичная группе (1.6)) может рассматриваться как прямое произведение $\Gamma(z) \times \Gamma(\bar{z})$ двух (одинаковых) групп Γ аналитических подстановок одной переменной.

положительности квантовой теории поля⁴⁾. Уравнения (2.8) определяют алгебру генераторов группы симметрии в теории поля.

Согласно (2.7) уравнения (2.8) могут быть переписаны в виде операторного разложения:

$$T(z) T(z') = \frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{2}{(z-z')^2} T(z') + \frac{1}{z-z'} T'(z') + \dots, \quad (2.9a)$$

$$T(z) J^a(z') = \frac{1}{(z-z')^2} J^a(z') + \frac{1}{z-z'} J^{a'}(z') + \dots, \quad (2.9b)$$

$$J^a(z) J^b(z') = \frac{k \delta^{ab}}{(z-z')^2} + \frac{f^{abc}}{z-z'} J^c(z') + \dots, \quad (2.9c)$$

где в правых частях опущены слагаемые, регулярные при $z \rightarrow z'$. Определение полей $T(z)$ и $J^a(z)$ (также как и \bar{T} и \bar{J}) должно быть дополнено требованием регулярности при $z = \infty$, которое эквивалентно следующим асимптотическим условиям:

$$T(z) \sim z^{-4}, \quad J^a(z) \sim z^{-2} \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

В нашей теории любое локальное поле $A_j(z, \bar{z})$ является “изотопическим” тензором, соответствующим некоторому конечномерному представлению “левой” или “правой” (глобальной) группы G . Кроме того, такое поле характеризуется аномальными размерностями $(\Delta_j, \bar{\Delta}_j)$, описывающими его преобразования

$$A_j \rightarrow \lambda^{\Delta_j} \bar{\lambda}^{\bar{\Delta}_j} A_j \quad (2.11)$$

при (комплексных) растяжениях $z \rightarrow \lambda z$, $\bar{z} \rightarrow \bar{\lambda} \bar{z}$. На самом деле разность $s_j = \Delta_j - \bar{\Delta}_j$ является спином поля A_j (спин s_j локальных полей может принимать лишь целые или полуцелые значения), в то время как сумма $d_j = \Delta_j + \bar{\Delta}_j$ совпадает с обычной аномальной размерностью. Применяя для нашей конформной теории аргументы, аналогичные аргументам, приведенным в [9], можно доказать, что существуют поля (которые, подобно [9], мы будем называть “примарными полями”), преобразующиеся при произвольных конформных и калибровочных преобразованиях согласно (1.19) и (1.6). Заметим, что матрицы $\Omega(z)$ и $\bar{\Omega}(\bar{z})$ в общем случае могут принадлежать разным представлениям группы G . Вводя обозначения $\phi_l(z, \bar{z})$ для примарных полей и $(\Delta_l, \bar{\Delta}_l)$ для соответствующих размерностей, можно выписать

⁴⁾ При $0 < c < 1$ условие положительности также дает бесконечное дискретное множество допустимых значений c [11]. Это ограничение здесь не имеет значения, так как в модели Весса-Зумино $c > 1$ (см. пункт 3).

сингулярные члены следующих операторных разложений:

$$T(\zeta) \phi_l(z, \bar{z}) = \frac{\Delta_l}{(\zeta - z)^2} \phi_l(z, \bar{z}) + \frac{1}{\zeta - z} \frac{\partial}{\partial z} \phi_l(z, \bar{z}) + \dots, \quad (2.12a)$$

$$J^a(\zeta) \phi_l(z, \bar{z}) = \frac{t_l^a}{\zeta - z} \phi_l(z, \bar{z}) + \dots, \quad (2.12b)$$

Эти операторные разложения определяются трансформационными свойствами поля ϕ_l относительно бесконечно малых преобразований (2.4a) и (1.3a). Здесь матрицы t_l^a соответствуют “левому” представлению генераторов группы G для поля ϕ_l . Аналогичные формулы (с заменами $\Delta_l \rightarrow \bar{\Delta}_l$ и $t_l^a \rightarrow \bar{t}_l^a$, где \bar{t}_l^a соответствуют “правому” представлению) имеют место для разложений произведений $\bar{T} \phi_l$ и $\bar{J} \phi_l$. Уравнения (2.12) позволяют точно определить зависимость корреляционных функций (2.6) от переменной z при условии, что все содержащиеся в них поля A_j примарны:

$$\begin{aligned} \langle T(z) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \\ = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\Delta_j}{(z - z_j)^2} + \frac{1}{z - z_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right\} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle, \end{aligned} \quad (2.13a)$$

$$\begin{aligned} \langle J^a(z) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \\ = \sum_{j=1}^N \frac{t_j^a}{z - z_j} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle. \end{aligned} \quad (2.13b)$$

Здесь матрицы t_j^a применяются к “левым” изотопическим индексам полей $\phi_j(z, \bar{z})$. Соотношения (2.13) являются тождествами Уорда, соответствующими конформной и калибровочной симметриям. Объединяя (2.13) с асимптотическими условиями (2.10), можно легко вывести известные тождества Уорда

$$\sum_{j=1}^N \left\{ z_j^{n+1} \frac{\partial}{\partial z_j} + (n+1) \Delta_j z_j^n \right\} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle = 0, \quad (2.14a)$$

где $n = -1, 0, +1$ и

$$\sum_{j=1}^N t_j^a \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle = 0, \quad (2.14b)$$

которые являются следствиями инвариантности относительно регулярных подгрупп $SL_2 \subset \Gamma(z)$ проективных конформных преобразований и $G \subset G(z)$ глобальных калибровочных преобразований.

Вариации δ_ϵ и δ_ω могут пониматься как некие операторы, определенные правыми частями уравнений (2.7) и действующие на поля A_j .

Удобно разложить функции $\varepsilon(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ по степеням $(\zeta - z)$ и ввести соответствующие операторы:

$$\begin{aligned} L_n A_j(z, \bar{z}) &= \oint_{C_z} T(\zeta) (\zeta - z)^{n+1} A_j(z, \bar{z}) d\zeta, \\ J_n^a A_j(z, \bar{z}) &= \oint_{C_z} J^a(\zeta) (\zeta - z)^n t_j^a A_j(z, \bar{z}) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Примарные поля ϕ_l удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} L_n \phi_l &= J_n^a \phi_l = 0 \quad \text{для } n > 0, \\ L_0 \phi_l &= \Delta_l \phi_l, \quad J_0^a \phi_l = t_l^a \phi_l, \end{aligned} \quad (2.16)$$

которые являются прямым следствием (2.12). Уравнения (2.15) определяют операторы L_n и J_n^a как с отрицательными, так и с положительными значениями n . В общем случае локальные поля $L_{-n} A_j$ и $J_{-n}^a A_j$ с $n > 0$ не исчезают. В частности, операторы L_{-1} и \bar{L}_{-1} сводятся к простым дифференциальным операторам:

$$L_{-1} \phi_l(z, \bar{z}) = \frac{\partial}{\partial z} \phi_l(z, \bar{z}), \quad \bar{L}_{-1} \phi_l(z, \bar{z}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \phi_l(z, \bar{z}). \quad (2.17)$$

Очевидно, что регулярные слагаемые, опущенные в операторном разложении (2.12), могут быть выражены при помощи полей $L_{-n} \phi_l$, $J_{-n}^a \phi_l$ с $n = 2, 3, \dots$

Вследствие наличия в (2.9) сингулярных членов операторы L_n и J_n^a не коммутируют, но удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{1}{12} c (n^3 - n) \delta_{n+m,0}, \quad (2.18a)$$

$$[L_n, J_m^a] = -m J_{n+m}^a, \quad (2.18b)$$

$$[J_n^a, J_m^b] = f^{abc} J_{n+m}^c + \frac{1}{2} k n \delta^{ab} \delta_{n+m,0}. \quad (2.18c)$$

Коммутационные соотношения (2.18a) и (2.18c) известны как алгебры Вирасоро и Каца–Муди, соответственно. Полная алгебра (2.18), которая является полупрямым произведением упомянутых алгебр, будет обозначаться здесь символом \mathcal{A} . Очевидно, что операторы \bar{L}_n и \bar{J}_n^a , определенные формулами, аналогичными (2.15) с \bar{T} и \bar{J} вместо T и J , соответственно, образуют такую же алгебру, обозначаемую через $\bar{\mathcal{A}}$.

Полная система содержащихся в теории локальных полей $\{A_j\}$ включает в себя, кроме примарных полей ϕ_l , все поля вида

$$L_{-n_1} \dots L_{-n_N} \bar{L}_{-\bar{n}_1} \dots \bar{L}_{-\bar{n}_N} J_{-m_1}^{a_1} \dots J_{-m_M}^{a_M} \bar{J}_{-\bar{m}_1}^{b_1} \dots \bar{J}_{-\bar{m}_M}^{b_M} \phi_l, \quad (2.19)$$

с произвольными положительными n, \bar{n}, m, \bar{m} . Как и в [9], мы будем обозначать при помощи $[\phi_l]_{\mathcal{A}}$ совокупность полей (2.19), ассо-

цированных с некоторым примарным полем ϕ_l . Это бесконечное множество полей очевидно соответствует старшему весу представления (модулю Верма) алгебры \mathcal{A} (точнее, $[\phi_l]_{\mathcal{A}}$ является прямым произведением представлений со старшими весами алгебр \mathcal{A} и $\bar{\mathcal{A}}$), причем примарное поле ϕ_l ассоциировано с вектором старшего веса. Размерности полей (2.19) определяются равенствами

$$\Delta_l^{\{n,m\}} = \Delta_l + \sum_{i=1}^N n_i + \sum_{i=1}^M m_i, \quad \bar{\Delta}_l^{\{\bar{n},\bar{m}\}} = \bar{\Delta}_l + \sum_{i=1}^{N'} \bar{n}_i + \sum_{i=1}^{M'} \bar{m}_i, \quad (2.20)$$

а их изотопические свойства непосредственно следуют из (2.19). Полное множество полей

$$\{A_j\} = \bigoplus_l [\phi_l]_{\mathcal{A}} \quad (2.21)$$

образует замкнутую операторную алгебру [9].

Следует заметить, что поля $T(z)$, $J(z)$, $\bar{T}(\bar{z})$, $\bar{J}(\bar{z})$ не являются примарными; они принадлежат множеству $[I]_{\mathcal{A}}$, где I — единичный оператор, а именно, имеют вид

$$\begin{aligned} T(z) &= L_{-2} I, & J^a(z) &= J_{-1}^a I, \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \bar{L}_{-2} I, & \bar{J}^a(\bar{z}) &= \bar{J}_{-1}^a I. \end{aligned} \quad (2.22)$$

3. Модель Весса–Зумино

Соотношения, представленные в предыдущем пункте, относятся к любой квантовой теории поля с алгеброй симметрии $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Выражение для токов (1.10) в терминах g -полей может рассматриваться как характеристическое свойство модели Весса–Зумино. В квантовой теории эти выражения имеют следующее значение. Мы предполагаем, что полное множество полей $\{A_j\}$ содержит бесспиновое примарное поле $g(z, \bar{z})$ (которое соответствует представлению t^a левой и правой глобальных групп G и имеет размерности $\Delta_g = \bar{\Delta}_g = \Delta$), удовлетворяющее уравнениям

$$\kappa \frac{\partial}{\partial z} g(z, \bar{z}) = :J^a(z) t^a g(z, \bar{z}):, \quad (3.1a)$$

$$\kappa \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g(z, \bar{z}) = :\bar{J}^a(\bar{z}) g(z, \bar{z}) t^a:, \quad (3.1b)$$

где κ — числовой множитель (который далее вычисляется) и локальные произведения полей в правых частях (3.1) регуляризуются подходящим образом. Уравнения (3.1) могут пониматься как специальное свойство операторных разложений произведений $J^a(\zeta) t^a g(z, \bar{z})$ и $\bar{J}^a(\bar{z}) g(z, \bar{z}) t^a$. Рассмотрим, например, первое из этих произведе-

ний, имеющее общий вид

$$J^a(\zeta) t^a g(z, \bar{z}) = \frac{c_g}{\zeta - z} g(z, \bar{z}) + \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta - z)^{n-1} t^a J_{-n}^a g(z, \bar{z}), \quad (3.2)$$

где константа c_g определяется уравнением

$$t^a t^a = c_g I. \quad (3.3)$$

Операторный коэффициент при нулевой степени $(\zeta - z)$ в (3.2) должен совпадать (с точностью до числового множителя) с производной $\partial_z g$, то есть

$$J^a(\zeta) t^a g(z, \bar{z}) = \frac{c_g}{\zeta - z} g(z, \bar{z}) + \kappa \frac{\partial}{\partial z} g(z, \bar{z}) + O(\zeta - z). \quad (3.4)$$

Таким образом, произведение в (3.1a) определяется формулой

$$:J^a(\zeta) t^a g(z, \bar{z}): \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\zeta \rightarrow z} \left[J^a(\zeta) - \frac{t^a}{\zeta - z} \right] t^a g(z, \bar{z}). \quad (3.5)$$

Аналогичное определение применяется к правой части уравнения (3.1b).

Свойства операторного разложения произведения (3.4) позволяют непосредственно определить аномальную размерность Δ поля g . Сравнивая (3.2) и (3.4), мы находим

$$\chi \equiv (J_{-1}^a t^a - \kappa L_{-1}) g = 0. \quad (3.6)$$

Здесь учтены равенства (2.17). С математической точки зрения это соотношение означает, что представление $[g]_{\mathcal{A}}$ алгебры (2.18) вырождено, причем поле χ (определенное согласно (3.6)) ассоциировано с "нуль-вектором". Поле χ должно удовлетворять уравнениям

$$L_0 \chi = (\Delta + 1) \chi, \quad J_0^a \chi = t^a \chi, \quad (3.7a)$$

$$L_n \chi = J_n^a \chi = 0 \quad \text{для } n > 0, \quad (3.7b)$$

так как в противном случае уравнение (3.6) не имеет смысла. Заметим, что уравнения (3.7a) удовлетворяются тождественно, а из уравнений (3.7b) достаточно решить лишь уравнения с $n = 1$, так как остальные могут быть получены из них при помощи (2.18). Используя (2.16) и (2.18), можно убедиться, что уравнения (3.7b) удовлетворяются при выполнении условий

$$\begin{aligned} c_g + 2\Delta\kappa &= 0, \\ c_V + k + 2\kappa &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где c_V определяется формулой

$$f^{acd} f^{bcd} = c_V \delta^{ab}. \quad (3.9)$$

Из уравнений (3.8) получаются значения аномальной размерности поля g

$$\Delta = \frac{c_g}{c_V + k} \quad (3.10)$$

и параметра κ из (3.1)

$$\kappa = -\frac{1}{2}(c_V + k). \quad (3.11)$$

Существует другой путь вывода уравнения (3.6). В классической теории Весса–Зумино тензор энергии-импульса выражается квадратично в терминах токов (1.10). Допустим, что аналогичное соотношение справедливо в квантовой теории, т.е. имеют место равенства

$$\begin{aligned} 2\kappa T(z) &= :J^a(z) J^a(z):, \\ 2\kappa \bar{T}(\bar{z}) &= :\bar{J}^a(\bar{z}) \bar{J}^a(\bar{z}):, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где числовой параметр κ совпадает, как будет видно ниже, со значением (3.11). Это предположение может рассматриваться как другое определение модели Весса–Зумино, эквивалентное (3.1). Также как и (3.1), соотношение (3.12) должно пониматься в терминах операторного разложения произведений. Например, разложение произведения

$$J^a(z) J^a(z')$$

имеет следующие исчезающие члены при $z \rightarrow z'$:

$$J^a(z) J^a(z') = \frac{k D}{(z - z')^2} + 2\kappa T(z') + O(z - z'). \quad (3.13)$$

Здесь $D = \delta^{aa}$ — размерность группы G . Вычисляя многоточечные корреляционные функции

$$\langle J^{a_1}(z_1) \dots J^{a_N}(z_N) \rangle \quad (3.14)$$

и выполняя разложение (3.13), можно установить, что определение (3.13) тензора энергии-импульса согласуется с (2.9) только тогда, когда

$$c = \frac{k D}{c_V + k} \quad (3.15)$$

и параметр κ задан согласно (3.11). Формула (3.13) эквивалентна следующему соотношению между генераторами (2.15):

$$2\kappa L_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} :J_m^a J_{n-m}^a: \quad (3.16)$$

Здесь символ $::$ обозначает обычное нормальное упорядочение: операторы J_n с отрицательными n всегда располагаются слева от опера-

торов с $n > 0^5$). Применяя уравнение (3.16) с $n = -1$ к полю g , мы получаем в точности равенство (3.6). Заметим, что при таком способе рассуждения никакие специфические свойства поля g не используются. Поэтому уравнение

$$(J_{-1}^a t_l^a - \kappa L_{-1}) \phi_l = 0 \quad (3.17)$$

справедливо также и для любого примарного поля ϕ_l . Следовательно, любое примарное поле ϕ_l в теории Весса-Зумино является вырожденным и его размерности задаются формулами

$$\Delta_l = \frac{c_l}{c_V + k}, \quad \bar{\Delta}_l = \frac{\bar{c}_l}{c_V + k}, \quad (3.18)$$

где $c_l = t_l^a t_l^a$, $\bar{c}_l = \bar{t}_l^a \bar{t}_l^a$. В частности, любое примарное поле, являющееся скалярным относительно одновременно как левой, так и правой калибровочных групп, имеет нулевые размерности и потому пропорционально единичному оператору I . Стоит также отметить, что все поля в (2.19), принадлежащие некоторому представлению $[\phi_l]_A$ выражаются (при помощи (3.16)) через поля:

$$J_{-m_1}^{a_1} \dots J_{-m_N}^{a_N} \bar{J}_{-\bar{m}_1}^{b_1} \dots \bar{J}_{-\bar{m}_M}^{b_M} \phi_l. \quad (3.19)$$

Поэтому в теории Весса-Зумино представлениями $[\phi_l]_A$ алгебры $A \times \bar{A}$ на самом деле являются лишь представления алгебры токов (2.18с) со старшим весом; их можно обозначить через $[\phi_l]_J$.

Как и в общей конформной теории [9], корреляционные функции (1.20) вырожденного поля g удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям. Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} t_i^a \langle J^a(z) g(z_1, \bar{z}_1) \dots g(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \\ = \left\{ \frac{c_g}{z - z_i} + \sum_{j \neq i}^N \frac{t_i^a t_j^a}{z - z_j} \right\} \langle g(z_1, \bar{z}_1) \dots g(z_N, \bar{z}_N) \rangle, \end{aligned} \quad (3.20)$$

которое является прямым следствием тождества Уорда (2.13b). Здесь матрицы t_i^a действуют на левые индексы поля $g(z, \bar{z}_i)$. Подставляя операторное разложение произведения (3.4) в левую часть (3.20) и переходя к пределу $z \rightarrow z_i$, мы получаем уравнение

$$\left\{ \kappa \frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{j \neq i}^N \frac{t_i^a t_j^a}{z_i - z_j} \right\} \langle g(z_1, \bar{z}_1) \dots g(z_N, \bar{z}_N) \rangle = 0. \quad (3.21)$$

Так как индекс i может принимать любое из N значений, $i = 1, 2, \dots, N$, то на самом деле мы здесь имеем систему линейных

⁵⁾ То, что алгебра Вирасоро принадлежит обертывающей алгебре алгебры Каца-Мути хорошо известно в математике [12]. Этот факт был открыт раньше при изучении двумерных моделей теории поля [10].

дифференциальных уравнений. Такие же уравнения с подстановками $z \rightarrow \bar{z}$, $t^a \rightarrow \bar{t}^a$ (\bar{t}^a действует на g справа) также имеют место. Ясно, что в теории Весса–Зумино уравнения (3.21) с очевидными модификациями справедливы для любых корреляционных функций

$$\langle \phi_{l_1}(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_{l_N}(z_N, \bar{z}_N) \rangle \quad (3.22)$$

примарных полей ϕ_l . Корреляционные функции (1.20) с подходящими аналитическими свойствами могут быть найдены как решения этих дифференциальных уравнений. Пример такого вычисления приводится в следующем пункте.

Рассмотрим операторное разложение произведения $g(z, \bar{z}) g(0, 0)$. Можно было бы ожидать, что это разложение, как и в [9], имеет следующий вид:

$$g(z, \bar{z}) g(0, 0) = \sum_l C_{gg}^{(l)} z^{\Delta_l - 2\Delta} \bar{z}^{\bar{\Delta}_l - 2\Delta} [\phi_l(0, 0) + \dots], \quad (3.23)$$

где $C_{gg}^{(l)}$ — числовые “структурные константы”, а ϕ_l — некоторые примарные поля теории, имеющие размерности $(\Delta_l, \bar{\Delta}_l)$. В каждом слагаемом суммы (3.23) здесь опущены бесконечные степенные ряды по z и \bar{z} с полевыми коэффициентами, принадлежащими $[\phi_l]_J$. Какого типа примарные поля могут появиться в сумме (3.23)? Произведение $g(z, \bar{z}) g(0, 0)$ преобразуется как тензорное произведение двух неприводимых представлений (например) левой глобальной группы G . Оно может быть разложено в сумму некоторых неприводимых представлений

$$g(z, \bar{z}) g(0, 0) = \sum_l P_l \{g(z, \bar{z}) g(0, 0)\}. \quad (3.24)$$

Здесь P_l — проекторы (действующие на левые индексы произведения $g \otimes g$), каждый из которых выделяет подпространство представления с индексом l . Подставим разложение (3.23) для некоторой пары полей, например, $g(z_1, \bar{z}_1) g(z_2, \bar{z}_2)$, в (3.21) и учтем наиболее сингулярный (при $z_1 \rightarrow z_2$) вклад от каждого слагаемого из (3.23). Считая, что $P_l \phi_l = \phi_l$ и используя тождество

$$\{t^a g(z, \bar{z})\} \{t^a g(0, 0)\} = \sum_l \frac{1}{2} (c_l - 2c_g) P_l \{g(z, \bar{z}) g(0, 0)\}, \quad (3.25)$$

где $c_l = t_l^a t_l^a$, мы получаем характеристическое уравнение для (3.21)

$$-\kappa (\Delta_l - 2\Delta) = \frac{1}{2} (c_l - 2c_g) \quad (3.26)$$

и воспроизводим (3.18). Таким образом, примарные поля ϕ_l , соответствующие представлениям с индексом l , входящие в разложение (3.24), могут появиться лишь в операторном разложении произведения (3.23). Конечно, этот результат был очевиден и раньше, и

потому приведенные вычисления можно рассматривать как самосогласованную проверку.

Заметим, что некоторые из коэффициентов $C^{(l)}$ в разложениях типа (3.23) могут исчезать. На самом деле имеются некоторые правила отбора, которые позволяют отсеивать большинство априори допустимых примарных полей в операторной алгебре, порожденной полями g^6). Очевидно, в общем случае конечное число примарных полей ϕ_i образует замкнутую операторную алгебру модели Весса-Зумино (подобный феномен имеет место для “минимальных” конформных теорий, введенных в работе [9]). В следующем пункте мы приведем пример (для $k = 1$) такой ситуации.

Стоит сказать несколько слов о сложных полях модели (1.4). Рассмотрим примарное поле $\phi_1^{ab}(z, \bar{z})$, которое преобразуется по присоединенным представлениям левой и правой групп G . Согласно (3.18), оно имеет размерности

$$\Delta_1 = \bar{\Delta}_1 = \frac{c_V}{c_V + k}. \quad (3.27)$$

Это поле естественно отождествляется со сложным полем

$$\phi_1^{ab} = \text{tr}(g^{-1} t^a g t^b). \quad (3.28)$$

Поля

$$K^a = J_{-1}^b \phi_1^{ba}, \quad \bar{K}^a = \bar{J}_{-1}^b \phi_1^{ab} \quad (3.29)$$

имеют размерности $(\Delta_1 + 1, \Delta_1)$ и $(\Delta_1, \Delta_1 + 1)$ соответственно и преобразуются согласно формулам

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\omega}} K^a(z, \bar{z}) &= f^{abc} \bar{\omega}^b(\bar{z}) K^c(z, \bar{z}), \\ \delta_{\omega} K^a(z, \bar{z}) &= \frac{1}{2} k \omega^b(z) \phi_1^{ba}(z, \bar{z}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Таким образом, очевидно, что они совпадают с “ложными токами” модели (1.4)

$$K^a \sim \text{tr}(t^a g^{-1} \partial_z g), \quad \bar{K}^a \sim \text{tr}(t^a \partial_{\bar{z}} g g^{-1}). \quad (3.31)$$

Заметим, что “токи” (3.31) имеют аномальные размерности и потому не могут сохраняться в конформной теории. Наконец, поле

$$S(z, \bar{z}) = J_{-1}^a \bar{J}_{-1}^b \phi_1^{ab}, \quad (3.32)$$

⁶⁾ Эти правила отбора имеют следующее происхождение. В общем случае целого k представление $[g]_J$ старшего веса содержит нуль-векторы. Как и в (3.6), наличие нуль-векторов приводит к некоторым дополнительным матричным уравнениям для корреляционных функций (1.20), которые, в отличие от (3.21), не содержат производных. Правила отбора возникают из условия согласованности этих матричных уравнений с уравнением (3.21).

имеющее размерности $(\Delta_1 + 1, \Delta_1 + 1)$, соответствует плотности лагранжиана

$$S \sim \text{tr}(\partial_\mu g^{-1} \partial_\mu g). \quad (3.33)$$

Это позволяет предсказать наклон β -функции в модели (1.1) в фиксированной точке (1.3):

$$\left. \frac{d\beta(\lambda^2, k)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda^2=4\pi/k} = \frac{2c_V}{c_V + k}. \quad (3.34)$$

При $k \rightarrow \infty$ это уравнение согласуется с однопетлевым результатом работы [2].

4. Корреляционные функции

Проективные тождества Уорда (2.14а) определяют двух- и трехточечные корреляционные функции с точностью до числового множителя. Здесь мы вычислим четырехточечные корреляционные функции

$$G(z_i, \bar{z}_i) = \langle g(z_1, \bar{z}_1) g^{-1}(z_2, \bar{z}_2) g^{-1}(z_3, \bar{z}_3) g(z_4, \bar{z}_4) \rangle \quad (4.1)$$

для модели Весса-Зумино, объединяя дифференциальные уравнения (3.21) с общим требованием кроссинг-симметрии. Фактически кроссинг-симметрия четырехточечных функций означает ассоциативность полной операторной алгебры⁷⁾ и, тем самым, вообще самосогласованность теории поля.

Во первых, заметим, что корреляционная функция (4.1) по существу зависит от двух переменных; вследствие тождеств Уорда (2.14а) она может быть представлена в виде

$$G(z_i, \bar{z}_i) = [(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_4)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3)]^{-2\Delta} G(x, \bar{x}), \quad (4.2)$$

где x и \bar{x} — ангармонические дроби

$$x = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}, \quad \bar{x} = \frac{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_4)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)}, \quad (4.3)$$

и Δ — размерность (3.10) поля g . Дальнейшее вычисление зависит от выбора группы G . Здесь мы рассматриваем случай унитарных групп.

Пусть $G = \text{SU}(N)$, $g(z, \bar{z})$ — унитарная $N \times N$ -матрица, $\det g = 1$, преобразующаяся по фундаментальному представлению группы $\text{SU}(N) \times \text{SU}(N)$. Обозначим через $\alpha_i(\beta_i)$ тензорные индексы полей $g(z_i, \bar{z}_i)$, соответствующие левой (правой) группе $\text{SU}(N)$. Таким образом, в (4.1) мы полагаем

$$g(z_i, \bar{z}_i) = g_{\alpha_i}^{\beta_i}(z_i, \bar{z}_i) \quad \text{и} \quad g^{-1}(z_i, \bar{z}_i) = g_{\beta_i}^{-1\alpha_i}(z_i, \bar{z}_i).$$

⁷⁾ Подробности приводятся в [9]. Бутстрапный подход, основанный на операторной алгебре, первоначально был предложен Поляковым [14].

Корреляционная функция (4.2) обладает $SU(N) \times SU(N)$ -инвариантным разложением

$$G(x, \bar{x}) = \sum_{A, B=1, 2} (I_A) (\bar{J}_B) G_{AB}(x, \bar{x}) \quad (4.4)$$

со скалярными коэффициентами $G_{AB}(x, \bar{x})$. Матрицы I и \bar{I} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1 &= \delta_{\alpha_1}^{\alpha_2} \delta_{\alpha_3}^{\alpha_4}, & \bar{I}_1 &= \delta_{\beta_2}^{\beta_1} \delta_{\beta_3}^{\beta_4}, \\ I_2 &= \delta_{\alpha_1}^{\alpha_4} \delta_{\alpha_3}^{\alpha_2}, & \bar{I}_2 &= \delta_{\beta_2}^{\beta_4} \delta_{\beta_3}^{\beta_1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Корреляционная функция (4.1) удовлетворяет дифференциальным уравнениям (3.21) и аналогичным уравнениям относительно \bar{z} . Путем прямых вычислений эти уравнения приводятся к виду⁸⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \left[\frac{1}{x} P + \frac{1}{x-1} Q \right] G, \\ \frac{\partial G}{\partial \bar{x}} &= G \left[\frac{1}{\bar{x}} P^t + \frac{1}{\bar{x}-1} Q^t \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

где G обозначает 2×2 матрицу G_{AB} , а матрицы P и Q определяются выражениями

$$P = \frac{1}{2N\kappa} \begin{pmatrix} N^2 - 1 & N \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2N\kappa} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ N & N^2 - 1 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Верхний индекс t обозначает матричное транспонирование. Параметр κ тот же, что и в (3.11), в нашем случае имеет значение

$$\kappa = -\frac{1}{2} (N + k). \quad (4.8)$$

Общее решение уравнений (4.6) может быть задано при помощи гипергеометрических функций; обычно оно представляется в виде

$$G_{AB}(x, \bar{x}) = \sum_{p, q=0, 1} U_{pq} \mathcal{F}_A^{(p)}(x) \mathcal{F}_B^{(q)}(\bar{x}) \quad (4.9)$$

с произвольными константами U_{pq} и функциями \mathcal{F} , заданными формулами

$$\mathcal{F}_1^{(0)}(x) = x^{-2\Delta} (1-x)^{\Delta_1-2\Delta} F\left(-\frac{1}{2\kappa}, \frac{1}{2\kappa}, 1 + \frac{N}{2\kappa}, x\right),$$

⁸⁾ Уточним, что уравнения (4.6) появились раньше в работе Дашена и Фришмана [10] при изучении конформно инвариантного решения $SU(N)$ -модели Тринга.

$$\mathcal{F}_2^{(0)}(x) = -(2\kappa + N)^{-1} x^{1-2\Delta} (1-x)^{\Delta_1-2\Delta} \times \\ \times F\left(1 - \frac{1}{2\kappa}, 1 + \frac{1}{2\kappa}, 2 + \frac{N}{2\kappa}, x\right), \quad (4.10a)$$

$$\mathcal{F}_1^{(1)}(x) = x^{\Delta_1-2\Delta} (1-x)^{\Delta_1-2\Delta} F\left(-\frac{N-1}{2\kappa}, -\frac{N+1}{2\kappa}, 1 - \frac{N}{2\kappa}, x\right), \\ \mathcal{F}_2^{(1)}(x) = -N x^{\Delta_1-2\Delta} (1-x)^{\Delta_1-2\Delta} F\left(-\frac{N-1}{2\kappa}, -\frac{N+1}{2\kappa}, -\frac{N}{2\kappa}, x\right). \quad (4.10b)$$

Здесь Δ является размерностью (3.10) поля g :

$$\Delta = \frac{N^2 - 1}{2N(N+k)}, \quad (4.11)$$

в то время как

$$\Delta_1 = \frac{N}{N+k} \quad (4.12)$$

является размерностью сложного поля (3.28). Заметим, что функции $\mathcal{F}_A^{(p)}(x)$ здесь играют роль, подобную “конформным блокам” в конформной теории [9]; функции $\mathcal{F}^{(0)}$ и $\mathcal{F}^{(1)}$ в (4.9) описывают “ s -канальный” вклад всех полей, принадлежащих представлениям $[L]_J$ и $[\phi_1^{ab}]_J$, соответственно. Было бы уместно назвать их токовыми блоками.

Теперь мы должны принять во внимание локальные свойства поля g и наложить требование кроссинг-симметрии (4.2); оказывается, что это требование определяет константы U_{pq} в (4.9). Согласно локальным свойствам, корреляционные функции, рассматриваемые в евклидовом домене $\bar{x} = x^*$ (где $*$ обозначает комплексное сопряжение), должны быть однозначными. Концентрируя внимание на окрестности точки $x = \bar{x} = 0$, мы немедленно находим, что (4.9) совместно с этим требованием лишь тогда, когда

$$U_{10} = U_{01} = 0. \quad (4.13)$$

Из кроссинг-симметрии четырехточечной функции (4.1) следует, что

$$G_{AB}(x, \bar{x}) = \sum_{A', B'=1, 2} E_{AA'} G_{A'B'}(1-x, 1-\bar{x}) E_{B'B}, \quad (4.14)$$

где $E_{12} = E_{21} = 1$, $E_{11} = E_{22} = 0$. Подставим (4.9) в (4.14) и используем соотношение

$$\mathcal{F}_A^{(p)}(x) = \sum_{q, A'} C_q^p E_{AA'} \mathcal{F}_{A'}^{(q)}(1-x), \quad (4.15)$$

которое проверяется непосредственно. Элементы “кроссинг-матрицы” C_q^p в (4.15) задаются согласно выражениям

$$\begin{aligned} C_0^0 &= -C_1^1 = N \frac{\Gamma(-N/2\kappa) \Gamma(N/2\kappa)}{\Gamma(-1/2\kappa) \Gamma(1/2\kappa)}, \\ C_0^1 &= -N \frac{\Gamma^2(-N/2\kappa)}{\Gamma(-(N-1)/2\kappa) \Gamma(-(N+1)/2\kappa)}, \\ C_0^1 C_1^0 + C_0^0 C_1^1 &= 1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Уравнение (4.14) удовлетворяется при условии $U_{11} = h U_{00}$:

$$h = \frac{1}{N^2} \frac{\Gamma((N-1)/(N+k)) \Gamma((N+1)/(N+k))}{\Gamma((k+1)/(N+k)) \Gamma((k-1)/(N+k))} \frac{\Gamma^2(k/(N+k))}{\Gamma^2(N/(N+k))}. \quad (4.17)$$

Наконец, мы получаем

$$G_{AB}(x, \bar{x}) = M^{-8\Delta} \{ \mathcal{F}_A^{(0)}(x) \mathcal{F}_B^{(0)}(\bar{x}) + h \mathcal{F}_A^{(1)}(x) \mathcal{F}_B^{(1)}(\bar{x}) \}, \quad (4.18)$$

где общий множитель определяется нормировкой g -поля; нормировка в (4.18) соответствует нормировке двухточечной функции

$$\langle g_{\alpha_1}^{\beta_1}(z, \bar{z}) g_{\beta_2}^{-1\alpha_1}(0, 0) \rangle = M^{-4\Delta} \delta_{\alpha_1}^{\alpha_2} \delta_{\beta_1}^{\beta_2} (z\bar{z})^{-2\Delta}. \quad (4.19)$$

В общем случае функция (4.18) имеет сингулярности типа степенных при $x = \infty$, $\bar{x} = \infty$, которые соответствуют вкладам сложных полей

$$\phi_A = g_{\{\alpha_1}^{\{\beta_1} g_{\alpha_2\}}^{\beta_2\}}(z, \bar{z}), \quad (4.20a)$$

$$\phi_S = g_{[\alpha_1}^{[\beta_1} g_{\alpha_2]}^{\beta_2]}(z, \bar{z}) \quad (4.20b)$$

в операторном разложении произведения $g(z_1, \bar{z}_1) g(z_2, \bar{z}_2)$ в (1.1). Здесь фигурные (квадратные) скобки обозначают антисимметризацию (симметризацию). Размерности этих полей

$$\Delta_A = \frac{(N-2)(N+1)}{N(N+k)}, \quad \Delta_S = \frac{(N+2)(N-1)}{N(N+k)} \quad (4.21)$$

согласованы с (3.18).

Заметим, что при $k = 1$ второй член в (4.18) обращается в нуль и функция (4.4) принимает вид⁹⁾

$$\begin{aligned} G(x, \bar{x}) &= [x\bar{x}(1-x)(1-\bar{x})]^{1/N} \times \\ &\times \left[(I_1) \frac{1}{x} + (I_2) \frac{1}{1-x} \right] \left[(\bar{I}_1) \frac{1}{\bar{x}} + (\bar{I}_2) \frac{1}{1-\bar{x}} \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

⁹⁾ В этом случае операторы (3.28) и (4.20b) выпадают из операторной алгебры, порожденной полем g ; это — простейший пример действия правил отбора, упомянутых в предыдущем пункте.

Этот результат имеет следующее значение. Возьмем поле

$$\tilde{g}(z, \bar{z}) = e^{i\sqrt{4\pi/N} \gamma \varphi(z, \bar{z})} g(z, \bar{z}), \quad (4.23)$$

где g — рассматриваемое здесь $SU(N)$ -поле Весса-Зумино и φ — свободное безмассовое бозонное поле. Таким образом, поле (4.23) соответствует группе $U(N) = SU(N) \times U(1)$. В самом деле, параметр γ может быть выбран произвольно и при этом размерность поля \tilde{g}

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \Delta(\gamma), \quad (4.24)$$

где

$$\Delta(\gamma) = \gamma^2/2N. \quad (4.25)$$

Четырехточечная функция $\tilde{G}(z_i, \bar{z}_i)$ полей (4.23) задается согласно формуле

$$\tilde{G}(x, \bar{x}) = [x\bar{x}(1-x)(1-\bar{x})]^{-2\Delta(\gamma)} G(x, \bar{x}) M^{-4\Delta(\gamma)}, \quad (4.26)$$

и при значении параметра

$$\gamma = 1 \quad (4.27)$$

совпадает с функцией от билинеалов свободных безмассовых заряженных фем-полей

$$\begin{aligned} M \tilde{g}_\alpha^\beta(z, \bar{z}) &= :\psi_\alpha(z) \bar{\psi}^{+\beta}(\bar{z}):, \\ M \tilde{g}_\beta^{-1\alpha}(z, \bar{z}) &= :\bar{\psi}_\beta(\bar{z}) \psi^{+\alpha}(z): \end{aligned} \quad (4.28)$$

с действием вида

$$S_f(\psi, \bar{\psi}) = \int [\psi^{+\alpha} \partial_{\bar{z}} \psi_\alpha + \bar{\psi}^{+\beta} \partial_z \bar{\psi}_\beta] d^2\xi. \quad (4.29)$$

Нетрудно увидеть, что этот результат имеет место для любой многоточечной корреляционной функции (1.20). Чтобы доказать это, на самом деле не нужно вычислять многоточечные функции. Достаточно установить, что тензор энергии-импульса

$$T_f(z) = \sum_{\alpha=1}^N :\psi^{+\alpha} \partial_z \psi_\alpha: \quad (4.30)$$

связан с фермионными токами $J^a = :\psi^+ t^a \psi:$ и $J = :\psi^+ \psi:$ соотношением [10]

$$-T_f(z) = \frac{1}{N+1} :J^a(z) J^a(z): + \frac{1}{2N} :J(z) J(z): \quad (4.31)$$

и заметить, что синглетный ток J выражается через свободное безмассовое бозонное поле формулой

$$J(z) = i\sqrt{N} \partial_z \varphi(z, \bar{z}). \quad (4.32)$$

Укажем также, что (4.28) остается справедливым при произвольном значении γ из (4.23) при условии, что поля ψ понимаются как фермионы в N -компонентной модели Тирринга с изоскалярным ток-ток взаимодействием

$$S_f^{(\gamma)}(\psi, \bar{\psi}) = S_f(\psi, \bar{\psi}) + \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma^2} \int J(z) \bar{J}(\bar{z}) d^2\xi. \quad (4.33)$$

Очевидно, что равенство (1.17), соответствующее модели (1.4) с группой $G = O(N)$ и $k = 1$, может быть доказано таким же образом.

Мы благодарны А.А. Белавину, А.М. Полякову и П.Б. Вигману за многочисленные интересные обсуждения. В.Г.К. признателен А.Ю. Морозову за проявленное внимание.

Литература

1. Новиков С.П., УМН, 37 (1982) 3.
2. Witten E., Comm. Math. Phys. 92 (1984) 455.
3. Polyakov A.M. and Wiegmann P.B., Phys. Lett. B131 (1983) 121.
4. Polyakov A.M. and Wiegmann P.B., Phys. Lett. B (1984), to be published.
5. Вигман П.Б., Письма в ЖЭТФ, 39 (1984) 180; Ogievetsky E.I., Reshetikhin N.Yu. and Wiegmann P.B., Nucl. Phys. B, to be published.
6. Фаддеев Л.Д. и Решетихин Н.Ю., Проблемы нелинейной и нелокальной квантовой теории поля (Дубна, 1984).
7. Polyakov A.M., Phys. Lett. 103B (1981) 207.
8. Di Vecchia P. and Rossi P., preprint TH-3808 CERN (1984).
9. Belavin A.A., Polyakov A.M. and Zamolodchikov A.B., Nucl. Phys. B241 (1984) 333.
10. Dashen R. and Frishman Y., Phys. Rev. D11 (1975) 2781.
11. Friedan D., Qui Z. and Shenker S., Chicago preprint EFI-83-66 (1983).
12. Кас V.G., Infinite dimensional Lie algebras, Progress in mathematics, vol. 44 (Birkhäuser, 1984).
13. Поляков А.М., ЖЭТФ, 66 (1974) 23.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ (ПАРАФЕРМИОННЫЕ) ТОКИ В ДВУМЕРНОЙ КОНФОРМНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И САМОДУАЛЬНЫЕ КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ В Z_N -СИММЕТРИЧНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А.

ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 380–399

Построена двумерная точно решаемая модель конформной квантовой теории поля, обладающая симметрией Z_N и свойством самодуальности. Вычислены аномальные размерности всех полей, операторная алгебра и корреляционные функции этой модели. Модель может описывать самодуальные критические точки в Z_N -симметричных статистических системах.

1. Введение

Имеется много оснований считать, что флуктуации макроскопических полей (“параметра порядка”) в точке фазового перехода второго рода обладают не только масштабной, но и конформной инвариантностью [1]. С этой точки зрения основную задачу теории фазовых переходов второго рода — классификацию всех типов универсального критического поведения — можно сформулировать, как проблему построения конформно инвариантных решений квантовой теории поля. Поляков [2] предложил строить эти решения, комбинируя требование конформной инвариантности с гипотезой операторной алгебры. В последние годы выяснилось, что при $d = 2$ эта задача допускает в ряде случаев точное решение [3], причина состоит в том, что конформная группа двумерного пространства бесконечномерна и поля, составляющие операторную алгебру, можно классифицировать в соответствии с представлениями алгебры Вирасоро, теория которых достаточно развита [4], [5]. В [3] найден бесконечный набор точно решаемых “минимальных” моделей конформной теории поля (связанных с сильно вырожденными представлениями алгебры Вирасоро), в которых пространство полей, составляющих операторную алгебру, содержит конечное число неприводимых представлений. Каждая из этих моделей характеризуется двумя взаимопростыми натуральными числами p, q

и соответствует значению

$$c = 1 - 6(p - q)^2 / pq \quad (1.1)$$

центрального заряда в алгебре Вирасоро. В [6] показано, что только "главная серия" ($q = p + 1$, $p \geq 3$) минимальных моделей удовлетворяет условию положительности¹⁾. В настоящее время математическая структура минимальных моделей главной серии достаточно подробно изучена; в частности, корреляционные функции и структурные константы операторной алгебры в этих моделях вычислены в [7].

Оказывается, что четыре простейшие модели из главной серии ($p = 3, 4, 5, 6$) описывают критические точки модели Изинга ($p = 3$) [3] и Z_3 модели Поттса ($p = 5$) [8], а также соответствующие трикритические модели $p = 4, 6$ [6], [9]. Кроме того, аномальные размерности, отвечающие всем минимальным моделям главной серии, совпадают, как обнаружено в [10], с показателями, возникающими в "ферромагнитных" критических точках точно решаемой "модели RSOS" открытой недавно в [11].

Минимальные модели заведомо не исчерпывают всех решений конформной теории поля при $d = 2$. Например, известна серия точно решаемых моделей с суперконформной симметрией [9], [12], а также конформноинвариантные решения моделей Весса–Зимино [13]. В указанных случаях теория поля обладает, кроме конформной инвариантности, более широкой бесконечной симметрией (описываемой алгеброй Невье–Шварца в первом случае и алгеброй Каца–Мууди во втором), генерируемой локальными токами. Некоторые случаи других бесконечных симметрий, генерируемых локальными токами, рассмотрены в [14].

В данной работе мы рассмотрим конформную теорию поля с бесконечной симметрией, генерируемой нелокальными токами с дробными спинами — "парафермионами". Сохраняющиеся токи такого типа были обнаружены одним из авторов (В.Ф.) в минимальных моделях $p = 5, 6$. В общем случае парафермионные токи образуют замкнутые операторные алгебры, естественно ассоциируемые с коммутативными группами. Мы исследуем серию простейших точно решаемых моделей, соответствующих циклическим группам Z_N с $N \geq 2$. Эти модели обладают конформной инвариантностью со значениями

$$c = 2(N - 1) / (N + 2) \quad (1.2)$$

центрального заряда в алгебре Вирасоро. Операторные алгебры этих моделей обладают, кроме явной Z_N симметрии, свойством самодуаль-

¹⁾ В статистической физике условие положительности должно выполняться для систем, описываемых самосопряженной матрицей перехода. Отметим, что существуют интересные модели (например, "блуждание без самопересечений"), для которых оно несправедливо.

ности (симметрией “порядок — беспорядок”). Так, при заданном N имеется $N - 1$ полей σ_k с $k = 1, 2, \dots, N - 1$ (параметров порядка) с аномальными размерностями

$$2d_k = k(N - k)/N(N + 2), \quad (1.3)$$

а также $N - 1$ “дуальных” полей μ_k , (“параметров беспорядка”), с такими же размерностями (1.3), причем все корреляции инвариантны относительно замены $\sigma \leftrightarrow \mu$. Операторная алгебра содержит также Z_N -нейтральные поля $\varepsilon^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots \leq N/2$ с размерностями

$$2D_j = 2j(j + 1)/(N + 2). \quad (1.4)$$

Отметим здесь, что размерности (1.3), (1.4) в точности соответствуют показателям, характеризующим “антиферромагнитные” критические точки “модели RSOS” [11, 10]. Укажем еще, что при $N = 2, 3$ построенные здесь решения совпадают²⁾ с минимальными теориями $p = 3, 5$ и описывают соответственно критические точки Z_2 модели Изинга и Z_3 модели Поттса. Мы предполагаем, что наши решения с $N \geq 3$ описывают самодуальные критические точки в Z_N -моделях Изинга; подробнее эта гипотеза обсуждается в разд. 6.

2. Самодуальные системы с Z_N -симметрией и парафермионные токи

Рассмотрим некоторую двумерную решеточную статистическую систему, обладающую циклической симметрией (простейший пример такой системы — Z_N -модель Изинга — описан в разд. 6). Z_N -степени свободы такой системы можно описывать, сопоставляя узлам, скажем, квадратной решетки L “спиновые” переменные σ_r , $r \in L$, принимающие N значений ω^q , $q = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, где

$$\omega = \exp(2\pi i/N). \quad (2.1)$$

Полезно сразу определить $N - 1$ (зависимых) переменных

$$\sigma_{k,r} = (\sigma_r)^k, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1,$$

принимающих значение ω^{kq} . Мы будем обозначать $\sigma_{N-k,r} = \sigma_{k,r}^+$. Предположим, что система имеет критическую точку, в которой радиус корреляции “спинов” $\sigma_{k,r}$ расходится. В такой критической теории дальние корреляции спинов σ_k можно описывать непрерывными конформными полями $\sigma_k(x)$; $x \in R^2$ ($\sigma_{N-k} = \sigma_k^+$), имеющими некоторые

²⁾ В действительности наше решение с $N = 3$ совпадает лишь с определенным “четным” сектором $p = 5$ минимальной модели. Физическая природа полей, составляющих “нечетный” сектор этой минимальной модели, остается неясной.

аномальные размерности $2d_k$, причем $d_k = d_{N-k}$. Z_N -симметрия критической теории состоит в инвариантности корреляций относительно преобразования

$$\sigma_k(x) \rightarrow \omega^{mk} \sigma_k(x) \quad (2.2)$$

с любым целым m . Будем говорить, что поле $\sigma_k(x)$ имеет " Z_N -заряд" k . Разумеется, Z_N -заряд определен по модулю N .

Для Z_N -симметричных систем существует дуальность порядок-беспорядок (симметрия Краммерша-Ванье) [15–18]. Будем предполагать, что в обсуждаемой критической точке Z_N -система является самодуальной, т.е. инвариантной при преобразовании Краммерса-Ванье. Это означает, что кроме конформных полей $\sigma_k(x)$ (параметров порядка) в теории имеются дуальные конформные поля $\mu_k(x)$; $k = 1, 2, \dots, N-1$ (параметры беспорядка) с теми же аномальными размерностями $2d_k$. Не вдаваясь в подробности определения (см., например, [19, 20]), укажем основное свойство дуальных полей $\mu_k(x)$. Корреляционные функции

$$\langle \sigma_{k_1}(x_1) \dots \sigma_{k_n}(x_n) \mu_{l_1}(y_1) \dots \mu_{l_m}(y_m) \rangle \quad (2.3)$$

являются, вообще говоря, N -значными функциями координат $x_i, y_j \in R^2$; при продолжении, скажем, по переменной x_i вдоль контура,

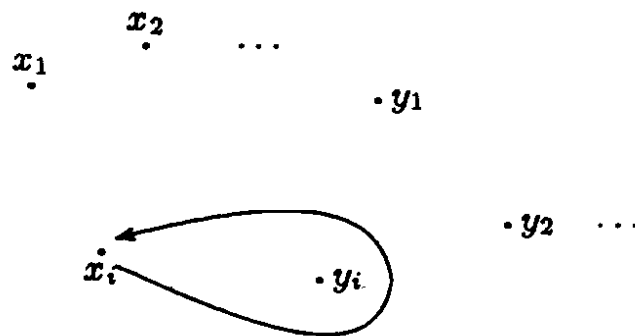


Рис. 1. Контур, вдоль которого продолжается корреляционная функция по переменной x_i

охватывающего точку y_j против часовой стрелки (как показано на рис. 1), корреляционная функция (2.3) приобретает фазовый множитель $\tilde{\omega}^{k_i l_j}$. Мы будем называть поля $\sigma_k(x)$ и $\mu_l(x)$ с таким свойством взаимно полулокальными³⁾ с показателем взаимной локальности $\gamma_{kl} = -kl/N$. Поля $A(x)$ и $B(x)$ взаимно локальны, если показатель $\gamma_{AB} = 0 \pmod{\mathbb{Z}}$. Поле $A(x)$ называется полулокальным (локальным), если оно полулокально (локально) относительно себя. Например, поля $\sigma_k(x)$ и $\sigma_{k'}(x)$ (а также $\mu_k(x)$ и $\mu_{k'}(x)$) взаимно-локальны.

³⁾ Поля с таким свойством локальности успешно использовались Са-то, Мива, Джимбо в их исследованиях по голономным квантовым теориям поля; см., например, [21].

В самодуальных системах все корреляции инвариантны относительно замены $\sigma_k \leftrightarrow \mu_k$. При этом, кроме Z_N -симметрии (2.2), теория обладает дуальной \tilde{Z}_N -инвариантностью

$$\mu_l(x) \rightarrow \omega^{ln} \mu_l(x), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Таким образом, поля $\mu_l(x)$ имеют дуальный \tilde{Z}_N -заряд, равный l . Вообще мы будем говорить, что поле $\phi_{(k,l)}(x)$ имеет $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -заряд $\{k, l\}$, если при преобразованиях (2.2), (2.4) оно преобразуется следующим образом:

$$\phi_{(k,l)}(x) \rightarrow \omega^{km+ln} \phi_{(k,l)}(x). \quad (2.5)$$

Так, поля $\sigma_k(x)$ и $\mu_k(x)$ имеют заряды $\{k, 0\}$ и $\{0, k\}$. Укажем, что в самодуальной Z_N -теории поля $\phi_{(k,l)}(x)$ и $\phi_{(k',l')}(x)$ взаимно полулокальны с показателем

$$\gamma_{(k',l')}^{(k,l)} = -(kl' + k'l)/N. \quad (2.6)$$

Мы будем предполагать, что рассматриваемая $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -теория C - и P -инвариантна, причем одновременно с этими инверсиями следует выполнять преобразования полей

$$\begin{aligned} C: \quad \sigma_k &\rightarrow \sigma_k^+ : & \mu_k &\rightarrow \mu_k^+; \\ \mathfrak{P}: \quad \sigma_k &\rightarrow \sigma_k^+ : & \mu_k &\rightarrow \mu_k^+. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для случая Z_N -симметрии (модели Изинга) наиболее сингулярные члены операторного разложения произведения $\sigma(x)\mu(x)$ (где $\sigma = \sigma_1$, $\mu = \mu_1$) имеют вид (см., например, [3])

$$\sigma(z, \bar{z})\mu(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (z\bar{z})^{-1/8} [z^{1/2}\psi(0) + \bar{z}^{1/2}\bar{\psi}(0) + \dots], \quad (2.8)$$

где мы ввели комплексные координаты ²:

$$z = x_1 + ix_2; \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad (2.9)$$

а $\psi(z)$ и $\bar{\psi}(\bar{z})$ есть соответственно “правый” и “левый” компоненты свободного ферми-поля [22], подчиняющегося безмассовому уравнению Дирака $\partial_{\bar{z}}\psi = \partial_z\bar{\psi} = 0$. В случае $N > 2$ наиболее сингулярные члены операторных разложений $\sigma_k(x)\mu_k(0)$ и $\sigma_k(x)\mu_k^+(0)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_k(z, \bar{z})\mu_k(0, 0) &= z^{\Delta_k - 2d_k} \bar{z}^{\bar{\Delta}_k - 2d_k} [\psi_k(0, 0) + \dots]; \\ \sigma_k(z, \bar{z})\mu_k^+(0, 0) &= z^{\bar{\Delta}_k - 2d_k} \bar{z}^{\Delta_k - 2d_k} [\bar{\psi}_k(0, 0) + \dots], \end{aligned} \quad (2.10)$$

где учтены симметрии (2.7). Здесь $\bar{\psi}_k$ и $\bar{\psi}_k$ — некоторые конформные поля, а Δ_k и $\bar{\Delta}_k$ — неотрицательные параметры (“размерности” этих полей). Поскольку показатель взаимной локальности полей σ_k и μ_k

равен $-k^2/N$, имеем

$$\Delta_k - \bar{\Delta}_k = -\frac{k^2}{N} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Мы предположим, что существуют самодуальные критические точки Z_N -моделей с $N > 2$, для которых, аналогично (2.8), $\bar{\Delta} = 0$, а поля ψ_k и $\bar{\psi}_k$ подчиняются уравнениям

$$\partial_z \psi_k = 0, \quad \partial_z \bar{\psi}_k = 0, \quad (2.11)$$

соответственно чему мы будем писать $\psi_k(z)$, $\bar{\psi}_k(\bar{z})$. При этих условиях параметры Δ_k в (2.10) совпадают со спинами полей $\psi_k(z)$ и имеют значения

$$\Delta_k = m_k - k^2/N, \quad (2.12)$$

где m_k — некоторые целые числа. Поля ψ_k и $\bar{\psi}_k$ полулокальны и имеют $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -заряды соответственно $\{k, k\}$ и $\{k, -k\}$. В отличие от локальных, полулокальные поля могут иметь дробные спины. Естественно назвать поля $\psi_k(z)$ и $\bar{\psi}_k(\bar{z})$ **парафермионными токами**.

Наиболее простое выражение для Δ_k , учитывающее (2.12) и удовлетворяющее требованию $\Delta_{N-k} = \Delta_k$, есть

$$\Delta_k = k(N - k)/N. \quad (2.13)$$

Ниже мы считаем, что спины Δ_k парафермионных токов ψ_k даются формулой (2.13).

3. Алгебра парафермионных токов

Сосредоточим внимание на парафермионных токах $\psi_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, имея в виду, что все сказанное ниже справедливо также для токов $\bar{\psi}_k(\bar{z})$. Удобно присоединить единичный оператор I к семейству токов ψ_k , полагая $\psi_0 \equiv I$, и использовать обозначение $\psi_k^+ = \psi_{N-k}$.

Рассмотрим операторное разложение произведения $\psi_k(z)\psi_{k'}(z')$. Поскольку показатель взаимной локальности полей ψ_k и $\psi_{k'}$ равен $-2kk'/N$, а для их спинов (2.13) справедливо соотношение

$$\Delta_{k+k'} - \Delta_k - \Delta_{k'} = -2kk'/N. \quad (3.1)$$

Это разложение можно записать в виде

$$\psi_k(z)\psi_{k'}(z') = c_{k,k'}(z - z')^{\Delta_{k+k'} - \Delta_k - \Delta_{k'}} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z')^n \Psi_{k+k',k}^{(n)}(z'), \quad (3.2)$$

где $\Psi_{k+k',k}^{(n)}$ — некоторые поля, имеющие $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -заряд $\{k+k', k+k'\}$. Здесь и далее суммы $k+k'$ понимаются по модулю N . Поле $\Psi_{k+k',k}^{(n)}(z)$ имеет спин $\Delta_{k+k'}$ и совпадает с парафермионным

током $\psi_{k+k'}(z)$. Числовые параметры $c_{k,k'}$, которые мы называем структурными константами алгебры парафермионных токов, зависят от нормировки полей ψ_k . Мы положим

$$\langle \psi_k(z) \psi_{k'}^+(0) \rangle = \delta_{kk'} z^{-2\Delta_k}, \quad (3.3)$$

т. е. $c_{k,N-k} = 1$. Остальные структурные константы $c_{k,k'}$ должны быть определены из условия ассоциативности операторной алгебры (3.2) (см. ниже).

Остановимся подробнее на разложении (3.2) с $k + k' = 0 \pmod{N}$. В этом разложении $\Psi_{0,k}^{(0)}$ совпадает с единичным оператором I , а поле $\Psi_{0,k}^{(1)}(z)$ имеет спин 1. Если бы такое поле существовало в теории, оно генерировало бы более широкую, чем Z_N , группу симметрии $U(1)$. Имея в виду Z_N -симметричную критическую теорию, описанную в разд. 2, потребуем равенства

$$\Psi_{0,k}^{(1)}(z) = 0. \quad (3.4)$$

Что касается полей $\Psi_{0,k}^{(2)}(z)$, имеющих спин 2, то их естественно отождествить с соответствующей компонентой тензора энергии импульса теории

$$\Psi_{0,k}^{(2)}(z) = (2\Delta_k/c)T(z). \quad (3.5)$$

Стоящий здесь числовой коэффициент $2\Delta_k/c$ диктуется требованием конформной инвариантности [3]; c — центральный заряд в соответствующей алгебре конформных генераторов (алгебре Вирасоро), определяемый операторным разложением

$$T(z)T(z') = \frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{1}{z-z'} \partial'_z T(z') + O(1). \quad (3.6)$$

Таким образом, операторные разложения, задающие алгебру парафермионных токов ψ_k в $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -теории, имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_k(z)\psi_{k'}(z') &= \\ &= c_{k,k'}(z-z')^{-2kk'/N} [\psi_{k+k'}(z') + O(z-z')]; \quad k+k' < N, \end{aligned} \quad (3.7a)$$

$$\begin{aligned} \psi_k(z)\psi_{k'}^+(z') &= \\ &= c_{k,N-k'}(z-z')^{-2k(N-k')/N} [\psi_{k-k'}(z') + O(z-z')]; \quad k' < k, \end{aligned} \quad (3.7b)$$

$$\begin{aligned} \psi_k(z)\psi_k^+(z') &= \\ &= (z-z')^{-2k(N-k)/N} [I + (2\Delta_k/c)(z-z')^2 T(z') + O((z-z')^3)]; \end{aligned} \quad (3.7c)$$

$$T(z)\psi_k(z') = \frac{\Delta_k}{(z-z')^2} \psi_k(z') + \frac{1}{z-z'} \partial'_z \psi_k(z') + O(1). \quad (3.8)$$

Последнее соотношение означает просто, что $\psi_k(z)$ — конформные поля [3].

Операторные разложения (3.7) позволяют вычислить явным образом любую корреляционную функцию

$$\langle \psi_{k_1}(z_1) \psi_{k_2}(z_2) \dots \psi_{k_n}(z_n) \rangle. \quad (3.9)$$

Рассмотрим сначала $2n$ -точечную функцию

$$\langle \psi_1(z_1) \psi_1(z_2) \dots \psi_1(z_n) \psi_1^+(\eta_1) \psi_1^+(\eta_2) \dots \psi_1^+(\eta_n) \rangle. \quad (3.10)$$

Домножая (3.10) на

$$\prod_{i=2}^n (z_1 - z_i)^{2/N} \prod_{j=1}^n (z_1 - \eta_j)^{-2/N},$$

мы получим аналитическую функцию переменной z_1 , однозначную (вследствие свойств взаимной полулокальности полей ψ_1, ψ_1^+ , см. разд. 2) на всей комплексной плоскости и имеющую полюса второго порядка в точках $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Эта функция вполне определяется своими вычетами в полюсах, поскольку условие регулярности полей $\psi_k(z)$ при $z \rightarrow \infty$ гласит [3]:

$$\psi_k(z) \sim z^{-2\Delta_k} \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Вычеты же можно вычислить, пользуясь разложением (3.7с). Указанные соображения позволяют написать соотношение

$$\begin{aligned} \langle \psi_1(z_1) \dots \psi_1(z_n) \psi_1^+(\eta_1) \dots \psi_1^+(\eta_n) \rangle = & \\ = \prod_{i=2}^n (z_1 - z_i)^{2/N} \prod_{j=1}^n (z_1 - \eta_j)^{-2/N} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{(z_1 - \eta_k)^2} + \right. & \\ + \frac{2/N}{(z_1 - \eta_k)} \left[\sum_{i=2}^n \frac{1}{\eta_k - z_i} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \frac{1}{\eta_k - \eta_m} \right] \Big\} \times & \\ \times \prod_{q=2}^n (z_q - \eta_k)^{2/N} \prod_{p=2}^{k-1} (\eta_p - \eta_k)^{-2/N} \prod_{r=k+1}^n (\eta_k - \eta_r)^{-2/N} \times & \\ \times \langle \psi_1(z_2) \dots \psi_1(z_n) \psi_1^+(\eta_1) \dots \psi_1^+(\eta_{k-1}) \psi_1^+(\eta_{k+1}) \dots \psi_1^+(\eta_n) \rangle, & \end{aligned} \quad (3.12)$$

выражающее $2n$ -точечную функцию (3.10) через $2n - 2$ -точечные. Использование (3.12) дает возможность вычислить (3.10), последовательно понижая порядок корреляционной функции. Разумеется, любые корреляторы (3.9) можно затем получить из (3.10), применяя (3.7). При этом один и тот же коррелятор (3.9) можно вычислять многими разными способами. Оказывается, что получаемые таким образом корреляторы (3.9) не зависят от способа вычисления (т.е. операторная алгебра, определяемая соотношениями (3.7), ассоциативна),

лишь если структурные константы $c_{k,k'}$ имеют вид

$$c_{k,k'}^2 = \frac{\Gamma(k+k'+1)\Gamma(N-k+1)\Gamma}{(N-k'+1)\Gamma(k+1)\Gamma(k'+1)\Gamma(N-k-k'+1)\Gamma(N+1)}. \quad (3.13)$$

Кроме того, алгебра парафермионных токов (3.7) согласована с конформными тождествами Уорда [3], определяемыми соотношениями (3.6), (3.8), при условии, что центральный заряд c в (3.6) равен

$$c = 2(N-1)/(N+2). \quad (3.14)$$

Отметим, что построенная здесь алгебра парафермионных токов не является единственным решением условия ассоциативности. Другая алгебра, также ассоциированная с циклической группой Z_N , но отличающаяся значениями спинов полей ψ_k , приведена в приложении А.

4. Пространство полей в $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -теории и представления алгебры парафермионных токов

В работе [3] операторная алгебра конформной теории поля была сформулирована в терминах полного набора взаимно локальных полей. Для наших целей удобно расширить это пространство, рассматривая полный (т.е. замкнутый относительно операторной алгебры) набор $\{F\}$ взаимно-полулокальных полей. Естественно считать, что компоненты $T(z)$ и $\bar{T}(\bar{z})$ тензора энергии импульса локальны относительно всех полей в $\{F\}$. При этом классификация полей по представлениям алгебры Вирасоро, развитая в [3], остается в силе. В пространстве $\{F\}$ действуют операторы L_n и \bar{L}_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ассоциированные с полями $T(z)$ и $\bar{T}(\bar{z})$ и подчиняющиеся коммутационным соотношениям

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \quad (4.1)$$

(\bar{L}_n подчинены таким же соотношениям и коммутативны с L_m) Существует некоторое (возможно, бесконечное) число полулокальных конформных полей $\phi_i \in \{F\}$, характеризуемых двумя неотрицательными числами d_i, \bar{d}_i ("размерностями") и удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned} L_n \phi_i &= \bar{L}_n \phi_i = 0 & (n > 0), \\ L_0 \phi_i &= d_i \phi_i, & \bar{L}_0 \phi_i &= \bar{d}_i \phi_i, \\ L_{-1} \phi_i &= \partial_z \phi_i, & \bar{L}_{-1} \phi_i &= \partial_{\bar{z}} \phi_i, \end{aligned} \quad (4.2)$$

причем величины $d_i + \bar{d}_i$ и $d_i - \bar{d}_i$, совпадают соответственно с обычной аномальной масштабной размерностью и спином поля ϕ_i , спин

полулокальных полей может принимать, однако, любые дробные значения. Все остальные поля из $\{F\}$ могут быть получены последовательным применением операторов L_n, \bar{L}_n с $n < 0$ и конформными полями ϕ_i .

В $Z_N \times \tilde{Z}_N$ инвариантной теории, описанной в разд. 2 и 3, пространство полей $\{F\}$ естественно разлагается в прямую сумму подпространств, характеризуемых заданным значением $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -заряда $\{k, l\}$:

$$\{F\} = \frac{1}{2} \bigoplus_{\substack{N \geq q, \bar{q} \geq 1-N \\ q+\bar{q} \in 2\mathbb{Z}}} \{F_{[q, \bar{q}]}\},$$

где мы ввели новое, более удобное, обозначение $[q, \bar{q}] = [k + l, k - l]$ для заряда $\{k, l\}$. Правый и левый заряды q и \bar{q} определены по модулю $2N$ и принимают всевозможные целочисленные значения, такие, что $q + \bar{q}$ четно. Удобно считать, что суммирование в (4.3) распространяется на все $1 - N < q, \bar{q} < N$, при этом сумма (4.3) учитывает каждое значение $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -заряда дважды, и в этом смысле в (4.3) поставлен множитель $1/2$. В этих обозначениях парафермионные токи ψ_k ($\bar{\psi}_k$) имеют заряды $[2k, 0]$ ($[0, 2k]$), а

$$\sigma_k \in \{F_{[k, k]}\}, \quad \mu_k \in \{F_{[k, -k]}\}.$$

Очевидно, любое поле $\phi_{[k, \bar{k}]} \in \{F_{[k, \bar{k}]}\}$ имеет спин

$$2s_{[k, \bar{k}]} = (\bar{k}^2 - k^2)/2N \pmod{\mathbb{Z}}, \quad (4.4)$$

а любые два поля, $\phi_{[k, \bar{k}]}$ и $\phi_{[q, \bar{q}]}$ имеют показатель взаимной локальности

$$\gamma_{[k, \bar{k}]}^{[q, \bar{q}]} = -(kq - \bar{k}\bar{q})/2N. \quad (4.5)$$

В частности, все поля из $\{F_{[k, k]}\}$ (и $\{F_{[k, -k]}\}$) локальны, а $I, T(z), \bar{T}(\bar{z}) \in \{F_{[0, 0]}\}$.

Оказывается возможным классифицировать поля, составляющие пространство (4.3), в соответствии с представлениями алгебры парафермионных токов (3.7). Пусть $\phi_{[k, \bar{k}]} \in \{F_{[k, \bar{k}]}\}$ — некоторое поле, имеющее размерности (d, \bar{d}) . Рассмотрим операторные разложения

$$\psi_1(z)\phi_{[k, \bar{k}]}(0, 0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^{-k/N+m-1} A_{(1+k)/N-m} \phi_{[k, \bar{k}]}(0, 0); \quad (4.6a)$$

$$\psi_1^+(z)\phi_{[k, \bar{k}]}(0, 0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^{k/N+m-1} A_{(1-k)/N-m}^+ \phi_{[k, \bar{k}]}(0, 0), \quad (4.6b)$$

где показатели степеней в рядах (4.6) продиктованы формулой (4.5),

а $A\phi$ и $A^+\phi$ — некоторые поля из $\{F\}$, причем

$$A_{(1+k)/N-m}\phi_{k,\bar{k}} \in \{F_{[k+2,\bar{k}]}\}, \quad d+m - \frac{1+k}{N}, \bar{d}, \quad (4.7a)$$

$$A_{(1+k)/N-m}^+\phi_{k,\bar{k}} \in \{F_{[k-2,\bar{k}]}\}, \quad d+m - \frac{1-k}{N}, \bar{d}, \quad (4.7b)$$

где справа указаны размерности соответствующих полей. Разложения (4.6) служат определением операторов A_ν и A_μ^+ с

$$\nu = \frac{1+k}{N} \pmod{\mathbb{Z}}, \quad \mu = \frac{1-k}{N} \pmod{\mathbb{Z}},$$

действующих в пространстве $\{F\}$ следующим образом:

$$A_{(1+k)/N+m} : \{F_{[k,\bar{k}]}\} \rightarrow \{F_{[k+2,\bar{k}]}\}; \quad (4.8a)$$

$$A_{(1-k)/N+m}^+ : \{F_{[k,\bar{k}]}\} \rightarrow \{F_{[k-2,\bar{k}]}\}. \quad (4.8b)$$

Другая удобная форма записи (4.6) есть

$$A_{(1+k)/N+m}\phi_{[k,\bar{k}]}(0,0) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \psi_1(z) z^{k/N+m} \phi_{[k,\bar{k}]}(0,0), \quad (4.9a)$$

$$A_{(1-k)/N+m}^+\phi_{[k,\bar{k}]}(0,0) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \psi_1^+(z) z^{-k/N+m} \phi_{[k,\bar{k}]}(0,0). \quad (4.9b)$$

Совершенно аналогично, рассматривая токи $\bar{\psi}_1\bar{z}$ и $\bar{\psi}_1^+(\bar{z})$, можно определить операторы \bar{A}_ν и \bar{A}_μ^+

$$\bar{\nu} = \frac{1+\bar{k}}{N} \pmod{\mathbb{Z}}; \quad \bar{\mu} = \frac{1-\bar{k}}{N} \pmod{\mathbb{Z}},$$

действующие в $\{F\}$, причем соответствующие формулы отличаются от (4.6)–(4.9) только заменой $z \rightarrow \bar{z}$, $k \rightarrow \bar{k}$. Мы сосредоточили внимание лишь на токах

$$\psi_1, \quad \psi_1^+, \quad \bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1^+,$$

потому что вследствие (3.7) полная алгебра парафермионных токов $\psi_k, \bar{\psi}_k$ вполне определяется алгеброй введенных здесь операторов

$$A, \quad A^+, \quad \bar{A}, \quad \bar{A}^+.$$

Найдем перестановочные соотношения, определяющие алгебру операторов A, A^+ . Для этой цели рассмотрим двойной интеграл

$$\oint_{c_1} \frac{dz_1}{2\pi i} \oint_{c_2} \frac{dz_2}{2\pi i} \psi_1(z_1) \psi_1^+(z_2) \times \\ \times z_1^{k/N+m} z_2^{-k/N+m} (z_1 - z_2)^{-(N+2)/N} \phi_{[k,\bar{k}]}(0,0), \quad (4.10)$$

где показатели степеней выбраны таким образом, чтобы выражение,

стоящее под знаком интеграла, было однозначной функцией z_1 и z_2 . Контуры интегрирования C_1 и C_2 показаны на рис. 2. Интеграл (4.10)

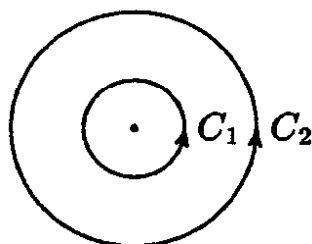


Рис. 2. Контуры интегрирования по переменным z_1 и z_2

можно вычислить двумя различными способами. Первый состоит в последовательном взятии интегралов сначала по z_2 , а потом по z_1 с помощью формул (4.9). При втором способе мы сначала должны деформировать контур C_1 на рис. 2 таким образом, чтобы он попал внутрь контура C_2 . При этом необходимо учесть вклад полюса $z_1 = z_2$ в интеграл по z_1 , вычет в этом полюсе выражается через поле $T(z)$ по формуле (3.7с). Сравнение результатов двух способов интегрирования приводит к соотношению

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_{-(N+2)/N}^{(l)} [A_{-(1-k)/N+n-l-1} A_{(1-k)/N+m+l+1}^+ - A_{-(k+1)/N+m-l}^+ A_{(1+k)/N+n+l}] = \frac{N+2}{N} L_{n+m} + \frac{1}{2} \left(n + \frac{k}{N} \right) \left(n - 1 + \frac{k}{N} \right) \delta_{n+m,0}, \quad (4.11)$$

где биномиальные коэффициенты

$$C_{\lambda}^{(l)} = \frac{\Gamma(l-\lambda)}{l! \Gamma(-\lambda)}. \quad (4.12)$$

В (4.11) мы учли значения (2.13) и (3.14) параметров Δ_1 и s . Аналогичным образом, рассматривая интеграл

$$\oint_{c_1} \frac{dz_1}{2\pi i} \oint_{c_2} \frac{dz_2}{2\pi i} \psi_1(z_1) \psi_1(z_2) z_1^{k/N+n} z_2^{k/N+m} (z_1 - z_2)^{2/N} \phi_{[k,\bar{k}]}(0, 0),$$

получим

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_{2/N}^{(l)} [A_{(3+k)/N+n-l} A_{(1+k)/N+m+l} - A_{(3+k)/N+m-l} A_{(1+k)/N+n+l}] = 0. \quad (4.13)$$

Разумеется, так же “перестановочные” соотношения, с заменой $k \rightarrow -k$, справедливы для операторов A^+ .

Напомним, что, согласно (4.7), поля $A_\nu \phi$ и $A_\mu \phi$ имеют размерности $(d - \nu, \bar{d})$ и $(d - \mu, \bar{d})$, если (d, \bar{d}) — размерности поля ϕ . Поэтому из требования ограниченности снизу спектра размерностей в теории поля следует, что должны существовать поля, аннулируемые всеми операторами A_ν , A_μ^+ с $\nu, \mu > 0$. Для $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -теории определим N скалярных полей $\sigma_k \in \{\Gamma_{[k,k]}\}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ (параметров порядка) с размерностями (d_k, \bar{d}_k) уравнениями

$$\begin{aligned} A_{(1+k)/N+n} \sigma_k &= A_{(1-k)/N+n+1} \sigma_k = 0, \\ \bar{A}_{(1+k)/N+n} \sigma_k &= \bar{A}_{(1-k)/N+n+1}^+ \sigma_k = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

с $n \geq 0$. Применяя к полям σ_k уравнение (4.11) с $n = m = 0$ и используя (4.14), немедленно найдем значения размерностей

$$d_k = \frac{k(N-k)}{2N(N+2)}. \quad (4.15)$$

Аналогично можно определить дуальные поля $\mu_k \in \{\Gamma_{[k,-k]}\}$ (параметры беспорядка) уравнениями

$$\begin{aligned} A_{(1+k)/N+n} \mu_k &= A_{(1-k)/N+n+1} \mu_k = 0, \\ A_{(1-k)/N+n+1} \mu_k &= A_{(1+k)/N+n}^+ \mu_k = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

с $n \geq 0$. Разумеется, их размерности даются той же формулой (4.15). Все поля, составляющие пространство $\{F\}$, могут быть получены последовательным применением операторов $A, A^+, \bar{A}, \bar{A}^+$ к полям σ_k . Независимые поля, получаемые этим способом из поля σ_k , образуют неприводимое представление $[\sigma_k]_A$ алгебры парафермионных токов (4.11), (4.13), а пространство $\{F\}$ представляется прямой суммой

$$\{F\} = \bigoplus_{k=0}^{N-1} [\sigma_k]_A. \quad (4.17)$$

При этом пространство (4.17) содержит, вообще говоря, бесконечно много неприводимых представлений алгебры Вирасоро, исключение составляют случаи $n = 2, 3$, которые связаны с минимальными моделями главной серии (см. Введение) с $p = 3, 5$.

Размерности полей, составляющих $\{F\}$, можно описать следующим образом. С каждым "спиновым" полем σ_k естественно связана серия полей $\Phi_{[g,k]}^{(k)}$ с $g = -k, -k+2, \dots, 2N-k-2$, определяемых формулами

$$\begin{aligned} \phi_{[k+2l,k]}^{(k)} &= A_{(k-1+2l)/N-1} A_{(k-1+2l-2)/N-1} \dots A_{(1+k)/N-1} \sigma_k; \\ l &= 0, 1, \dots, N-k \quad \left(d_k + \frac{l(N-k-l)}{N}, d_k \right), \end{aligned} \quad (4.18a)$$

$$\phi_{[k+2l,k]}^{(k)} = A_{(-1+k-2l)/N}^+ A_{(-1+k+2-2l)/N}^+ \cdots A_{(1-k)/N}^+ \sigma_k; \\ l = 0, 1, \dots, k \quad \left(d_k + \frac{l(k-l)}{N}, d_k \right). \quad (4.18b)$$

Здесь мы не интересуемся нормировками полей и полагаем $\phi_{[q+2n,k]}^{(k)} = \phi_{[q,k]}^{(k)}$. В (4.18) в скобках указаны размерности соответствующих полей. Систему полей $\phi_{[q,l]}^{(k)}$ удобно изобразить точками диаграммы,

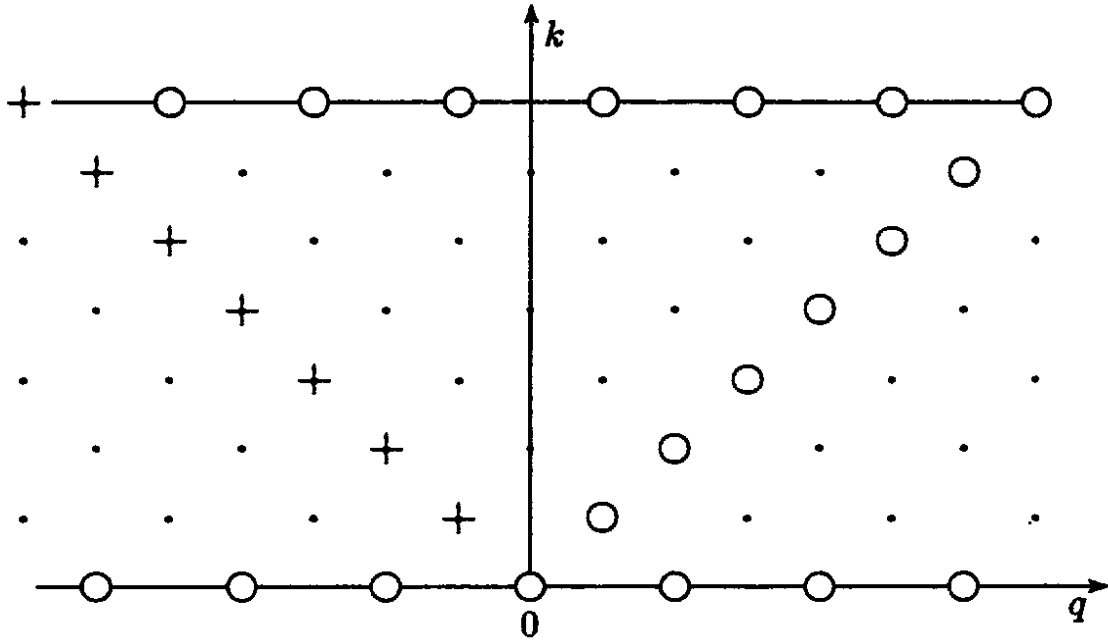


Рис. 3. Диаграмма, описывающая систему полей Φ_{kl} для Z_N -модели

показанной на рис. 3, где по вертикальной оси отложены значения “главного квантового числа” k , а горизонтальная ось показывает значения “правого” заряда q ? причем предполагается отождествление $q + 2N \equiv q$. Отметим, что поля $\phi_{[k,k]}^{(k)}$, изображенные точками на рис. 3, есть сами “спиновые” поля σ_k , дуальные поля $\phi_{[-k,k]}^{(k)} = \mu_k^+$ (крестики на рис. 3), а $\phi_{[2k,0]}^{(0)} - \phi_{[N+2k,N]}^{(N)}$ (кружочки на рис. 3) совпадают с парафермионными токами $\bar{\psi}_k$.

Действуя операторами \bar{A} , \bar{A}^+ аналогично (4.18), можно построить систему “основных” полулокальных полей $\phi_{[q,\bar{q}]}^{(k)}$; $q, \bar{q} = k \pmod{2\mathbb{Z}}$ с размерностями $(d_k^{(q)}, d_k^{(\bar{q})})$, величины $d_k^{(q)}$ с $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ даются, согласно (4.18), формулами

$$d_k^{(q)} = d_k + (k-q)(k+q)/4N, \quad -k \leq q \leq k; \\ d_k^{(q)} = d_k + (q-k)(2N-k-q)/4N, \quad k \leq q \leq 2N-k. \quad (4.19)$$

Отметим, что все поля $\phi_{[q,q]}^{(k)}$ взаимно локальны (в частности, локальны относительно “спинов” σ_k). Среди них особый интерес представляют $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -нейтральные поля. Такие поля существуют при четных $k = 2j$: $\epsilon^{(j)} = \phi_{[0,0]}^{(2j)}$, они имеют размерности (D_j, D_j) , где

$$D_j = j(j+1)/(N+2). \quad (4.20)$$

Эти размерности описывают, очевидно, “термические” показатели для самодуальной критической точки Z_N -теории. Все остальные поля, входящие в $\{F\}$, имеют размерности, отличающиеся от (4.19) на целые числа.

5. Операторная алгебра и корреляционные функции

Подобно “минимальным моделям” [3], любые корреляционные функции “основных” полей в $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -теории, описанной выше, подчиняются специальным линейным дифференциальным уравнениям. В принципе, эти уравнения можно получить непосредственно, используя соотношения (4.2), (4.11), (4.14) и (4.18). Удобнее, однако, воспользоваться следующим замечательным обстоятельством. Алгебра парафермионных токов $\psi_k(z)$ определяемая соотношениями (3.7), (3.13), оказывается тесно связанной с $\hat{su}(2)$ алгеброй Каца–Мути (алгеброй токов) [23]⁴), причем число N играет в последней роль центрального наряда. В известном смысле $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -теорию можно рассматривать как “реакцию” $\hat{su}(2) \times \hat{su}(2)$ инвариантной теории поля, эта последняя теория описывает конформно инвариантное решение двумерной $SU(2) \times SU(2)$ -киральной модели Весса–Зумино [13], и мы называем ее WZ теорией. При этом размерности полей, операторные алгебры и корреляционные функции в обеих теориях связаны весьма простым образом. Основные формулы, касающиеся WZ -теории, приведены в приложении Б.

Введем свободное безмассовое боас-поле $\tilde{\varphi}(z, \bar{z})$, подчиняющееся уравнению $\partial_z \partial_{\bar{z}} \tilde{\varphi} = 0$, т.е.

$$\tilde{\varphi}(z, \bar{z}) = \varphi(z) + \tilde{\varphi}(z), \quad (5.1)$$

где “правое” и “левое” свободные поля φ и $\tilde{\varphi}$ вполне определяются заданием двухточечных функций

$$\langle \varphi(z) \varphi(0) \rangle = -2 \log z, \quad \langle \varphi(\bar{z}) \varphi(0) \rangle = -2 \log \bar{z}, \quad \langle \varphi(z) \varphi(0) \rangle = 0. \quad (5.2)$$

⁴) Алгебра (4.11)–(4.13) появлялась в математической литературе [23] в связи с представлениями алгебр Каца–Мути. В форме, использованной в нашей работе, это соотношение предложено А.А. Белавиным.

Для компонентов $T^{(0)}$, $\bar{T}^{(0)}$ соответствующего тензора энергии-импульса

$$T^{(0)}(z) = (\partial_z \varphi(z))^2, \quad \bar{T}^{(0)}(\bar{z}) = (\partial_{\bar{z}} \varphi(\bar{z}))^2 \quad (5.3)$$

справедлива алгебра Вирасоро (3.6) с центральным зарядом

$$c^{(0)} = 1. \quad (5.4)$$

Рассмотрим конформную теорию поля, распадающуюся на $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -теорию, описанную в разд. 2–4, и свободное поле (5.1), не взаимодействующее с $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -полями. Определим поля

$$\begin{aligned} J^+(z) &= N^{1/2} \psi_1(z) : \exp \left\{ \frac{i}{N^{1/2}} \varphi(z) \right\} :, \\ J^-(z) &= N^{1/2} \psi_1^+(z) : \exp \left\{ -\frac{i}{N^{1/2}} \varphi(z) \right\} :, \\ J^0(z) &= N^{1/2} \partial_z \varphi(z) \end{aligned} \quad (5.5)$$

($::$ — обычное нормальное упорядочение). Показатели экспонент в (5.5) подобраны таким образом, что все три “тока” J^α , $\alpha = 0, +, -$, имеют размерности (1, 0). Для полей (5.5) справедливы следующие легко проверяемые операторные разложения:

$$J^\alpha(z) J^\beta(z') = \frac{N q^{\alpha\beta}}{(z - z')^2} + \frac{f_\gamma^{\alpha\beta}}{(z - z')} J^\gamma(z') + O(1), \quad (5.6)$$

где величины $q^{\alpha\beta}$ и $f_\gamma^{\alpha\beta}$ даются формулами (Б.2). Полный тензор энергии-импульса такой “составной” теории

$$T^{f \circ f}(z) = T(z) + T^{(0)}(z) \quad (5.7)$$

(где $T(z)$ — тензор энергии-импульса $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -теории, определенный формулой (3.7с)) удовлетворяет соотношениям (3.6) алгебры Вирасоро с

$$c^{f \circ f} = c + c^{(0)} = 3N/(N + 2) \quad (5.8)$$

(мы использовали (3.14), (5.4)). Непосредственно проверяется, что поле $T^{f \circ f}$ связано с токами (5.5) соотношением

$$(N + 2) T^{f \circ f}(z) = q_{\alpha\beta} : J^\alpha(z) J^\beta(z) :. \quad (5.9)$$

Сравнение формул (5.6) и (5.9) с (Б.1) и (Б.6) показывает, что токи (5.5) образуют $\hat{su}(2)$ -алгебру Каца–Мури, а рассматриваемая “составная” теория совпадает с WZ -теорией.

Нетрудно понять, что инвариантные поля $\Phi_{m,\bar{m}}^{(j)}$ этой WZ -теории (см. приложение Б) просто связаны с “основными” полями $\phi_{[q,\bar{q}]}^{(k)}$ $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -теории, определенными в разд. 4:

$$\Phi_{m,\bar{m}}^{(j)}(z, \bar{z}) = \phi_{[2m, 2\bar{m}]}^{(2j)}(z, \bar{z}) : \exp \left\{ \frac{i m}{N^{1/2}} \varphi(z) + \frac{i \bar{m}}{N^{1/2}} \varphi(\bar{z}) \right\} :. \quad (5.10)$$

Размерности (D_j, D_j) поля $\Phi^{(j)}$ складываются из размерностей

$$(d_{2j}^{(2m)}, d_{2j}^{(2m)})$$

поля $\Phi_{[2m, 2\bar{m}]}^{(2j)}$ и размерностей экспоненты в (5.10), т.е.

$$D_j = d_{2j}^{(2m)} + \frac{m^2}{N}, \quad (5.11)$$

в соответствии с (4.19) и (Б.11). Из (5.10) следует соотношение

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{m_1, \bar{m}_1}^{(j_1)}(z_1, \bar{z}_1) \dots \Phi_{m_n, \bar{m}_n}^{(j_n)}(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \\ = \prod_{i < i'}^n (z_i - z_{i'})^{2m_i m_{i'}/N} (\bar{z}_i - \bar{z}_{i'})^{2m_i \bar{m}_{i'}/N} \times \\ \times \langle \phi_{[2m_1, 2\bar{m}_1]}^{(2j_1)}(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_{[2m_n, 2\bar{m}_n]}^{(2j_n)}(z_n, \bar{z}_n) \rangle, \end{aligned} \quad (5.12)$$

связывающее корреляционные функции WZ - и $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -теорий. Это соотношение позволяет сразу выписать все структурные константы операторной алгебры и некоторые корреляционные функции $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -теории, используя соответствующие результаты в WZ -теории (см. приложение Б). Трехточечная функция “спиновых” полей σ_k , нормированных условием

$$\langle \sigma_{k_1}(z, \bar{z}) \sigma_{k'}^+(0, 0) \rangle = \delta_{kk'} (z\bar{z})^{-2d_k}, \quad (5.13)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{k_1}(z_1, \bar{z}_1) \sigma_{k_2}(z_2, \bar{z}_2) \sigma_{k_1+k_2}^+(z_3, \bar{z}_3) \rangle = \\ = C_{k_1, k_2} (z_{12} \bar{z}_{12})^{d_{k_1+k_2} - d_{k_1} - d_{k_2}} (z_{13} \bar{z}_{13})^{d_{k_2} - d_{k_1} - d_{k_1+k_2}} \times \\ \times (z_{23} \bar{z}_{23})^{d_{k_1} - d_{k_2} - d_{k_1+k_2}}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где $z_{12} = z_1 - z_2$ и т.д.; а структурные константы имеют вид

$$\begin{aligned} C_{k_1, k_2}^2 = \\ = \left[\Gamma\left(\frac{1}{N+2}\right) \Gamma\left(\frac{1+k_1+k_2}{N+2}\right) \Gamma\left(\frac{N-k_1+1}{N+2}\right) \Gamma\left(\frac{N-k_2+1}{N+2}\right) \right] \times \\ \times \left[\Gamma\left(\frac{N+1}{N+2}\right) \Gamma\left(\frac{N-k_1-k_2+1}{N+2}\right) \Gamma\left(\frac{k_1+1}{N+2}\right) \Gamma\left(\frac{k_2+1}{N+2}\right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Стоит отметить удивительное сходство этой формулы с (3.13). Другая интересная трехточечная функция, включающая нелокальные поля, есть

$$\langle \sigma_k(z_1, \bar{z}_1) \mu_k(z_2, \bar{z}_2) \psi_k^+(z) \rangle = Q_k (z_{12} \bar{z}_{12})^{-2d_k} \left(\frac{(z - z_1)(z - z_2)}{z_1 - z_2} \right)^{-\Delta_k}, \quad (5.16)$$

где

$$Q_k^2 = \frac{k!(N-k)!}{N!}. \quad (5.17)$$

Здесь предполагается, что нормировка полей ψ_k и σ_k определена равенствами (3.3) и (5.13); поля μ_k нормированы такой же формулой (5.13). Разумеется, при такой нормировке полей константа Q_k должна быть введена в формулы (2.10).

Приведем еще некоторые четырехточечные функции теории:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1(z_1, \bar{z}_1) \sigma_1^+(z_2, \bar{z}_2) \sigma_k(z_3, \bar{z}_3) \sigma_k^+(z_4, \bar{z}_4) \rangle = \\ = (z_{12} \bar{z}_{12})^{-2d_1} (z_{34} \bar{z}_{34})^{-2d_k} G_{1,k}(x, \bar{x}), \end{aligned} \quad (5.18)$$

где

$$x = \frac{z_{13} z_{24}}{z_{14} z_{23}}, \quad \bar{x} = \frac{\bar{z}_{13} \bar{z}_{24}}{\bar{z}_{14} \bar{z}_{23}} \quad (5.19)$$

есть стандартные проективные инварианты, а

$$\begin{aligned} G_{1,k}(x, \bar{x}) = (x, \bar{x})^{-k/N(N+2)} \frac{\Gamma[1/(N+2)] \Gamma[N/(N+2)]}{\Gamma[(N+1)/(N+2)] \Gamma[2/(N+2)]} \times \\ \times \left\{ \frac{\Gamma[(k+2)/(N+2)] \Gamma[(N-k+1)/(N+2)]}{\Gamma[(N-k)/(N+2)] \Gamma[(k+1)/(N+2)]} F^{(1)}(k, x) F^{(1)}(k, \bar{x}) + \right. \\ \left. + \frac{(x\bar{x})^{(N+1-k)/(N+2)}}{(N+1-k)^2} \frac{\Gamma[1-k/(N+2)] \Gamma[(k+1)/(N+2)]}{\Gamma[k/(N+2)] \Gamma[1-(k+1)/(N+2)]} \times \right. \\ \left. \times F^{(2)}(k, x) F^{(2)}(k, \bar{x}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Здесь $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ — гипергеометрические функции:

$$\begin{aligned} F^{(1)}(k, x) = F\left(\frac{k}{N+2}, -\frac{1}{N+2}, \frac{k+1}{N+2}, x\right); \\ F^{(2)}(k, x) = F\left(\frac{N+1}{N+2}, \frac{N-k}{N+2}, \frac{2N-k+3}{N+2}, x\right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Четырехточечная функция, описывающая взаимные корреляции полей μ_i и σ_k , имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \mu_1(z_1, \bar{z}_1) \mu_1^+(z_2, \bar{z}_2) \sigma_q(z_3, \bar{z}_3) \sigma_k^+(z_4, \bar{z}_4) \rangle = \\ = (z_{12} \bar{z}_{12})^{-2d_1} (z_{34} \bar{z}_{34})^{-2d_k} H_{1,k}(x, \bar{x}), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} H_{1,k}(x, \bar{x}) = \bar{x}^{k/N} (x\bar{x})^{-k/N(N+2)} \frac{\Gamma[1+1/(N+2)] \Gamma[N/(N+2)]}{\Gamma[(N+1)/(N+2)] \Gamma[2/(N+2)]} \times \\ \times \left\{ \frac{\Gamma[(k+2)/(N+2)] \Gamma[(N-k+1)/(N+2)]}{\Gamma[(N-k)/(N+2)] \Gamma[1+(k+1)/(N+2)]} \right\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times F^{(1)}(k, x)F^{(2)}(N-k, \bar{x}) + x(x\bar{x})^{-(k+1)/(N+2)} \times \\ & \times \frac{\Gamma[1-k/(N+2)]\Gamma[(k+1)/(N+2)]}{\Gamma[k/(N+2)]\Gamma[1+(N+1-k)/(N+2)]} \times \\ & \times F^{(2)}(k, x)F^{(1)}(N-k, \bar{x}) \Big\}. \quad (5.23) \end{aligned}$$

Наконец, приведем коррелятор

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1(z_1, \bar{z}_1) \sigma_1^+(z_3, \bar{z}_3) \varepsilon^{(1)}(z_2, \bar{z}_2) \varepsilon^{(1)}(z_4, \bar{z}_4) \rangle = \\ = (z_{13}\bar{z}_{13})^{-2d_1} (z_{34}\bar{z}_{34})^{-2D_1} E(x, \bar{x}), \quad (5.24) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} E(x, \bar{x}) = [(1-x)(1-\bar{x})]^{-2/N+2} \{ F^{(3)}(x)F^{(3)}(\bar{x}) + \\ + (x\bar{x})^{(N+4)/(N+2)} \rho F^{(4)}(x)F^{(4)}(\bar{x}) \}, \quad (5.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{(3)}(x) = F\left(-\frac{1}{N+2}, -\frac{4}{N+2}, -\frac{2}{N+2}, x\right), \\ F^{(4)}(x) = F\left(\frac{N+3}{N+2}, \frac{N}{N+2}, \frac{2(N+3)}{N+2}, x\right), \quad (5.26) \end{aligned}$$

$$\rho = 4 \frac{\Gamma^3[1-2/(N+2)]\Gamma^2[1+1/(N+2)]\Gamma[4/(N+2)]}{\Gamma^2[2+2/(N+2)]\Gamma^2[-1/(N+2)]\Gamma[2/(N+2)]\Gamma[1-4/(N+2)]}.$$

Здесь $\varepsilon^{(1)}(z, \bar{z})$ — первое из нейтральных полей (4.20), нормированное стандартным условием. Другие корреляционные функции выражаются, вообще говоря, через многократные интегралы, введенные в [7].

В заключение отметим, что соотношение с WZ -теорией, указанное в этом разделе, доказывает справедливость условия положительности [6] в $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -теориях.

6. Обсуждение

В настоящей работе построена конформная теория поля, обладающая Z_N -инвариантностью и симметрией порядок — беспорядок (самодуальностью). Возникает проблема описания статистических моделей, имеющих такое критическое поведение. Во введении уже отмечалось, что значения размерностей (4.15), (4.20) в точности соответствуют показателям, характеризующим “антиферромагнитные” критические точки RSOS-моделей [11, 10]. Кроме того, естественно предполагать, что наше решение описывает самодуальные критические точки для Z_N -обобщений модели Изинга. Хотя Z_N -модели Изинга широко обсуждались в литературе [16–18, 24–26], представляется полезным привести здесь соответствующую формулировку.

Сопоставим каждому узлу \mathbf{r} квадратной решетки L переменную $\sigma_{\mathbf{r}}$, принимающую значения

$$\omega^q, \quad q = 0, 1, \dots, N-1,$$

где ω дается формулой (2.1). Предполагая, что взаимодействуют лишь ближайшие соседи, запишем статистическую сумму в виде

$$Z = \sum_{\sigma_{\mathbf{r}}} \exp \left\{ - \sum_{\mathbf{r}, \alpha=1,2} H(\sigma_{\mathbf{r}}, \sigma_{\mathbf{r}+\mathbf{e}_{\alpha}}) \right\} = \sum_{\sigma_{\mathbf{r}}} \prod_{\mathbf{r}, \alpha} W(\sigma_{\mathbf{r}}, \sigma_{\mathbf{r}+\mathbf{e}_{\alpha}}), \quad (6.1)$$

где $\mathbf{e}_{\alpha} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — базисные векторы решетки L , а $H(\sigma, \sigma')$ — “парный гамильтониан”, который должен быть выбран в таком виде, чтобы обеспечить Z_N -симметрию и “ C -инвариантность” теории

$$H(\omega\sigma, \omega\sigma') = H(\sigma^+, \sigma'^+) = H(\sigma, \sigma'). \quad (6.2)$$

При этих условиях функция $W(\sigma, \sigma')$ может быть представлена в виде

$$W(\sigma, \sigma') \equiv \exp\{-H(\sigma, \sigma')\} = \sum_{k=0}^{N-1} w_k (\sigma^+ \sigma')^k \quad (6.3)$$

с вещественными неотрицательными коэффициентами, удовлетворяющими условию $w_k = w_{N-k}$; мы положим $w_0 = 1$. Таким образом, взаимодействие в такой системе (Z_N -модели Изинга) описывается вещественными параметрами w_k , $k = 1, 2, \dots \leq N/2$, число которых есть $\text{int}(N/2)$ (где int обозначает целую часть).

Дуальное преобразование для модели (6.1), (6.3) выполняется стандартным способом [15–18]. При этом “спины” $\sigma_{\mathbf{r}}$ заменяются на “дуальные спины” $\mu_{\tilde{\mathbf{r}}}$, сопоставленные узлам $\tilde{\mathbf{r}}$ дуальной решетки \tilde{L} , а взаимодействие дуальных спинов описывается теми же формулами (6.1), (6.3)

$$\tilde{w}_k \left(1 + \sum_{q=1}^{N-1} w_q \omega^{kq} \right) \left(1 + \sum_{q=1}^{N-1} w_q \right)^{-1}. \quad (6.4)$$

Система является самодуальной, если выполнены условия

$$\tilde{w}_k = w_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (6.5)$$

Можно показать, что уравнения (6.5) выделяют в пространстве параметров w_k гиперплоскость размерности $\text{int}(N/4)$.

При $N = 2, 3$ модель (6.1), (6.3) совпадает с обычными Z_2 -моделью Изинга и Z_3 -моделью Поттса. В этих случаях условие (6.5) выделяет критические точки этих моделей. На рис. 4, а показана фазовая диаграмма Z_4 -модели Изинга, которая является частным случаем модели Апкина–Теллера [27]. Самодуальные Z_4 -модели описываются прямой

$$w_2 + 2w_1 = 1. \quad (6.6)$$

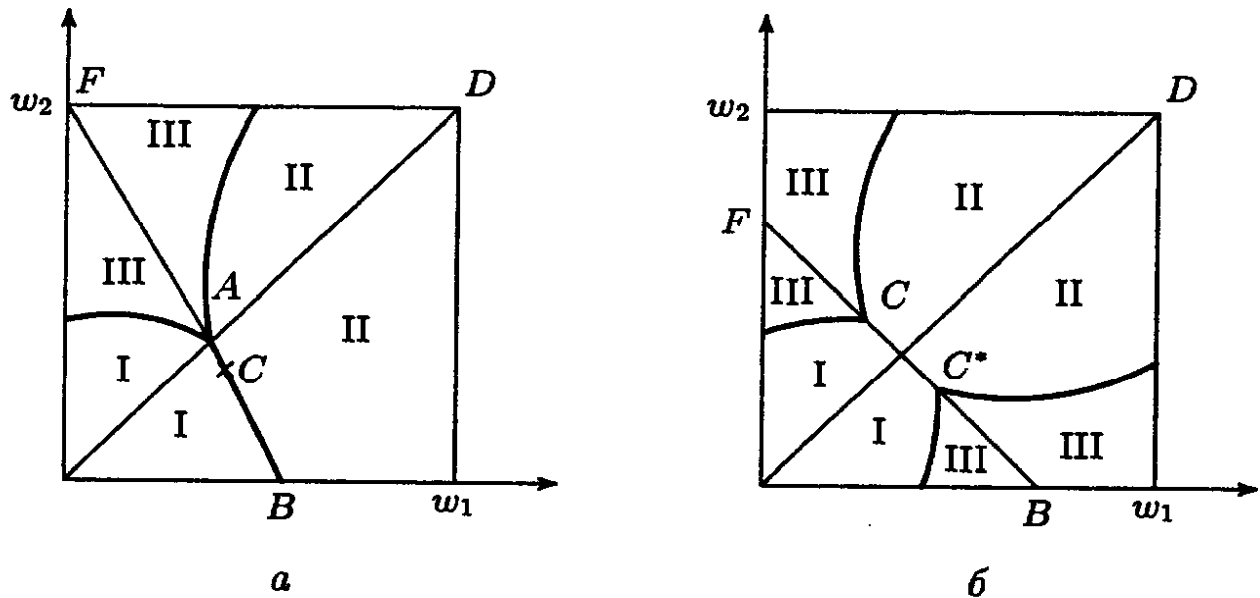


Рис. 4. Фазовые диаграммы Z_4 (а) и Z_5 (б) моделей. FB изображает линию самодуальности. Фазы I, II, III характеризуются значениями: I) $(\sigma) \neq 0$, $(\mu) = 0$; II) $(\sigma) = 0$, $(\mu) \neq 0$; III) $(\sigma) = (\mu) = 0$

При таких значениях параметров модель является точно решаемой [24, 28]. Все точки, принадлежащие отрезку AB прямой (6.6), оказываются критическими, причем показатели непрерывно меняются вдоль этого отрезка. Можно показать, что на отрезке AB существует точка C , определяемая значениями

$$w_1 = \frac{\sin(\pi/16)}{\sin(3\pi/16)}, \quad w_2 = 1 - 2w_1, \quad (6.7)$$

где критическая теория описывается⁵⁾ $Z_N \times Z_N$ -теорией с $N = 4$. Фазовая диаграмма Z_3 -модели Изинга показана на рис. 4, б. На “линии самодуальности” FB , описываемой уравнением

$$w_1 + w_2 = 1/2(\sqrt{5} - 1), \quad (6.8)$$

имеются две симметрично расположенные “точки бифуркации” C и C^* , являющиеся, по всей видимости, критическими [25].

В работе [26] показано, что самодуальные Z_N -модели Изинга вполне интегрируемы, если

$$w_k = \prod_{l=0}^{k-1} \frac{\sin(\pi l/N + \pi/4N)}{\sin(\pi(l+1)/N - \pi/4N)}. \quad (6.9)$$

Наша гипотеза состоит в том, что точки (6.9) фазовых диаграмм Z_N -моделей являются критическими и описываются $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -конформными теориями, построенными в этой работе. Эта гипотеза нуждается, конечно, в проверке. Было бы интересно, в частности, провести численный ренормгрупповой анализ окрестностей то-

⁵⁾ Мы благодарны С.В. Покровскому, сделавшему эту проверку.

чек (6.9). Если наша гипотеза справедлива, соответствующие “термические” показатели должны согласовываться с формулой (1.4). Отметим в этой связи, что число “энергетических” операторов $\varepsilon^{(j)}$ в $Z_N \times \tilde{Z}_N$ -теории в точности соответствует размерности фазового пространства Z_N -модели Изинга.

Приложение А

Рассмотрим конформную теорию, в которой имеются парафермионные токи

$$\psi_k(z), \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

с размерностями $(\Delta_k, 0)$, причем

$$\Delta_k = \Delta_{N-k}. \quad (\text{A.1})$$

Предположим, что операторная алгебра токов ψ_k согласована с Z_N -симметрией и определяется подобно (3.7) разложениями

$$\begin{aligned} \psi_k(z)\psi_{k'}(z') &= \tilde{c}_{kk'}(z-z')^{\Delta_{k+k'}-\Delta_k-\Delta_{k'}} \times \\ &\times \left[\psi_{k+k'}(z') + (z-z') \frac{\Delta_{k+k'} + \Delta_k - \Delta_{k'}}{2\Delta_{k+k'}} \partial_{z'} \psi_{k+k'}(z') + O((z-z')^2) \right]; \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\psi_k(z)\psi_k^+(z') = (z-z')^{-2\Delta_k} \left[I + (z-z')^2 \frac{2\Delta_k}{c} T(z') + O((z-z')^3) \right],$$

где коэффициенты при $\partial_z \psi$ и $T'(z)$ диктуются конформной симметрией [3], c — центральный заряд алгебры Вирасоро, $\tilde{c}_{k,k'}$ — структурные константы, а $\psi_k^+ = \psi_{N-k}$. Из (A.2) видно, что показатель взаимной локальности полей ψ_k и $\psi_{k'}$ равен

$$\gamma_{k,k'} = \Delta_{k+k'} - \Delta_k - \Delta_{k'}, \quad (\text{A.3})$$

причем это свойство взаимной локальности согласовано с операторной алгеброй (A.2), если размерности Δ_k подчиняются уравнению

$$\Delta_{k_1+k_2} + \Delta_{k_1+k_3} + \Delta_{k_2+k_3} = \Delta_{k_1+k_2+k_3} + \Delta_{k_1} + \Delta_{k_2} + \Delta_{k_3} \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (\text{A.4})$$

Общее решение этого уравнения, учитывающее (A.1), имеет вид

$$\Delta_k = pk(N-k)/N + M_k, \quad (\text{A.5})$$

где p и M_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$ — любые целые числа, причем $M_{N-k} = M_k$. Простейшее решение (с $p = 1$ и $M_k = 0$) исследовано в основной части статьи. Приведем здесь другое решение условий ассоциативности алгебры (A.2), отвечающее выбору

$$p = 2, \quad M_k = 0. \quad (\text{A.6})$$

При таком выборе решение содержит один произвольный параметр λ , структурные константы имеют вид

$$\tilde{c}_{k,k'}^2 = c_{k,k'}^2 \frac{\Gamma(k+k'+\lambda)\Gamma(N+\lambda-k)\Gamma(N+\lambda-k')\Gamma(\lambda)}{\Gamma(N+\lambda-k-k')\Gamma(k+\lambda)\Gamma(k'+\lambda)\Gamma(N+\lambda)}, \quad (\text{A.7})$$

где $c_{k,k'}$ определены формулой (3.13), а центральный заряд c дается выражением

$$c = \frac{4(N-1)(N+\lambda-1)\lambda}{(N+2\lambda)(N+2\lambda-2)}. \quad (\text{A.8})$$

Исследование представлений этой алгебры и, в частности, условия положительности [6] выходит за рамки настоящей работы. Отметим только, что при $\lambda = 1/2$ алгебра (A.2), (A.5)–(A.7) совпадает с “четной” подалгеброй Z_{2N} -алгебры (3.7) ($\tilde{c}_{k,k'} = c_{2k,2k'}$), а при $\lambda = 1$ она соответствует “квадрату” Z_N -алгебры (3.7) ($\tilde{c}_{k,k'} = c_{k,k'}^2$). Укажем еще, что эта алгебра с $N = 3$ и $\lambda = 1/4$ возникает в минимальной модели с $p = 6$ (“трикритической Z_N -модели Поттса”).

Приложение Б

Здесь мы приведем основные формулы, относящиеся к конформной теории, инвариантной относительно $\hat{su}(2) \times \hat{su}(2)$ -алгебры токов. Такая теория описывает конформно-инвариантное решение двумерной модели Весса–Зимино [29, 30], поэтому мы называем ее WZ -теорией. Некоторые детали можно найти в [13].

В WZ -теории существуют локальные поля

$$J^\alpha(z), \quad \bar{J}^\alpha(\bar{z}) \quad (\alpha = 0, +, -)$$

(“токи”). Для полей J^α справедливы операторные разложения

$$J^\alpha(z)J^\beta(z') = \frac{Nq^{\alpha\beta}}{(z-z')^2} + \frac{f_\gamma^{\alpha\beta}}{(z-z')} J^\gamma(z') + O(1). \quad (\text{B.1})$$

где $f_\gamma^{\alpha\beta}$ — структурные константы алгебры $su(2)$, а тензор $q^{\alpha\beta}$ определяется соответствующей формой Киллинга; эти величины имеют следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} f_+^{0+} &= -f_+^{+0} = -f_-^{0-} = f_-^{-0} = 1, \\ f_0^{+-} &= -f_0^{+ -} = 2, \\ q^{00} &= 1/2q^{+-} = 1/2q^{-+}1. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Параметр N в (B.1), называемый центральным зарядом алгебры токов, может принимать положительные целые значения (в противном случае алгебра (B.1) не имеет подходящих унитарных представлений).

Пусть $\{A\}$ — полное пространство взаимно-локальных полей, описывающих WZ -теорию. Можно определить операторы

$$J_n^\alpha, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

действующие в этом пространстве, формулами

$$J_n^\alpha \Phi(0, 0) = \oint \frac{dz}{2\pi i} J^\alpha(z) z^n \Phi(0, 0), \quad (\text{Б.3})$$

где Φ — любое поле из $\{A\}$, а контур интегрирования окружает точку $z = 0$. Операторы J_n^α подчиняются, как следует из (Б.1), коммутационным соотношения

$$[J_n^\alpha, J_m^\beta] = f_{\gamma}^{\alpha\beta} J_{n+m}^\gamma + \frac{N}{2} n q^{\alpha\beta} \delta_{n+m,0} \quad (\text{Б.4})$$

и образуют, таким образом, алгебру Каца–Мури. Аналогично (Б.3) (с использованием токов $\bar{J}^\alpha(\bar{z})$) определяются операторы \bar{J}_n^α , которые образуют такую же алгебру (Б.4), причем \bar{J} и J коммутативны. Операторы J_0^α и \bar{J}_0^α генерируют глобальную $SU(2) \times SU(2)$ -симметрию WZ -теории; соответствующие операторы Казимира

$$\begin{aligned} J_0^2 &= q_{\alpha\beta} J_0^\alpha J_0^\beta, \\ \bar{J}_0^2 &= q_{\alpha\beta} \bar{J}_0^\alpha \bar{J}_0^\beta, \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

где

$$q_{\alpha\beta} q^{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha,$$

называются соответственно “правым” и “левым” изотопическими спинами.

Компонента

$$T^{(WZ)}(z)(\bar{T}^{(WZ)}(\bar{z}))$$

тензора энергии-импульса WZ -теории квадратично выражается через токи $j^\alpha(z)(\bar{j}^\alpha(\bar{z}))$:

$$(N+2)T^{(WZ)}(z) = q_{\alpha\beta} :J^\alpha(z)J^\beta(z):, \quad (\text{Б.6})$$

где произведение полей в правой части регуляризовано стандартным вычитанием сингулярного члена операторного разложения [13]. Соответствующие операторы $L_n^{(WZ)}$ представляются в виде

$$(N+2)L_n^{(WZ)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_{\alpha\beta} :J_m^\alpha J_{n-m}^\beta: \quad (\text{Б.7})$$

и образуют алгебру Вирасоро (4.1) с центральным зарядом

$$c^{(WZ)} = \frac{3N}{N+2}. \quad (\text{Б.8})$$

Символ $::$ в (Б.7) обозначает обычное нормальное упорядочение (операторы J_n с $n < 0$ ставятся слева).

В пространстве $\{A\}$ имеются инвариантные поля

$$\Phi^{(j)}, \quad j = 0, 1/2, 1, 1/2, \dots,$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} J_n^\alpha \Phi^{(j)} &= \bar{J}_n^\alpha \Phi^{(j)} = 0, \quad n > 0, \\ J_0^2 \Phi^{(j)} &= \bar{J}_0^2 \Phi^{(j)} = j(j+1)\Phi^{(j)}. \end{aligned} \quad (\text{Б.9})$$

Каждое инвариантное поле $\Phi^{(j)} \in \{A\}$ является $(2j+1)^2$ -компонентным $SU(2) \times SU(2)$ -тензором; его компоненты

$$\Phi_{m, \bar{m}}^{(j)}, \quad m, \bar{m} = -j, -j+1, \dots, j$$

можно определить уравнениями

$$\begin{aligned} J_0^0 \Phi_{m, \bar{m}}^{(j)} &= m \Phi_{m, \bar{m}}^{(j)}, \\ \bar{J}_0^0 \Phi_{m, \bar{m}}^{(j)} &= \bar{m} \Phi_{m, \bar{m}}^{(j)}. \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

Размерности полей $\Phi_{m, \bar{m}}^{(j)}$ не зависят от m, \bar{m} и равны (D_j, D_j) , где

$$D_j = \frac{j(j+1)}{N+2}. \quad (\text{Б.11})$$

Инвариантные поля $\Phi^{(j)}$ могут быть ортонормированы следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{m_1, \bar{m}_1}^{(j_1)}(z, \bar{z}) \Phi_{m_2, \bar{m}_2}^{(j_2)}(0, 0) \rangle &= \\ &= (-1)^{2j_1 - m_1 - \bar{m}_1} \delta^{j_1 j_2} \delta_{m_1 + m_2, 0} \delta_{\bar{m}_1 + \bar{m}_2, 0} (z \bar{z})^{-2D_\mu}. \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

Все независимые поля, получаемые из данного инвариантного поля $\Phi^{(j)}$ последовательным применением операторов $J_n^\alpha, \bar{J}_n^\alpha$ с $n < 0$, образуют подпространство $[\Phi_j^{(j)}] \in \{A\}$, которое соответствует представлению старшего веса $\hat{su}(2) \times \hat{su}(2)$ -алгебры токов.

Корреляционные функции инвариантных полей в WZ -теории подчиняются линейным дифференциальным уравнениям

$$\left\{ (N+2) \frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^n \frac{q_{\alpha\beta} S_i^\alpha S_{i'}^\beta}{z_i - z_{i'}} \right\} \langle \Phi^{(j_1)}(z_1, \bar{z}_1) \dots \Phi^{(j_n)}(z_n, \bar{z}_n) \rangle = 0, \quad (\text{Б.13})$$

где $S_k^\alpha = S_{m_k, m'_k}^\alpha$ есть матрицы $(2j_k+1) \times (2j_k+1)$, действующие на "правые" тензорные значки m_k поля $\Phi_{m_k, \bar{m}_k}^{(j_k)}$, и отвечающие представлению спина j_k алгебры $su(2)$:

$$\begin{aligned} [S_k^\alpha, S_k^\beta] &= f_\gamma^\alpha S_k^\gamma, \\ q_{\alpha\beta} S_k^\alpha S_k^\beta &= j_k(j_k+1). \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

Разумеется, справедливы такие уравнения, получающиеся из (Б.13) заменой $z \rightarrow \bar{z}$ и с матрицами S_k , действующими на "левые" значки \bar{m}_k полей $\Phi^{(j_k)}$.

Можно показать, что при заданном значении N центрального заряда в (Б.1) пространство $\{A\}$ содержит ровно $N + 1$ инвариантных полей

$$\Phi^{(j)}, \quad j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots, N/2$$

(поле $\Phi^{(0)}$ совпадает с единичным оператором 1) и является прямой суммой:

$$\{A\} = \bigoplus_{j=0}^{N/2} [\Phi^{(j)}]_j. \quad (\text{Б.15})$$

Поля, составляющие пространство (Б.15), образуют замкнутую операторную алгебру. Например, произведение двух инвариантных полей может быть разложено по формуле

$$\begin{aligned} \Phi_{m_1, \bar{m}_1}^{(j_1)}(z, z') \Phi_{m_2, \bar{m}_2}^{(j_2)}(0, 0) = \\ = \sum_j \sum_{m, \bar{m}=-j}^j C \begin{pmatrix} j, & m, & \bar{m} \\ j_1, & m_1, & \bar{m}_1 \\ j_2, & m_2, & \bar{m}_2 \end{pmatrix} (z\bar{z})^{D_j - D_{j_1} - D_{j_2}} [\Phi_{m, \bar{m}}^{(j)}]_J(0, 0), \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

где при $j_1 \geq j_2$ сумма по j в правой части содержит слагаемые с

$$\begin{aligned} j &= j_1 - j_2 - j - k, \\ k &= 0, 1, \dots, \min(2j_2, N - 2j_1). \end{aligned}$$

Квадратные скобки $[\Phi^{(j)}]_J$ в (Б.16) обозначают вклад всех полей из соответствующего подпространства, причем поле $\Phi_{m, \bar{m}}^{(j)}$ входит с коэффициентом 1, а коэффициенты, стоящие при остальных полях из $[\Phi^{(j)}]_J$ вполне определяются требованием $\hat{su}(2) \times \hat{su}(2)$ -симметрии. Числовые постоянные C называются структурными константами операторной алгебры. При нормировке (Б.12) эта величина симметрична при перестановках всех трех индексов (скобок), совпадает с нормировочным коэффициентом в трехточечной функции

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{m_1, \bar{m}_1}^{(j_1)}(z_1, \bar{z}_1) \Phi_{m_2, \bar{m}_2}^{(j_2)}(z_2, \bar{z}_2) \Phi_{m_3, \bar{m}_3}^{(j_3)}(z_3, \bar{z}_3) \rangle = \\ = C \begin{pmatrix} j_1 & m_1 & \bar{m}_1 \\ j_2 & m_2 & \bar{m}_2 \\ j_3 & m_3 & \bar{m}_3 \end{pmatrix} (z_{12}\bar{z}_{12})^{D_{j_3} - D_{j_1} - D_{j_2}} (z_{13}\bar{z}_{13})^{D_{j_2} - D_{j_1} - D_{j_3}} \times \\ \times (z_{23}\bar{z}_{23})^{D_{j_1} - D_{j_2} - D_{j_3}}. \end{aligned} \quad (\text{Б.17})$$

Значения структурных констант для WZ -теории могут быть найдены

в явном виде (вычисления будут опубликованы в другой работе):

$$C \begin{pmatrix} j_1 & m_1 & \bar{m}_1 \\ j_2 & m_2 & \bar{m}_2 \\ j_3 & m_3 & \bar{m}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & \bar{m}_3 \end{bmatrix} \rho(j_1, j_2, j_3), \quad (\text{Б.18})$$

где первые два множителя есть $3j$ -символы Вигнера [31],

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^2(j_1, j_2, j_3)}{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j_3 + 1)} = \\ & = \left[\Gamma\left(\frac{N+3}{N+2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2j_1 + 1}{N+2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2j_2 + 1}{N+2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2j_3 + 1}{N+2}\right) \right] \times \\ & \times \left[\Gamma\left(\frac{N+1}{N+2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2j_1 + 1}{N+2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2j_2 + 1}{N+2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2j_3 + 1}{N+2}\right) \right]^{-1} \times \\ & \times H^2(j_1 + j_2 + j_3 + 1) H^2(j_1 + j_2 - j_3) H^2(j_1 + j_3 - j_2) \times \\ & \times H^2(j_2 + j_3 - j_1) / (\Pi^2(2j_1) \Pi^2(2j_2) \Pi^2(2j_3)), \quad (\text{Б.19}) \end{aligned}$$

а Π обозначает функцию

$$\Pi(j) = \prod_{k=1}^j \frac{\Gamma(1 + k/(N+2))}{\Gamma(1 - k/(N+2))}. \quad (\text{Б.20})$$

Литература

1. Поляков А.М., Письма в ЖЭТФ, 1970, 12, 538.
2. Поляков А.М., ЖЭТФ, 1974, 66, 23.
3. Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B., J. Statist. Phys., 1984, 34, 763; Nucl. Phys., 1984, B241, 333.
4. Кас V.G., Lecture Notes in Physics, 1979, 94, 441.
5. Feigin B.L., Fuks D.B., Функциональный анализ, 1982, 16, 47.
6. Friedan D., Qiu Z., Shenker S.H., Phys. Rev. Lett., 1984, 52, 1575.
7. Dotsenko V.I., Fateev V.A., Nucl. Phys., 1984, B240, FS 12, 312; Nucl. Phys., 1985, B251, FS 13, 691; Препринт ИТФ-21, 1985.
8. Dotsenko V.I., J. Statist. Phys., 1984, 34, 781; Nucl. Phys., 1984, B241, 54.
9. Friedan D., Qiu Z., Shenker S., Chicago Univ. Preprint, 1984.
10. Huse D.A., Phys. Rev., 1984, B30, 3908.
11. Andrews G.F., Baxter R.J., Forrester P.J., J. Statist. Phys., 1984, 35, 193.
12. Bershadsky M., Knizhnik V., Teitelman M., Phys. Lett., 1985, B151, 21.

13. *Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B.*, Nucl. Phys., 1989, B247, 83.
14. *Замолодчиков А.Б.*, ТМФ, 1985, 99, 108.
15. *Wu F.V., Wang Y.K.*, J. Math. Phys., 1976, 17, 439.
16. *Замолодчиков Ал.Б.*, ЖЭТФ, 1978, 75, 341.
17. *Доценко В.С.*, ЖЭТФ, 1978, 75, 341.
18. *Fradkin E., Kadanoff L.*, Nucl. Phys., 1980, B170, FS 11.
19. *Kadanoff L., Ceva H.*, Phys. Rev., 1970, B3, 3918.
20. *T'Hooft G.*, Nucl Phys., 1978, B138, 1.
21. *Сато М., Мива Т., Джимбо Н.*, Голономные квантовые поля. М.: Мир, 1983.
22. *McCoу B., Wu T.T.*, The Two Dimensional Ising Model, Harvard University Press, Cambridge MAS, 1973.
23. *Lepowsky J., Wilson G.*, Inventiones Mathematicae, 1984, 77, 199.
24. *Bashilov Yn., Pokrovsky S.*, Comm. Math. Phys., 1982, 84, 103.
25. *Alcaraz F.C., Koberle R.*, J. Phys., 1980, A13, L153.
26. *Fateev V.A., Zamolodchikov A.B.*, Phys. Lett., 1982, 92A, 37.
27. *Ashkin T., Teller E.*, Phys. Rev., 1943, 64, 178.
28. *Barter R.J.* Exactly Solved Models. In: Fundamental Problems in Statistical mechanics. Vol. V/Ed. by E.G.D. Cohen, Amsterdam, 1982.
29. *Willen E.*, Comm. Math. Phys., 1984, 92, 455.
30. *Polyakov A.M., Wiegmann P.B.*, Phys. Lett., 1984, B141, 223.
31. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.*, Квантовая механика. М.: Наука, 1978.

УРАВНЕНИЯ ТИПА КДФ И W -АЛГЕБРЫ

Белавин А.А.

Advanced Studies in Pure Mathematics.

Integrable Systems in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics.
19 (1989). P. 117–125

Существует замечательная связь между конформной теорией поля и теорией уравнений КДФ-типа. В этой работе мне хотелось бы напомнить об этой связи и привлечь к ней внимание.

Операторы симметрии в конформной теории поля (КТП) образуют ассоциативную бесконечномерную алгебру, которая всегда содержит алгебру Вирасоро как подалгебру. Образующие алгебры Вирасоро L_n являются Фурье-компонентами тензора энергии-импульса

$$T(z) = \sum \frac{L_n}{z^{n+2}},$$

удовлетворяющими хорошо известным коммутационным соотношениям

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m, 0}. \quad (1)$$

Однако, алгебра Вирасоро составляет в общем случае лишь часть конформной алгебры (т.е. алгебры симметрий КТП). Известно множество примеров более общих алгебр. Например, алгебра Невью–Шварца, WZW-алгебра, парафермионная F - Z -алгебра и т.д.

Классификация всех возможных видов конформных алгебр является первым шагом на пути классификации всех возможных КТП. Это — важная проблема, которая до сих пор полностью не исследована. А.Б. Замолотчиковым был рассмотрен очень интересный класс указанных алгебр, это так называемые W -алгебры.

Первым примером W -алгебры является сама алгебра Вирасоро. Следующий пример — алгебра, построенная на образующих L_n и на новых образующих $W_n^{(3)}$, которые являются компонентами поля со спином 3:

$$W^{(3)}(z) = \sum \frac{W_n^{(3)}}{z^{n+3}}.$$

Соответствующие коммутационные соотношения имеют следующий вид:

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m, 0},$$

$$[L_n, W_m^{(3)}] = (2n - m) W_{n+m}^{(3)},$$

$$[W_n^{(3)}, W_m^{(3)}] = \frac{16}{22+5c} (n-m) \Lambda_{n+m} + \\ + (n-m) \left(\frac{(n+m+2)(n+m+3)}{15} - \frac{(n+2)(m+3)}{6} \right) L_{n+m} + \\ + \frac{c}{360} (n^2-4)(n^2-1) n \delta_{n+m,0} \quad (2)$$

и

$$\Lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k :L_k L_{n-k}: + \frac{1}{5} x_n L_n, \\ x_{2l} = (l+1)(1-l), \quad x_{2l+1} = (2+l)(1-l).$$

Заметим, что эта алгебра не является алгеброй типа алгебр Ли вследствие наличия квадратичных членов в правой части коммутаторов $[W, W]$. Однако приведенные коммутационные соотношения подчинены жестким ограничениям, вытекающим из ассоциативности рассматриваемой алгебры, например,

$$[W_n, [W_m, W_k]] + \text{перестановки} = 0. \quad (3)$$

В общем случае W -алгебра порождается несколькими полями

$$W^{(j)}(z) \equiv \sum z^{-j-n} W_n^{(j)}$$

с высшими спинами $3 \leq j \leq N$. При этом коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m,0},$$

$$[L_n, W_m^{(j)}] = ((j-1)n - m) W_{n+m}^{(j)},$$

$$[W_n^{(j_1)}, W_m^{(j_2)}] = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_s \\ k_1 + \dots + k_s = n+m}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_s \\ i_1 + \dots + i_s \leq j_1 + j_2 - 1}} \alpha_{(n,m)\{i\}}^{(j_1, j_2)\{k\}} \times \\ \times :W_{k_1}^{(i_1)} \cdot W_{k_2}^{(i_2)} \dots W_{k_s}^{(i_s)}: \quad (4)$$

Здесь в правых частях $W_k^{(2)}$ обозначают L_k и $W_k^{(0)}$ обозначают 1. Вновь в связи с необходимостью согласованности с ассоциативностью алгебры коммутационных соотношений имеют место строгие ограничения на константы $\alpha_{(n,m)\{i\}}^{\{j\}\{k\}}$ и множество $\{j\}$. Возникает вопрос: как много существует W -алгебр? Другая проблема состоит в описании конструкции представлений этих алгебр и соответствующих моделей КТП.

Следующий важный факт может быть полезным для ответа на эти вопросы. Оказывается, что W -алгебра может рассматриваться как квантовая версия некоторой структуры в теории уравнений КдФ

типа. КдФ уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5)$$

Это уравнение является гамильтоновым. Последнее означает, что оно может быть переписано при помощи скобки Пуассона

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{h, u\}.$$

Скобка Пуассона имеет вид

$$\begin{aligned} \{u(x), u(y)\} &= 2u \delta'(x-y) + u' \delta(x-y) + \delta'''(x-y) = \\ &= \left(u' + 2u \frac{d}{dx} + \frac{d^3}{dx^3} \right) \delta(x-y), \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$H = \int u^2 dx.$$

Если взять Фурье-разложение функции $u(x)$ (в том случае, если $u(x)$ периодическая), то скобка Пуассона приобретает хорошо известный вид Вирасоро

$$\{L_n, L_m\} = (n-m) L_{n+m} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m, 0}, \quad (7)$$

где скобки Пуассона заменяют коммутаторы. Таким образом, такая скобка Пуассона может рассматриваться как классический предел алгебры Вирасоро.

Известно, что уравнение КдФ типа связано с дифференциальным оператором второго порядка

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$$

и допускает форму Лакса, т.е. может быть записано в виде

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = [\mathcal{L}, A], \quad (8)$$

где A — некоторый дифференциальный оператор третьего порядка.

КдФ уравнение допускает обобщение до системы уравнений для множества функций $u_1(t, x), \dots, u_N(t, x)$. Это обобщение получается путем взятия вместо оператора \mathcal{L} дифференциального оператора n -го порядка. В этом случае уравнения движения также являются гамильтоновыми, причем скобки Пуассона имеют вид

$$\{u_i(x), u_j(x)\} = \hat{D}_{ij} \delta(x-y), \quad (9)$$

где \hat{D}_{ij} — некий дифференциальный оператор, коэффициенты которого являются полиномами по $u_i(x)$ и их производным. Для

$n = 3$ имеется две функции, скобки Пуассона Фурье-компонентов которых L_n и W_n имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \{L_n, L_m\} &= (n - m) L_{n+m} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m, 0}, \\ \{L_n, W_m^{(3)}\} &= (2n - m) W_{n+m}^{(3)}, \\ \{W_n^{(3)}, W_m^{(3)}\} &= \frac{16}{5c} (n - m) \sum L_k L_{n-k} + \\ &+ (n - m) \left(\frac{(n + m + 2)(n + m + 3)}{15} - \frac{(n + 2)(m + 3)}{6} \right) L_{n+m} + \\ &+ \frac{c}{360} (n^2 - 4)(n^2 - 1) n \delta_{n+m, 0}. \quad (10) \end{aligned}$$

Эти соотношения являются полуклассическим пределом коммутационных соотношений W -алгебры со спином 3, что было отмечено Фейгиным и Ховановой. То есть из соотношений (2) следуют соотношения (10), если мы сделаем подстановки

$$\begin{aligned} [,] &\rightarrow \hbar \{ , \} \\ L_n &\rightarrow \hbar^{-1} L_n, \\ W_n &\rightarrow \hbar^{-1} W_n, \\ c &\rightarrow \hbar^{-1} c, \end{aligned} \quad (11)$$

и затем перейдем к пределу

$$\hbar \rightarrow 0. \quad (12)$$

Этот пример, так же как и рассмотренный выше, подводит нас к естественному предположению, что существует аналогичное соотношение и в общем случае. Если бы мы имели классификацию и умели явно строить гамильтоновы структуры для обобщенных уравнений КдФ типа, мы могли бы пытаться классифицировать и строить W -алгебры путем подходящего квантования этих классических объектов. На самом деле существует явное построение обобщенных уравнений КдФ типа. Это было сделано Дринфельдом и Соколовым в 1980 году путем гамильтоновой редукции естественных гамильтоновых структур, связанных с аффинными алгебрами Ли.

Приведем простейший пример конструкции Дринфельда-Соколова. Рассмотрим аффинную алгебру $\hat{\mathfrak{sl}}(2)$. В этом случае три функции $V^+(x)$, $V^-(x)$, $h(x)$ вместе с дополнительной переменной k рассматриваются как координаты в фазовом пространстве. Скобки Пуассона задаются следующими формулами (скобка Пуассона Бере-

зина-Кириллова-Костанта):

$$\begin{aligned}\{V^+(x), V^{-1}(y)\} &= h(x) \delta(x-y) + k \delta'(x-y), \\ \{h(x), V^\pm(y)\} &= \pm V^\pm(x) \delta(x-y), \\ \{h(x), h(y)\} &= \frac{k}{2} \delta'(x-y).\end{aligned}\quad (13)$$

Множество переменных V^+ , V^- , h , и k может быть связано с линейным матричным дифференциальным оператором

$$\hat{\mathcal{L}} = k \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} h & V^+ \\ V^- & -h \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Теперь рассмотрим группу верхнетреугольных матриц G , действие которой в фазовом пространстве определяется калибровочными преобразованиями вида

$$\hat{\mathcal{L}} \rightarrow G^{-1} \hat{\mathcal{L}} G, \quad (15)$$

где

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \alpha(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это действие является гамильтоновым. Это означает, что любая бесконечно малая ($\alpha(x) \ll 1$) вариация координат имеет форму скобки Пуассона, то есть

$$\begin{aligned}\delta V^+ &= \{V^+, H_\alpha\}, \\ \delta V^- &= \{V^-, H_\alpha\}, \\ \delta h &= \{h, H_\alpha\}\end{aligned}\quad (16)$$

с соответствующей производящей функцией H_α :

$$H_\alpha(x) = \int V^{-1}(x) \alpha(x) dx. \quad (17)$$

Проведем гамильтонову редукцию относительно указанной калибровочной группы. Как обычно гамильтонова редукция состоит из двух шагов. Первый шаг состоит в наложении связей, для чего необходимо зафиксировать гамильтоновы генераторы калибровочной группы. В нашем случае мы полагаем величину V^- равной единице. Можно показать, что комбинация фазовых переменных

$$u(x) = V^+(x) + h(x)^2 + h'(x)$$

коммутирует с генератором калибровочной группы V^- , то есть

$$\{V^-(x), u(y)\} = 0. \quad (18)$$

Эти комбинации образуют полное множество независимых инвариантов относительно действия калибровочной группы.

Следующий шаг гамильтоновой редукции заключается во введении нового фазового пространства и новой скобки Пуассона. Это фазовое пространство состоит из орбит нашей калибровочной группы на поверхности (подпространстве), определенной связями первого шага редукции. Инвариант $u(x) = V^+ + h^2 + h'$ может быть взят в качестве координаты нового фазового пространства. При помощи прямого вычисления можно проверить, что скобка Пуассона между $u(x)$ и $u(y)$ выражается лишь через $u(x)$ и ее производные и имеет вид

$$\{u(x), u(y)\} = \left(u' + 2u \frac{d}{dx} + \frac{d^3}{dx^3} \right) \delta(x - y). \quad (19)$$

Таким образом, гамильтонова редукция $\hat{\mathfrak{sl}}(2)$ -аффинной алгебры приводит к гамильтоновой структуре КдФ уравнения. Аналогично, начиная с алгебры Каца–Мули, мы получаем гамильтонову структуру общего КдФ уравнения. Теперь вернемся к квантовой версии конструкции Дринфельда–Соколова, которая позволит нам построить W -алгебры, начиная с аффинной алгебры.

Сначала вновь рассмотрим случай $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебры. В этом случае имеется три множества генераторов I_n^+ , I_n^- , I_n^0 и центральный заряд k . Коммутаторы хорошо известны. Обозначим через $\mathcal{U}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ обертыивающую алгебру алгебры $\hat{\mathfrak{sl}}(2)$. Алгебра $\mathcal{U}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ содержит идеал N , который по определению

$$n \in N \leftrightarrow n = \sum_k x_k (I_k^- - \delta_{k,0}),$$

где $x_k \in \mathcal{U}_{\hat{\mathfrak{g}}}$.

Найдем те элементы $x \in \mathcal{U}_{\hat{\mathfrak{g}}}$, которые удовлетворяют уравнениям

$$[x, I_m^-] \in N \quad \text{для любого } m. \quad (20)$$

Совокупность таких элементов обозначается через V . Это — квантовая версия первого шага гамильтоновой редукции конструкции Дринфельда–Соколова.

Чтобы сделать следующий шаг, определим W как факторпространство V по идеалу N :

$$W = V/N. \quad (21)$$

Это означает, что W состоит из классов эквивалентности элементов из V :

$$x_1 \sim x_2 \leftrightarrow x_1 - x_2 \in N, \quad (22)$$

где $x_1, x_2 \in V$. Имеют место следующие утверждения:

- а) W является ассоциативной алгеброй.
- б) Более того, W является алгеброй Вирасоро с центральным зарядом

$$c = \frac{3k}{k+2} - 6k. \quad (23)$$

в) Генераторы Вирасоро могут быть представлены выражениями:

$$L_n = \frac{1}{k+2} \sum I_k^a I_{n-k}^a + n I_n^0 - \frac{k}{4} \delta_{n,0}. \quad (24)$$

Вернемся к общему случаю. Пусть \hat{g} — простая алгебра Ли и $X^\alpha, Y^\alpha, H^\alpha$ — ее генераторы Шевалле. Пусть \hat{g} — соответствующая аффинная алгебра с генераторами $X^\alpha, Y^\alpha, H^\alpha$ и центральным зарядом k . Обозначим обертывающую алгебру алгебры \hat{g} через $\mathcal{U}_{\hat{g}}$. Алгебра \hat{g} содержит подалгебру \hat{n} с образующими Y_n^α .

Подалгебра \hat{n} допускает нетривиальное одномерное представление $a \rightarrow \chi(a)$, определенное формулой

$$\chi(Y_n^\alpha) = \delta_{n,0}.$$

Теперь мы можем определить идеал $N \subset \mathcal{U}_{\hat{g}}$ как множество элементов вида

$$\sum_{a \in \hat{n}} x_a (a - \chi(a)), \quad (25)$$

где $x_a \in \mathcal{U}_{\hat{g}}$. Теперь мы можем построить W -алгебру. На первом шаге мы определяем пространство V как пространство, состоящее из элементов, коммутаторы которых с $a \in \hat{n}$ принадлежат N . Следующий шаг состоит в факторизации алгебры V по N . Результат обозначим через $W = V/N$. Затем снова:

а) W является ассоциативной алгеброй.

б) W содержит алгебру Вирасоро как подалгебру, генераторы которой могут быть выбраны в виде

$$L_n = L_n^{SUG} + n \sum (\alpha_i, \rho) H_n^i. \quad (26)$$

Здесь α_i — простые корни алгебры \hat{g} и

$$\rho = \frac{1}{2} \sum \beta,$$

где β — положительные корни.

Наша квантовая версия гамильтоновой редукции имеет следующий БРСТ-аналог, предложенный Б.Л. Фейгиным. Объясним его опять для случая $\hat{g} = \hat{\mathfrak{sl}}(2)$. Расширим $\hat{\mathfrak{sl}}(2)$ фермионными духами ψ_n и $\bar{\psi}_n$ с коммутационными соотношениями вида

$$\begin{aligned} [\psi_n, \psi_m]_+ &= [\bar{\psi}_n, \bar{\psi}_m]_+ = 0, \\ [\psi_n, \bar{\psi}_m]_+ &= \delta_{n+m,0}, \quad [I_n^\alpha, \psi_m] = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Полученную алгебру обозначим через \mathcal{A} .

Рассмотрим векторное пространство M , порожденное образующими

$$I_n^+, \quad I_n^-, \quad I_n^0, \quad \psi_n, \quad \bar{\psi}_n$$

из вакуумного вектора v , удовлетворяющего следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} I_n^a v &= 0 & n > 0, \\ \psi_n v &= 0 & n > 0, \\ \bar{\psi}_n v &= 0 & n \leq 0, \\ I_0^+ v &= 0, \\ I_0^0 v &= l v. \end{aligned} \quad (28)$$

Будем предполагать, что M факторизовано по его подмодулям и, таким образом, неприводимо.

Рассмотрим оператор

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (I_n - \delta_{n,0}) \psi_{-n}. \quad (29)$$

Оператор Q действует в модуле M и

$$Q^2 = 0. \quad (30)$$

При помощи Q мы можем ввести соответствующие кохомологии. Пусть \mathcal{U}_A — обертывающая алгебра алгебры A . Очевидно, что те элементы $x \in \mathcal{U}_A$, для которых

$$[x, Q] = 0 \quad (31)$$

действуют в кохомологиях оператора Q . Путем прямого вычисления легко проверить, что

$$[L_n, Q] = 0$$

для

$$L_n \stackrel{\text{def}}{=} L_n^{SUG} + n I_n^0 - \frac{k}{4} \delta_{n,0} + L_n^{\text{gh}},$$

где

$$L_n^{\text{gh}} = \sum \left(\frac{n}{2} + k \right) : \psi_k \bar{\psi}_{n-k} :.$$

Операторы L_n являются образующими алгебры Вирасоро с центральным зарядом

$$c = \frac{3k}{k+2} - 6k - 2 \quad (32)$$

и

$$\Delta = \frac{l(l+1)}{k+2} - \frac{k}{4}.$$

Модуль M содержит нуль-вектор, если

$$l = \frac{m}{2} (k+2) - \frac{n}{2} \quad (33)$$

для целых m и n . В этом случае соответствующие веса Δ алгебры Вирасоро и c удовлетворяют известному соотношению Каца:

$$\Delta = \frac{c-1}{24} + \left(\alpha_+ \frac{m}{2} + \alpha_- \frac{n}{2} \right)^2, \quad (34)$$

где

$$\alpha_{\pm} = \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}}$$

и

$$c = \frac{3k}{k+2} - 6k - 2.$$

Я благодарен профессору Т. Мива и профессору М. Джимбо за приглашение в RIMS. Я также признателен профессорам Т. Мива, М. Джимбо и Фонду Танигучи за организацию очень полезной конференции. Эта статья основывается на неопубликованной совместной работе с Б.Л. Фейгиным и посвящается 75-летию И.М. Гельфанда.

МОДЕЛИ ДВУМЕРНОЙ КОНФОРМНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С Z_N -СИММЕТРИЕЙ

Лукьянов С.Л., Фатеев В.А.

International Journal of Modern Physics A. V. 3, № 2 (1988). P. 507–520

Построено бесконечное множество конформно-инвариантных решений в двумерной квантовой теории поля, обладающей глобальной Z_N -симметрией. Эти решения могут описывать критическое поведение Z_N -симметричных статистических систем.

1. Введение

Одна из основных проблем теории фазовых переходов второго рода состоит в классификации всех возможных типов критического поведения и вычислении соответствующих критических показателей. Если принять гипотезу о конформной инвариантности критических крупномасштабных флуктуаций [1, 2], то эта проблема сводится к построению всех конформно-инвариантных решений евклидовой квантовой теории поля.

В настоящее время найдены несколько бесконечных серий таких решений в двумерном случае [3–14]. Показано, что некоторые из них описывают известное критическое (мультикритическое) поведение различных двумерных моделей, включая модель Изинга [3] и ее Z_N -обобщения [4], модель Ашкина–Теллера [6] и т.д. Появилась даже надежда возможности построения подобия “периодической таблицы” для двумерных критических и мультикритических явлений.

До сих пор найденные решения обладают, как правило, бесконечными симметриями, которые шире, чем сама по себе группа конформных преобразований и содержат в себе алгебру Вирасоро

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{C}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m,0} \quad (1.1)$$

как подалгебру. Примерами таких симметрий являются суперконформные симметрии [7, 8], расширенные суперсимметрии для $N = 2$ [5, 9, 11], “парафермионные” симметрии [4, 5, 10] и симметрии Каца–Мули [12].

Недавно в работе [13] были построены серии точных решений, обладающих симметрией, порожденной сохраняющимся током $W_3(z)$ спина 3. В этой статье мы вводим бесконечные серии конформно-

инвариантных решений, имеющих дополнительную симметрию, порожденную сохраняющимися токами $W_k(z)$ ($k = 3, 4, \dots, n$) спина $s_k = k$. Эти токи вместе с тензором энергии-импульса $T(z)$ образуют замкнутую операторную алгебру (W_n алгебру). Модели из этих серий обладают глобальной Z_n -симметрией и нумеруются двумя положительными целыми числами n и p ($n = 2, 3, \dots, p = n + 1, n + 2, \dots$). Мы будем обозначать их через $[Z_n^{(p)}]$. Центральный заряд C из (1.1) для этих моделей принимает значения:

$$C = (n - 1) \left(1 - \frac{n(n + 1)}{p(p + 1)} \right), \quad (1.2)$$

и спектр аномальных размерностей W_n -инвариантных полей ("примарных" полей) задается формулой

$$\begin{aligned} \Delta(l/l') &\equiv \Delta(l_1, \dots, l_{n-1}/l'_1, \dots, l'_{n-1}) = \\ &= \frac{12 \left[\sum_{i=1}^{n-1} (pl_i - (p + 1) l'_i) \omega_i \right]^2 - n(n^2 - 1)}{24 p(p + 1)}. \end{aligned} \quad (1.3a)$$

Здесь l_i, l'_i ($i = 1, \dots, n - 1$) — положительные целые числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$\sum l_i \leq p, \quad \sum l'_i \leq p - 1, \quad (1.3b)$$

и векторы ω_i ($i = 1, \dots, n - 1$) являются фундаментальными весами алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$, подчиненными условиям:

$$\omega_k \cdot \omega_s = \frac{k(n - s)}{n} \quad \text{для} \quad k \leq s. \quad (1.4)$$

Поля-предки $\Phi(l/l')$, имеющие размерности (1.3), вместе с их "потомками" образуют замкнутую операторную алгебру. Ее конструкция качественно соответствует идее рассмотрения наборов целых чисел $(l) = (l_1, \dots, l_{n-1})$ и (l') как наивысших весов конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{sl}(n)$. Корреляционные функции полей $\Phi(l/l')$ задаются через мультиконтурные интегралы, обобщающие интегралы Фейгина-Фукса [14, 17].

Модели $[Z_n^{(p)}]$ содержат некоторые известные решения. Так, модели $[Z_2^{(p)}]$ совпадают с моделями $[Mp]$ [3, 16], связанными с сильно вырожденным представлением алгебры Вирасоро; модели $[Z_3^{(p)}]$ были построены раньше в работе [13], а модели $[Z_n^{(n+1)}]$ совпадают с моделями $[Z_n]$ [4], которые описывают критическое поведение Z_n моделей Изинга. Мы предполагаем, что модели $[Z_n^{(p)}]$ для $p > n + 1$ описывают мультикритическое поведение статистических систем

с Z_n -симметрией. В частности, аномальные размерности (1.3) в точности соответствуют критическим показателям, характеризующим критические точки "решаемых решеточных моделей, чьи состояния являются доминантными интегральными весами $A_{n-1}^{(1)}$ ", построенными в недавней работе [20].

2. Структура W_n -алгебры

Рассмотрим двумерную квантовую конформную теорию поля, которая кроме правой и левой компонент тензора энергии-импульса $T(z)$ и $\bar{T}(\bar{z})$ включает также множество сохраняющихся локальных токов $W_k(z)$ ($\bar{W}_k(\bar{z})$) ($k = 3, 4, \dots, n$) со спинами $s_k = k$ ($\bar{s}_k = -k$). Поля W_k (\bar{W}_k) зависят только от переменной $Z = x_1 + ix_2$ ($\bar{Z} = x_1 - ix_2$), т.е. имеют конформные размерности $(k, 0)$ ($(0, k)$). Для нас будет удобно обозначить поле $T(z)$ через $W_2(z)$ ($\bar{T}(\bar{z}) \equiv \bar{W}_2$), а единичный оператор I — через W_0 . На протяжении статьи мы будем сосредоточивать свое внимание на правых компонентах $W_k(z)$, имея в виду, что левые компоненты $\bar{W}(\bar{z})$ обладают теми же свойствами.

Пусть $\{A\}$ пространство локальных полей, образующих операторную алгебру некоторой квантовой теории поля и

$$W_k(z) \in \{A\} \quad (k = 0, 2, \dots, n).$$

В этом пространстве можно ввести операторы

$$W_k(s) \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

при помощи разложений операторных произведений

$$W_k(z) A(z, \bar{z}) = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} (\zeta - z)^{s+k-1} W_k(\zeta) A(z, \bar{z}). \quad (2.1)$$

Здесь A — произвольное поле, принадлежащее пространству $\{A\}$ и интегрирование проводится по малому контуру, содержащему точку z .

Мы будем полагать, что операторы $W_k(s)$ образуют ассоциативную алгебру (W_n -алгебру) с нелинейными коммутационными соотношениями следующего типа:

$$\begin{aligned} [W_{j_1}(s_1), W_{j_2}(s_2)] = \\ = \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{u_1, \dots, u_p} b_{j_1 j_2}^{i_1 \dots i_p}(s_1, s_2 | u_1, \dots, u_p) W_{i_1}(u_1) \dots W_{i_p}(u_p) \end{aligned} \quad (2.2a)$$

где целые числа u_1, \dots, u_p определяются условиями:

$$\sum_{i=1}^p u_i = s_1 + s_2, \quad u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_p \quad (2.2b)$$

и, если $u_l = u_{l+1}$, то $i_l \geq i_{l+1}$. (Произведения типа (2.2а) обычно называются нормально упорядоченными, далее мы будем обозначать их при помощи символа $::$.) Мы также будем предполагать, что структурные коэффициенты b из этой алгебры удовлетворяют следующим ограничениям:

(i) Операторы $W_2(s) \equiv L_s$ образуют подалгебру (1.1);

(ii) Коэффициенты $b_{j_1 j_2}^{i_1 \dots i_p}$ отличны от нуля лишь в случае, когда

$$\sum i_k \leq j_1 + j_2 - 2 \quad (i_1, \dots, i_p; j_1, j_2 \leq n); \quad (2.3)$$

(iii) Коэффициенты $b_{j_1 j_2}^{i_1 \dots i_p} (0, 0 | 0, \dots, 0) = 0$;

(iv) Если в этой алгебре мы выберем базис таким образом, что поля $W_k(z)$ с $k = 3, \dots, n$ будут примарными конформными полями, нормализованными условием

$$\langle W_j(z) W_k(0) \rangle = \delta_k^j z^{-2j} \cdot \frac{c}{j},$$

то все структурные коэффициенты b будут зависеть только от одного свободного параметра, который является центральным зарядом C из (1.1),

Заметим, что приведенные выше ограничения (i)–(iv) обобщают свойства W_3 алгебры, построенной Замолотчиковым в работе [15] путем прямого разрешения условий ассоциативности (тождеств Якоби). Для $n > 3$ такой метод построения примера W_n -алгебры кажется слишком сложным. Таким образом, мы должны удовлетворить тождества Якоби путем построения точного представления нетривиальной W_n -алгебры в универсальной обертывающей алгебре алгебры Гейзенберга.

Для этого мы введем $(n - 1)$ -компонентное безмассовое скалярное поле

$$\phi(z, \bar{z}) = \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z}), \quad \phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n-1})$$

с двухточечными функциями:

$$\begin{aligned} \langle \phi_i(z) \phi_j(0) \rangle &= -2\delta_{ij} \log z, \\ \langle \bar{\phi}_i(\bar{z}) \bar{\phi}_j(0) \rangle &= -2\delta_{ij} \log \bar{z}, \\ \langle \phi_i(z) \bar{\phi}_j(0) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поля $\phi_j(z)$ определяют операторы

$$a_j(s) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} z^s \quad (s = 0, \pm 1, \dots), \quad (2.6a)$$

которые образуют алгебру Гейзенберга

$$[a_i(s_1), a_j(s_2)] = \delta_{i,j} s_1 \delta_{s_1+s_2,0}. \quad (2.6b)$$

Определим в универсальной обертывающей алгебре H_{n-1} алгебры (2.6) систему полей $W_k(z)$ ($k = 0, 2, \dots, n$) следующим образом. Мы рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$R_n = : \prod_{m=1}^n \left(i \alpha_0 \sqrt{2} \frac{d}{dz} + \frac{h_m}{\sqrt{2}} \partial_z \phi \right) :, \quad (2.7)$$

где символ $::$ обозначает нормальное упорядочение полей $\phi(z)$, и n векторов h_i ($i = 1, \dots, n$) образуют переполненную систему векторов в $(n-1)$ -мерном евклидовом пространстве, удовлетворяющую условиям

$$\sum_{i=1}^n h_i = 0, \quad h_i \cdot h_j = \delta_{ij} - 1/n. \quad (2.8)$$

Используя обычные правила коммутирования дифференциальных операторов, мы можем представить произведение R_n в виде

$$R_n = \sum W_k(z) \left(i \alpha_0 \sqrt{2} \frac{d}{dz} \right)^{n-k}, \quad (2.9)$$

которым полностью определяются поля $W_k(z)$. В частности

$$\begin{aligned} W_0 &= I, \\ W_1 &= \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{\sqrt{2}} \partial_z \phi = 0, \\ W_2 &= \frac{1}{2} \sum_{k < j} : h_k \cdot \partial_z \phi (h_j \cdot \partial_z \phi) : + i \alpha_0 \sum_{k=1}^n (n-k) h_k \partial_z^2 \phi = \\ &= -\frac{1}{4} : (\partial_z \phi)^2 : + i \alpha_0 \rho \partial_z^2 \phi, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где вектор

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n+1-2k) h_k, \quad (2.11)$$

$$\rho^2 = \frac{n(n^2-1)}{12}. \quad (2.12)$$

Можно легко проверить, что поле $W_2(z) \equiv T(z)$, определенное уравнением (2.10), порождает алгебру Вирасоро (1.1) с центральным зарядом

$$C = (n-1) - 24 \alpha_0^2 \rho^2 = (n-1)(1-2n(n+1) \alpha_0^2). \quad (2.13)$$

Правильное асимптотическое поведение $T(z) \sim z^{-4}$ при $z \rightarrow \infty$ [3], необходимое для того, чтобы не нарушалась конформная симметрия,

устанавливается путем наложения на поле $\phi(z)$ подходящих асимптотических условий:

$$\phi(z) \sim 2i \alpha_0 \log z, \quad (2.14)$$

где $\alpha_0 = \alpha_0 \rho$.

В классическом случае преобразование (2.7)–(2.9) поля $u_j = \frac{\partial \phi_j}{\partial z}$ в поле $W_k(z)$ известно как преобразование Миуры. Свойства этого преобразования подробно описаны в обзоре [18]. В частности, из результатов, содержащихся в этой статье, следует, что скобка Пуассона для переменных

$$W_j(s) = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{s+k-1} W_j(z)$$

может быть выражена при помощи билинейной формы, т.е. представлена в виде ¹⁾

$$\begin{aligned} \{W_{j_1}(s_1), W_{j_2}(s_2)\} = \\ = \sum_{i_1 i_2} \sum_{u_1 + u_2 = s_1 + s_2} \bar{b}_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}(s_1, s_2/u_1, u_2) W_{i_1}(u_1) W_{i_2}(u_2), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $i_1 + i_2 \leq j_1 + j_2 - 2$ и $\bar{b}_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}(0, 0/0, 0) = 0$. (Здесь скобка (2.15) вычислена при помощи уравнений (2.6), где в (2.6b) мы заменяем коммутатор на классическую скобку Пуассона).

Квантование полей $W_j(z)$ приводит к деформации коэффициентов \bar{b} в ур. (2.15) и к замене обычного произведения на нормально упорядоченное произведение операторов $W_j(s)$. Вычисление коммутационных соотношений для операторов $W_j(s)$ будет детально описано в нашей следующей статье. Здесь мы выпишем лишь коммутаторы операторов $W_j(s)$ с операторами $L_s = W_2(s)$ и $W_3(0)$, которые позволят нам доказать, что поля $W_j(z)$ порождают квантовую W_n -алгебру, а также определить все коэффициенты b в (2.2), используя условие ассоциативности:

$$\begin{aligned} [L_p, W_j(k)] = (p(j-1) - k) W_j(p+k) - \\ - \sum_{q=1}^j (i\alpha_0 \sqrt{2})^q \frac{(n-j+q)!}{(n-j)!} A_{p,q}^j W_{j-q}(p+k), \end{aligned} \quad (2.16a)$$

$$\begin{aligned} [W_3(0), W_j(k)] = 2k(\delta_{j,n} - 1) W_{j+1}(k) + \\ + (\sqrt{2} i\alpha_0)(2j-3+k) k W_j(k) - \frac{2}{n} \sum_{q=1}^j (i\alpha_0 \sqrt{2})^{q-1} \frac{(n-j+q)!}{(n-j)!} \times \end{aligned}$$

¹⁾ Авторы благодарны Т. Ховановой и В.Г. Дринфельду за привлечение внимания к этому важному факту.

$$\times \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_q^{p-k} :W_{j-q}(p) L_{k-p}: + B_k^j W_{j-q}(k) \right\}. \quad (2.16b)$$

Здесь коэффициенты $A_{p,q}^i$, $B_{k,q}^i$, C_q^p имеют значения:

$$C_q^p = \frac{p(p-1) \dots (p-q+1)}{q!},$$

$$A_{p,q}^j = C_{1+q}^{1+p} \left(\frac{(q-1)}{4n} \frac{1}{\alpha_0^2} - j + 1 - \frac{(n-1)(q-1)}{2} \right),$$

$$B_{k,q}^j = (-1)^q k C_{q+1}^{q+1-i} + (C_{q+2}^{q-1+i} (-1)^q - C_{q+2}^{i+1}) \times$$

$$\times \left(\frac{q-1}{4n} \frac{1}{\alpha_0^2} - j + 1 - \frac{(n-1)(q-1)}{2} \right), \quad (2.16c)$$

где в последней формуле $k = 2i$ для четных k и $2i - 1$ для нечетных k .

Соответствующие коэффициенты \bar{b} в ур. (2.15) могут быть получены из ур. (2.16), если положить в ур. (2.16c) $\alpha_0 = \infty$.

3. Пространство полей W_n -инвариантной квантовой теории поля и представление свободного поля

Пространство $\{A\}$ локальных полей в $W_n \otimes W_n$ -инвариантной квантовой теории поля может быть описано при помощи представлений $W_n \otimes W_n$ -алгебры, т.е. разложено в прямую сумму

$$\{A\} = \bigoplus [\Phi_\gamma], \quad (3.1)$$

где $[\Phi_\gamma]$ обозначают неприводимые представления $W_n \times W_n$ -алгебры. Каждое из подпространств $[\Phi_\gamma]$ содержит одно "первичное" поле Φ_γ , удовлетворяющее уравнениям

$$W_k(s) \phi_\gamma = \bar{W}_k \Phi_\gamma = 0 \quad \text{для } s > 0,$$

$$W_k(0) \Phi_\gamma = w_k(\gamma) \Phi_\gamma, \quad \bar{W}_k(0) \Phi_\gamma = \bar{w}_k(\gamma) \Phi_\gamma \quad (3.2)$$

с некоторым числом параметров $w_k(\gamma)$ и $\bar{w}_k(\gamma)$. Множество чисел

$$[w(\gamma)] \equiv [w_2(\gamma) \dots w_n(\gamma)], \quad [\bar{w}(\gamma)]$$

полностью характеризует представление $[\Phi_\gamma] = [\Phi[w(\gamma)]]$. Подпространство $[\Phi_\gamma]$ состоит из полей, порожденных "первичным" полем Φ_γ путем последовательного применения операторов $W_k(s)$, $\bar{W}_k(s)$ с $s < 0$. Чтобы построить W_n -инвариантную квантовую теорию поля, нам надо выбрать множество представлений в (3.1) таким образом, чтобы удовлетворить конформным бутстрапным уравнениям [3] и условию положительности [16].

W_n -алгебра, определенная коммутационными соотношениями (2.1b), может быть представлена в H_{n-1} . Чтобы сделать это, мы введем в H_{n-1} поля $V_\beta = :e^{i\beta\phi}:$. Заметим, что вследствие асимптотического условия (2.14) корреляционные функции полей V_β имеют вид

$$\langle V_{\beta_1}(z_1) \dots V_{\beta_N}(z_N) \rangle = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2\beta_i \beta_j} G(\beta_1, \dots, \beta_N), \quad (3.3a)$$

где

$$G(\beta_1, \dots, \beta_N) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^N \beta_i = 2\alpha_0, \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^N \beta_i \neq 2\alpha_0. \end{cases} \quad (3.3b)$$

Легко проверить, что поля $V_\beta(z)$ удовлетворяют уравнениям (3.2) с параметрами $[w(\beta)]$, которые определяются наиболее сингулярным членом в операторном разложении произведения

$$W_k(z) V_\beta(0) = \frac{w_k(\beta)}{z^k} V_\beta(0) + O(z^{-k+1}). \quad (3.4)$$

Из ур. (2.7) и (2.9) следует для полей $W_k(z)$, что числа $w_k(\beta)$ могут быть получены из следующего соотношения:

$$\prod_{m=1}^n \left(\sqrt{2} i \alpha_0 \frac{d}{dz} - \frac{\sqrt{2} i}{z} h_m \cdot \beta \right) = \sum_{k=1}^n \frac{w_k(\beta)}{z^k} \left(i \alpha_0 \sqrt{2} \frac{d}{dz} \right)^{n-k}. \quad (3.5)$$

Если мы применим ур. (3.5) к функциям

$$\Psi_j = z^j \quad (j = 0, 1, \dots, n-2),$$

то получим систему линейных уравнений для параметров $w_k(\beta)$:

$$(i\sqrt{2})^n \prod_{m=0}^n (n-m+j) \alpha_0 - h_m \cdot \beta = \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!} (i\alpha_0\sqrt{2})^k w_{n-k}(\beta). \quad (3.6)$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$w_k(\beta) = (-i\sqrt{2})^k \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} \prod_{m=1}^k (\alpha_0(k-m) + h_{i_m} \cdot \beta). \quad (3.7a)$$

В частности,

$$w_2(\beta) \equiv \Delta(\beta) = \beta^2 - 2\alpha_0 \cdot \beta. \quad (3.7b)$$

Заметим, что левая часть ур. (3.6) инвариантна относительно следующих дискретных преобразований параметров $\beta \rightarrow \beta'$:

$$h_m \cdot \beta + \alpha_0 m = h'_m \cdot \beta + \alpha_0 m', \quad (3.8)$$

где числа m' получаются из чисел $m = (1, 2, \dots, n)$ путем некоторой перестановки $P \in S_n$. Таким образом, имеется $n!$ различных значений параметров β , соответствующих заданному набору чисел $[w(\beta)]$. В частности, $[w(\beta)] = [w(2\alpha_0 - \beta^*)]$, где вектор β^* определяется соотношением

$$\beta^* \cdot h_i = \beta \cdot h_{n-1}.$$

Преобразование $\beta \rightarrow 2\alpha_0 - \beta^*$ соответствует перестановке

$$(1, 2, \dots, n) \rightarrow (n, n-1, \dots, 1).$$

Представление

$$[\Phi_\beta] \equiv [\Phi[w(\beta)]] \equiv [V_\beta]$$

W_n -алгебры в H_{n-1} может быть получено путем последовательного применения операторов $W_k(s)$ с $s < 0$ к полю V_β , причем мы должны отождествить представления $[V_\beta]$ и $[V_{\beta'}]$, у которых векторы β и β' связаны уравнением (3.8). В частности,

$$[V_\beta] = [V_{2\alpha_0 - \beta^*}].$$

4. Полностью вырожденные представления и спектр Каца

Почти все известные решения конформной квантовой теории поля ассоциированы с вырожденными представлениями алгебр дополнительных симметрий [3, 8, 10] и [13]. Поэтому представляется важным изучение вырожденных представлений W_n -алгебр. Будем говорить, что представление $[\Phi[w]]$ вырождено, если формальное пространство полей, полученное применением операторов $W_k(s)$ с $s < 0$ к "первичному" полю $\Phi[w]$, содержит нуль-вектор, т.е. вектор $\chi_N \in \Phi[w]$, который удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} W_k(n) \chi_N &= 0 \quad \text{для } n > 0, \\ L_0 \chi_N &= W_2 \chi_N = (\Delta + N) \chi_N. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь положительное целое число N называется уровнем вырождения. Если нуль-вектор появляется, то он должен быть положен равным нулю, так как в противном случае представление $[\Phi[w]]$ было бы приводимым. Таким путем мы получим неприводимое вырожденное представление $[\Phi[w]]$, которое не содержит полей, соответствующих нуль-вектору и его потомкам. Конечно, если имеется более одного нуль-вектора, то их все следует положить равными нулю. Мы назовем представление $[\Phi[w]]$ "полностью вырожденным" формально по наличию по меньшей мере $(n-1)$ различных и независимых нуль-векторов χ_{N_i} ($\chi_{N_i} \notin [\chi_{N_j}]$, $i \neq j$) ($i = 1, \dots, n-1$).

При фиксированном C существует некоторое дискретное множество параметров $[w]$, которое определяет данные полностью вырожденные представления W_k -алгебры. Чтобы вычислить это множество,

которое мы называем “спектром Каца”, и построить соответствующие нуль-векторы χ_{N_i} ($i = 1, \dots, n-1$) достаточно использовать представление W_n -алгебры в H_{n-1} .

Введем в H_{n-1} следующие операторы:

$$Q_j^{(\pm)} = \int \frac{dz}{2\pi i} V_j^{(\pm)}(z) \equiv \int \frac{dz}{2\pi i} :e^{i\alpha_{\pm} e_j \phi(z)}:, \quad (4.2)$$

где векторы e_j ($j = 1, \dots, n-1$) образуют базис в системе положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$ и определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} e_i &= h_i - h_{i+1}; & e_i \cdot e_j &= 2\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}; \\ e \cdot h_j &= \delta_{i,j} - \delta_{i+1,j}; & e_j \cdot \rho &= 1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Если параметры α_{\pm} удовлетворяют уравнениям:

$$\alpha_+ + \alpha_- = \alpha_0, \quad \alpha_+ \cdot \alpha_- = -1/2, \quad (4.4)$$

тогда операторы $Q_j^{(\pm)}$ коммутируют со всеми операторами $W_k(s)$.

Чтобы доказать это утверждение, достаточно показать, что сингулярная часть операторного разложения произведения полей

$$W_k(\eta) \quad \text{и} \quad V_j^{(\pm)}(z) = :e^{i\alpha_{\pm} e_j \phi(z)}:$$

может быть представлена в виде

$$W_k(\eta) V_j^{(\pm)}(z) = \frac{\partial}{\partial z} X_k^j(z, \eta) + O(1) \quad (4.5)$$

или

$$R_n(\eta) V_j^{(\pm)}(z) = \frac{\partial}{\partial z} \sum_{m=2}^n X_m^j(z, \eta) \frac{d^{n-m}}{d\eta^{n-m}} + O(1). \quad (4.6)$$

Чтобы вычислить операторное разложение произведения (4.6) заметим, что дифференциальные операторы $\frac{d}{d\eta}$ действуют только на переменную η и что согласно ур. (4.3) только два последовательных члена

$$\left(i\alpha_0 \sqrt{2} \frac{d}{d\eta} + \frac{h_j}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \left(i\alpha_0 \sqrt{2} + \frac{h_{j+1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right):$$

в произведении R_n будут давать вклад в сингулярную часть этого разложения. Непосредственно проверяется, что, если параметры α_{\pm} удовлетворяют ур. (4.4), то мы имеем

$$\begin{aligned} \left(i\alpha_0 \sqrt{2} \frac{d}{d\eta} + \frac{h_j}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \left(i\alpha_0 \sqrt{2} \frac{d}{d\eta} + \frac{h_{j+1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) : V_j^{(\pm)}(z) = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{(z-\eta)} V_j^{(\pm)}(z) \right) + O(1), \end{aligned} \quad (4.7)$$

откуда следует, что операторное разложение произведения

$$R_n(\eta) V_j^{(\pm)}(z)$$

имеет вид (4.6).

Используя операторы $Q_j^{(\pm)}$, которые коммутируют с операторами $W_k(s)$, можно стандартным образом построить нуль-векторы $\chi_{N_i}(\beta) \in [\Phi_\beta] = [V_\beta]$ и получить таким образом соответствующие ограничения на параметры β . Эта процедура для случая W_3 -алгебры подробно описана в работе [13]. Обобщение на случай $n > 3$ тривиально. Таким образом, здесь мы опишем лишь уравнения для параметров β , которые соответствуют (по модулю преобразований (3.8)) полностью вырожденным представлениям W_n -алгебры. Эти уравнения имеют вид

$$e_i \cdot \beta = \alpha_+(l - l'_i) + \alpha_-(l - l'_i) \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (4.8)$$

где l_i, l'_i — положительные целые числа.

В случае, когда уравнения (4.8) выполнены, представление $[V_\beta]$ будет содержать $(n-1)$ нуль-векторов $\chi_{N_i}(\beta)$ со степенями вырожденности $N_i = l_i l'_i$. Решение уравнения (4.8) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \beta(l|l') \equiv \beta(l_1, \dots, l_{n-1} | l'_1, \dots, l'_{n-1}) = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_+ + (1 - l_i) + \alpha_- - (1 - l'_i)) \omega_i, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где векторы ω_i ($i = 1, \dots, n-1$) определяют фундаментальные веса алгебры $\mathfrak{sl}(n)$, удовлетворяющие условиям

$$(\omega_i \cdot e_j) = \delta_{ij}. \quad (4.10)$$

Подставляя векторы β в (3.7), мы получим наборы чисел $[w(l/l')]$, которые определяют спектр Каца полностью вырожденных представлений W_n -алгебры. В частности, аномальные размерности полностью вырожденных полей имеют вид

$$\Delta(l/l') \equiv w_2(l/l') = \left[\sum_{i=1}^{n-1} (l_i \alpha_+ + l'_i \alpha_-) \omega_i \right]^2 - \alpha_0^2. \quad (4.11)$$

5. Корреляционные функции, операторная алгебра и “минимальные модели”

Обозначим через $\Phi(l/l')$ полностью вырожденные “примарные” поля $\Phi[w(l/l')]$ и рассмотрим L -точечную корреляционную функцию

$$\langle \Phi(l_1/l'_1)(z_1) \dots \Phi(l_L/l'_L)(z_L) \rangle, \quad (5.1a)$$

где мы временно опустили зависимость от переменных \bar{z}_i . Представление W_n -алгебры через свободные поля и “примарные” поля

$$\Phi(l/l') \rightarrow V_{\beta(l/l')}(V_{2\alpha_0 - \beta^*(l/l')})$$

дают нам возможность построить стандартным образом (см. [13], [14]) интегральное представление корреляционных функций (5.1a). А именно, с точностью до мультипликативной нормировочной константы эти корреляторы могут быть представлены при помощи следующего интеграла:

$$\langle V_{\beta(1)}(z_1) \dots V_{\beta(L)}(z_L) \times \\ \times \prod_{j=1}^{n-1} \left(\prod_{a=1}^{M_j} \oint d\zeta_a^{(j)} V_j^{(+)}(\zeta_a^{(j)}) \prod_{a=1}^{M'_j} \oint d\eta_a^{(j)} V_j^{(-)}(\eta_a^{(j)}) \right), \quad (5.1b)$$

где используется среднее (3.3) для свободных полей. $\beta(i)$ обозначают либо $\beta(l_i/l'_i)$, либо $2\alpha_0 - \beta^*(l_i/l'_i)$, а интегрирование выполняется над некоторым нетривиальным многообразием, замкнутым на римановой поверхности, соответствующей многозначным функциям подынтегрального выражения в (4.2). Корреляционные функции (5.1a) не исчезают, если можно выбрать целые M_i, M'_i таким образом, чтобы они удовлетворяли условию (3.3b), т.е.

$$\sum_{i=1}^L \beta(i) + \alpha_+ \sum_{j=1}^{n-1} M_j e_j + \alpha_- \sum_{j=1}^{n-1} M'_j e_j = 2\alpha_0. \quad (5.2)$$

Сопоставим каждому полю $\phi(l/l')$ два “ Z_n -заряда” $q_+(l), q_-(l)$

$$q_+(l) = \sum_{i=1}^{n-1} (l_i - 1) i, \\ q_-(l') = \sum_{i=1}^{n-1} (l'_i - 1) i \pmod{n}. \quad (5.3)$$

Если параметр $\rho = 2\alpha_+^2$ является иррациональным, то уравнение (5.2) может быть удовлетворено лишь в случае сохранения Z_n -зарядов q_{\pm} , т.е. когда

$$\sum q_{\pm}(i) = 0 \pmod{n}. \quad (5.4)$$

Анализ корреляционных функций (5.1) показывает, что вырожденные “примарные” поля $\Phi(l/l')$ вместе с их вторичными полями образуют операторную алгебру, т.е. разложение произведения операторов этих полей может быть символически записано в виде

$$\Phi(l/l') \Phi(m/m') = \sum_{(s/s')} [\Phi(s/s')]. \quad (5.5)$$

Набор чисел (s/s') , дающий вклад в правую часть уравнения (5.5) при фиксированных наборах (l/l') и (m/m') , определяет “правила отбора” или “качественную структуру” операторной алгебры. Качественная структура (5.5) соответствует идее представления множеств (l/l') и (m/m') как высших весов конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{sl}(n) \times \mathfrak{sl}(n)$. Поля $\Phi(l/l')$ ассоциируются с соответствующими представлениями алгебры $\mathfrak{sl}(n) \times \mathfrak{sl}(n)$, в то время как разложение произведения операторов (5.5) имеет ту же самую “качественную структуру”, что и ассоциированное $\mathfrak{sl}(n) \times \mathfrak{sl}(n)$ -разложение Клебша–Гордона. Для случая $n = 2, 3$ описанные “правила отбора” были получены в работах [3, 13].

Вообще говоря, операторная алгебра (5.5) содержит бесконечно много полностью вырожденных полей $\Phi(l/l')$. Но существует возможность получить замкнутую операторную алгебру с конечным числом неприводимых представлений W_n -алгебры, т.е. W_n -инвариантную “минимальную модель” теории поля. А именно, можно показать, что, если величина

$$\rho = 2\alpha_+^2 = -\frac{\alpha_+}{\alpha_-}$$

принимает положительные рациональные значения

$$\rho = \frac{p}{p'}, \quad (5.6)$$

где p и p' — взаимно простые положительные числа, то пространство полей

$$\{A\} = \bigoplus_{\sum_{i=1}^{n-1} l_i \leq p'-1} \bigoplus_{\sum_{i=1}^{n-1} l'_i \leq p-1} [\Phi(l/l')] \quad (5.7)$$

образует замкнутую операторную алгебру. Подобный факт известен для других моделей конформной квантовой теории поля, ассоциированных с вырожденными представлениями алгебры дополнительной симметрии (см. [3, 10, 13]). Если условие (5.7) имеет место, тогда мы должны провести следующие отождествления для полей Φ :

$$\Phi(l/l') = \Phi(\tilde{l}_1/\tilde{l}'_1) = \Phi(\tilde{l}_2/\tilde{l}'_2) = \dots = \Phi(\tilde{l}_{n-1}/\tilde{l}'_{n-1}) \quad (5.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} (\tilde{l}_k) &= (l_{n-k+1}, l_{n-k+2}, \dots, l_{n-1}, p' - \sum_{i=1}^{n-1} l_i, l_1, \dots, l_{n-k-1}), \\ (\tilde{l}'_k) &= (l'_{n-k+1}, l'_{n-k+2}, \dots, l'_{n-1}, p - \sum_{i=1}^{n-1} l'_i, l'_1, \dots, l'_{n-k-1}). \end{aligned}$$

Поля (5.8) имеют одинаковые значения параметров $[w]$:

$$[w(l/l')] = [w(\tilde{l}_s/\tilde{l}'_s)], \quad s = 1, \dots, n-1. \quad (5.9)$$

Отождествление (5.8) дает дополнительные ограничения на “качественную структуру” разложения (5.5), которое, в частности, показывает, что минимальная модель (5.7) замыкается как операторная алгебра.

“Главные серии” минимальных моделей, соответствующие выбору $p' = p + 1$ в (5.6), особенно интересны. Мы обозначаем эти модели с $p = n + 1, n + 2, \dots$ через $[Z_n^{(p)}]$. Имеется скрытая связь между этими моделями и представлениями высших весов $\mathfrak{sl}(n)$ -алгебры Каца–Мури, которая дает возможность, следуя Годдару, Кенту и Оливу [19], дать простое доказательство условия положительности. В этом случае параметр

$$\alpha_0^2 = (\alpha_+ + \alpha_-)^2 = \frac{1}{2p(p+1)},$$

а центральный заряд C в (2.13) принимает значения (1.2). После отождествления (5.8) модели $[Z_n^{(p)}]$ содержат

$$\frac{p!(p-1)!}{n!(n-1)!(p-n)!(p-n+1)!}$$

бесспиновых “примарных” полей $\Phi(l/l')$ с аномальными размерностями (1.3), причем все значения параметров $w_k(l/l')$, соответствующих этим полям, могут быть получены из уравнений (5.6), (4.9) и (3.7). Заметим, что отождествление (5.8) нарушает сохранение двух “ Z_n -зарядов” (5.3). Однако один Z_n -заряд всегда выживает. Этот Z_n -заряд для моделей $[Z_n^{(p)}]$ может быть описан следующим образом. Пусть $p = k \pmod{n}$, тогда операторная алгебра моделей $[Z_n^{(p)}]$ инвариантна относительно следующего преобразования:

$$\Phi(l/l') \rightarrow \exp\left(\frac{2\pi i}{N} q(l/l')\right) \Phi(l/l'), \quad (5.10)$$

где

$$q(l/l') = kq_+(l) - (k+1)q_-(l').$$

6. Обсуждение

В предыдущих пунктах было описано бесконечное множество конформно-инвариантных решений в двумерной квантовой теории поля, обладающей глобальной Z_n -симметрией. Важная проблема, до сих пор привлекающая основное внимание, — это проблема описания класса статистических систем, имеющих критическое поведение типа $[Z_n^{(p)}]$. Мы планируем обсудить эту проблему в следующей статье. Здесь мы заметим лишь, что простейшие (при фиксированном n) мо-

дели $[Z_n^{(n+1)}]$ имеют центральный заряд

$$C = \frac{2(n-1)}{n+2} \quad (6.1)$$

и совпадают с $[Z_n]$ -моделями, построенными ранее в работе [4]. В частности, эти модели описывают критические точки Z_n -моделей Изинга. В этом случае следующие "примарные" поля $\Phi(l/l')$ (с точностью до отождествления (5.8)) в модели $[Z_n^{(n+1)}]$ соответствуют спинным полям σ_k и термальным операторам $\varepsilon^{(j)}$ в модели $[Z_n]$:

$$\sigma_k \Rightarrow \Phi(l/l') \begin{cases} l_i = 1, & i \neq k; & l_k = 2, \\ l'_i = 1, & i = 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

$$\varepsilon^{(j)} \Rightarrow \Phi(l/l') \begin{cases} l_i = 1, & i \neq j, n-j; & l_j = l_{n-j} = 2, \\ l'_i = 1, & i = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Поля σ_k и $\varepsilon^{(j)}$ имеют размерности

$$d_k = \frac{k(n-k)}{2n(n+2)} \quad \text{и} \quad D_j = \frac{j(j+1)}{n+2},$$

соответственно.

Авторы признательны А. Белавину, В. Дринфельду, Б. Фейгину, Т. Ховановой, А. Замолодчикову и С.Р. Вадиа за многочисленные полезные обсуждения. Один из нас (В.Ф.) признателен профессору А. Саламу за гостеприимный прием в I.C.T.P. в Триесте, где была завершена эта работа.

Литература

1. Поляков А.М., Письма в ЖЭТФ, 12 (1970) 538.
2. *Patashinski A.Z. and Pokrovskii V.L.*, Fluctuation Theory of Phase Transitions (Pergamon, Oxford, 1979).
3. *Belavin A.A., Polyakov A.M. and Zamolodchikov A.B.*, Nucl. Phys. B241 (1984) 333.
4. Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А., ЖЭТФ, 89 (1985) 1575.
5. Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А., ЖЭТФ, 90 (1986) 1553.
6. Замолодчиков А.Б., ЖЭТФ, 90 (1986) 1675.
7. *Bershadsky M., Kniznik V. and Teitelman M.*, Phys. Lett. B151 (1985) 21.
8. *Eichencher*, Phys. Lett. B151 (1985) 26.
9. *Di Vecchia P., Petersen J.L. and Zhang H.B.*, Phys. Lett. B162 (1985) 327.
10. Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А., ТМФ, 71 (1987) 163.
11. *Boucher W., Friedan D. and Kent A.*, Phys. Lett. B172 (1986) 316.

12. *Kniznik V.G. and Zamolodchikov A.B.*, Nucl. Phys. B247 (1984) 83.
13. *Zamolodchikov A.B. and Fateev V.A.*, Nucl. Phys. B280 (1987) 644.
14. *Dotsenko V.I. and Fateev V.A.*, Nucl. Phys. B240 [FS 12] (1984) 312; Nucl.Phys. B251 (1985) 691.
15. *Замолодчиков А.Б.*, ТМФ, 59 (1985) 108.
16. *Friedan D., Qiu Z. and Shenker S.*, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 1575.
17. *Фейгин Б.Л. и Фукс Д.Б.*, Функ. ан. прил., 16 (1982) 47.
18. *Дринфельд В.Г., Соколов Д.Б.*, ВИНТИ, 24 (1984) 81.
19. *Goddard P., Kent A. and Olive D.*, Phys. Lett. B152 (1985) 88.
20. *Jimbo M., Miwa T., Okado M.*, Solvable Lattice Models Whose States are Dominant Integral Weights of A_{n-1} , Kyoto University preprint RIMS-572 (1987).

Часть III

Квантовая теория струн

КВАНТОВАЯ ГЕОМЕТРИЯ БОЗОННЫХ СТРУН

Поляков А.М.

Phys. Lett. 103B (1981). P. 207-210

Развит формализм вычисления сумм по случайным поверхностям, возникающих во всех проблемах, связанных с калибровочной инвариантностью (как в КХД, трехмерной модели Изинга и т.д.). Эти суммы приводят к точно решаемой квантовой двумерной теории Лиувилля. В размерности $D=26$ струнная динамика, как было предсказано в рамках дуальной теории, переходит в динамику гармонических осцилляторов. В остальных случаях она описывается нелинейной интегрируемой теорией.

В науке существуют методы и формулы, которые являются ключевыми для многих, на первый взгляд разных проблем. Эти ресурсы время от времени должны пополняться. С нашей точки зрения в настоящее время необходимо усовершенствовать методы работы с суммами по случайным поверхностям. Эти суммы выступают вместо старомодных (и исключительно полезных) сумм по случайным путям. Такая замена необходима, поскольку в настоящее время калибровочная инвариантность играет в физике центральную роль. Элементарные возбуждения в калибровочных теориях формируются линиями потоков (замкнутыми при отсутствии зарядов), и временное развитие этих линий образует мировые поверхности. Все амплитуды перехода получаются путем суммирования по всем возможным поверхностям с фиксированной границей. Поставим вопрос, в чем состоит преимущество такого представления амплитуд и какова область его применения.

Общая картина представлялась следующим образом [1]. Возможно, мы имеем теорию свободных струн, которые могут двигаться друг сквозь друга без всякого взаимодействия. Эти струны не соответствуют общей калибровочной теории. Однако взаимодействие между калибровочными струнами таково, что оно не разрушает, а лишь модифицирует сохраняющиеся токи свободных струн. Эта картина является аналогом того, что имеет место в двумерных интегрируемых системах (как синус-Гордон) с заменой слова "частица" словом "струна".

Аналогия идет значительно дальше в случае Z_2 -калибровочной группы (модели Изинга). В этом случае, как было показано в работе [1] и развито в работе [2], оказалось возможным введение некого

сорта фермионных струн, остающихся свободными, аналогично тому, как в двумерной модели Изинга существует свободное фермионное представление.

Однако эти рассуждения имели существенный недостаток: было не известно, что в точности подразумевается под понятием "свободная струна". Было ясно, что аналогично тому как амплитуды свободных частиц определены согласно формуле

$$G(x, x') = \sum_{\text{пути}} \exp[-mL(P_{xx'})], \quad (1)$$

где $P_{xx'}$ — путь, соединяющий точки x и x' и L — длина этого пути, следует определить струнную амплитуду формулой

$$G(C) = \sum_{(S_C)} \exp[-m^2 A(S_C)], \quad (2)$$

где C — некоторая петля, S_C — поверхность, ограниченная этой петлей и $A(S_C)$ — площадь этой поверхности.

Обе формулы (1) и (2) являются символическими, но в то время как в случае (1) известно, как придать смысл и вычислить амплитуду, в случае (2) такого знания нет. Целью настоящей статьи является преодоление, по крайней мере частично, этого пробела. Задача становится еще более привлекательной с учетом аргументов, приведенных в работе [2], откуда следует, что фермионный аналог амплитуды (2) напрямую связан с физикой фазовых переходов. Другое возможное применение — это многоцветная КХД, в которой калибровочные струны также могут оказаться свободными с возможным добавлением фермионных степеней свободы [3].

Начнем наш анализ с чисто бозонного случая и будем работать в евклидовом пространстве. Опишем нашу поверхность при помощи параметризации $x_\mu(\xi_1, \xi_2)$. Нам потребуются некоторые факты, относящиеся к классической геометрии поверхностей. Эти факты не новы (некоторые из них стали известны в XIX веке), но для нашей цели полезно выписать их вместе (см. [4]). Площадь поверхности выражается формулой

$$A = \int d^2\xi (\det ||h_{ab}||)^{1/2}, \quad h_{ab} = \partial_a x_\mu \partial_b x_\mu. \quad (3)$$

Здесь интеграл берется по фиксированной области ξ -плоскости (например, по единичному диску) с границей

$$\xi^a = \xi^a(s).$$

Интеграл (3) инвариантен относительно репараметризации

$$x_\mu(\xi) \rightarrow x_\mu(f(\xi)). \quad (4)$$

Минимальная поверхность находится при помощи вариационного принципа

$$\delta A = \frac{1}{2} \int \sqrt{h} h^{ab} \delta h_{ab} = 0, \quad \delta h_{ab} = \partial_a x_\mu \partial_b x_\mu \delta x_\mu.$$

После интегрирования по частям приходим к следующей системе уравнений:

$$\partial_a (\sqrt{h} h^{ab} \partial_b x_\mu) = 0, \quad h_{ab} = \partial_a x_\mu \partial_b x_\mu. \quad (5)$$

Такие же уравнения получаются из другого функционала

$$W = \frac{1}{2} \int \sqrt{g} g^{ab} \partial_a x_\mu \partial_b x_\mu d^2 \xi, \quad (6)$$

если его минимизировать относительно переменных $x_\mu(\xi)$ и $g_{ab}(\xi)$. Действительно, первая вариация дает уравнение Лапласа

$$\partial_a (\sqrt{g} g^{ab} \partial_b x_\mu) = 0,$$

а вариация относительно g_{ab} дает равенство нулю тензора энергии-импульса

$$T_{ab} = \partial_a x_\mu \partial_b x_\mu - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c x_\mu \partial_d x_\mu = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует, что

$$g_{ab} = \partial_a x_\mu \partial_b x_\mu.$$

Другой необходимый нам факт заключается в том, что возможна такая замена $\xi \rightarrow f(\xi)$ координат, что метрика становится конформно-евклидовой. Функция $f = f_1 + i f_2$ определяется уравнением

$$\partial_a f = i \epsilon_{aa'} \sqrt{g} g^{a'b} \partial_b f. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) может быть выбрано таким образом, что оно дает отображение единичного диска самого на себя:

$$f(\xi(s)) = \xi(\alpha(s)). \quad (9)$$

Здесь $\alpha(s)$ является репараметризацией границы, однозначно связанной с исходной функцией $g_{ab}(\xi)$. Преобразованная метрика имеет вид

$$\rho(\xi) \delta_{ab}, \quad \rho(\xi) = |df/d\xi|^2.$$

Если мы минимизируем функционал (6) относительно переменных $x_\mu(\xi)$ с граничным условием

$$x_\mu(\xi(s)) = x_\mu(s), \quad (10)$$

мы получим соотношения

$$\begin{aligned} A_{\min}[x(s)] &= \min_{\{g_{ab}\}} \min_{\{x_\mu(\xi)\}} W[x(\xi), \{g_{ab}(\xi)\}] = \\ &= \min_{\{\alpha(s)\}} W_{\min}[x_\mu(\alpha(s)), \delta_{ab}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Минимальная площадь $A_{\min}[x(s)]$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} [\delta A_{\min}/\delta x_{\mu}(s)]^2 &= (dx_{\mu}/ds)^2, \\ (dx_{\mu}/ds) \delta A_{\min}/\delta x_{\mu}(s) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

До сих пор мы рассматривали минимальные “классические” поверхности. Перейдем к квантовой теории. Самая первая проблема заключается в правильном определении меры для интегрирования по континууму поверхностей. Эта мера должна учитывать все поверхности заданной площади с одинаковым весом. Это означает, что если мы имеем преобразование Ω , отображающее поверхность S_C (C — граница поверхности) на другую поверхность $\tilde{S}_{\tilde{C}}$ таким образом, что

$$A(\tilde{S}_{\tilde{C}}) = A(S_C),$$

то для любого функционала $\phi[S_C]$ мы должны иметь

$$\int d\mu(S) \phi(S_C) = \int d\mu(S) \phi(\tilde{S}_{\tilde{C}}). \quad (13)$$

Условие (13) приводит к следующему выражению для меры (здесь мы не приводим его вывода):

$$\begin{aligned} \int d\mu(S) \phi(S) &= \int [D g_{ab}(\xi)] \exp\left(-\lambda \int \sqrt{g} d^2\xi\right) \times \\ &\times \int D x(\xi) \left[\exp\left(-\frac{1}{2} \int \sqrt{g} g^{ab} \partial_a x_{\mu} \partial_b x_{\mu} d^2\xi\right) \right] \phi[x(\xi)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь λ — произвольный параметр, D — единичный диск в ξ -плоскости, $[D g_{ab}]$ — мера интегрирования по всем возможным метрикам, такая же как и в общей теории относительности с неким наложенным калибровочным условием (калибровка будет зафиксирована далее). Это выражение может рассматриваться как квантовый аналог действия (6). В классическом пределе g_{ab} играет роль множителей Лагранжа, дающим связи $T_{ab} = 0$. Мы опустили в (14) граничные члены, связанные с эйлеровой характеристикой. Интегрирование выполняется с граничным условием $x_{\mu}(\xi(s)) = x_{\mu}(s)$.

Самое удивительное свойство меры (14) состоит в том, что функциональные интегралы с этой мерой могут быть вычислены явно. Космологический член в (14), который отсутствовал на классическом уровне, необходим для перенормируемости. Возможность выполнения интегрирования по переменной x_{μ} основывается на том, что при помощи координатного преобразования (8) метрика может быть приведена к конформно-евклидову виду, и возникающий интеграл зависит лишь от конформного множителя через конформную аномалию. В такой ситуации, чтобы найти зависимость от $\rho(\xi)$ можно использовать хо-

рошо известный трюк [5]. А именно, следует применить соотношение

$$\int Dx(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2} \int \sqrt{g} g^{ab} \partial_a x_\mu \partial_b x_\mu\right) = \exp(-F),$$

$$g^{ab} \delta F / \delta g^{ab} = g^{ab} \langle T_{ab} \rangle = (D/24\pi) [R(\xi) + \text{const}]. \quad (15)$$

Здесь R — скалярная кривизна и второе из уравнений (15) — хорошо известное аномальное соотношение для следа тензора энергии-импульса. Вычисляя (15) в калибровке $g_{ab}(\xi) = \rho \delta_{ab}$, $R = \rho^{-1} \partial^2 \log \rho$ мы получаем

$$F = -\frac{D}{48\pi} \int d^2\xi \left[\frac{1}{2} (\partial_a \log \rho)^2 + \mu^2 \rho \right]$$

или в произвольных координатах

$$F = -\frac{D}{48\pi} \int d^2\xi d^2\xi' g^{1/2}(\xi) g^{1/2}(\xi') R(\xi) R(\xi') K(\xi, \xi') +$$

$$+ \text{const} \int \sqrt{g} d^2\xi. \quad (16)$$

Здесь K — гриновская функция ковариантного лапласиана

$$\partial_a (\sqrt{g} g^{ab} \partial_b) K(\xi, \xi') = \delta(\xi - \xi'),$$

μ^2 — квадратично расходящаяся перенормировка космологической постоянной. Следующим шагом должно быть интегрирование по переменным g_{ab} . Для этого необходимо выбрать калибровку и учесть детерминант Фаддеева–Попова. Самой удобной является конформная калибровка, в которой наши выражения существенно упрощаются. При выборе меры интегрирования мы воспользуемся следующим разложением вариации метрики:

$$\delta g_{ab}(\xi) = \delta\phi(\xi) g_{ab}(\xi) + \nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a \quad (17)$$

Подставим разложение (17) в выражение для нормы в функциональном пространстве возможных метрик

$$\|\delta g_{ab}\|^2 = \int d^2\xi [g(\xi)]^{1/2} (g^{aa'} g^{bb'} + C g^{ab} g^{a'b'}) \delta g_{ab} \delta g_{a'b'}, \quad (18)$$

где C — произвольная константа, от которой конечный ответ не зависит. Формула (18) является единственно возможным локальным ковариантным выражением. Подставляя (17) в (18), получаем

$$\|\delta g_{ab}\|^2 = (1 + 2C) \int (\delta\phi + \nabla_c \epsilon^c)^2 d^2\xi \sqrt{g} + \int d^2\xi \sqrt{g} \phi_a^b \phi_b^a,$$

$$\phi_{ab} = \nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a - g_{ab} \nabla_c \epsilon^c. \quad (19)$$

При помощи (19) мы выводим выражение для меры интегрирования в пространстве всех метрик

$$d\mu(g_{ab}) = D\varphi(\xi) D\epsilon_a(\xi) (\det \mathcal{L})^{1/2}. \quad (20)$$

Здесь оператор \mathcal{L} получается из последнего слагаемого в (19) и задается при помощи формулы

$$(\mathcal{L}\epsilon)_a = \nabla^b (\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a - g_{ab} \nabla_c \epsilon^c). \quad (21)$$

Этот оператор подобен обычному векторному лаплассиану, но не совпадает с ним. В двух измерениях и в конформно-евклидовой метрике $g_{ab} = \rho \delta_{ab}$ собственные значения оператора \mathcal{L} определяются при помощи следующего уравнения:

$$\rho^{-2} (\partial/\partial \bar{z}) (\rho \partial \psi_n / \partial z) = -\lambda_n \psi_n, \quad z = \xi_1 + i \xi_2. \quad (22)$$

Так как оператор в левой части уравнения (22) является произведением двух конформно-инвариантных операторов, то $\det \mathcal{L}$ снова определяется конформной аномалией и имеет вид

$$-\frac{1}{2} \log \det \mathcal{L} = A \int \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \mu^2 e^\varphi \right] d^2 \xi, \quad \varphi = \log \rho. \quad (23)$$

Константа A легче всего определяется путем сравнения (23) с теорией возмущений для малых φ ; таким образом находим, что

$$A = 13/24 \pi. \quad (24)$$

Собирая вместе (23) и (15), мы получаем статистическую сумму для замкнутых поверхностей:

$$Z = \int D\varphi(\xi) \exp \left(-\frac{26-D}{48\pi} \int_\xi \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \mu^2 e^\varphi \right] \right). \quad (25)$$

Это выражение ясно демонстрирует происхождение хорошо известного в теории струны значения критической размерности [26]: при этом значении размерности конформная аномалия не препятствует квантованию теории, что и было сделано в дуальных моделях. Однако для $D < 26$ при проведении корректного квантования необходимо изучить квантовую теорию Лиувилля, описываемую лагранжианом (25). Эта теория является двумерной, перенормируемой и полностью интегрируемой. Все это означает, что она, как и теория синус-Гордона, точно решается. Таким образом должно оказаться возможным точное вычисление статистической суммы замкнутых поверхностей. Поскольку эта работа находится в процессе развития, то здесь я лишь демонстрирую, как выразить различные физические величины, такие как спектр, амплитуды рассеяния и т.д. через корреляционные функции в квантовой теории Лиувилля. Основопологающая идея — это

суммирование по поверхностям, содержащим данное множество точек $\{x_j\}$. Преобразование Фурье такой амплитуды имеет полюса по p_j^2 (p_j — импульс точки x_j), которые определяют спектр масс. Вычеты в этих полюсах могут быть отождествлены с амплитудами рассеяния. Таким образом, необходимо рассматривать средние

$$A(p_1 \dots p_N) = \left\langle \prod_j \int d^2 \xi_j [g(\xi_j)]^{1/2} \exp[i p_j x(\xi_j)] \right\rangle. \quad (26)$$

Усреднение в (26) понимается в смысле интеграла (14). Поскольку все функциональные интегралы гауссовы, то они легко вычисляются:

$$A(p_1 \dots p_N) = \int D\varphi(\xi) \exp\left(-\frac{26-D}{48\pi} \int d^2 \xi \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \mu^2 e^\varphi\right]\right) \times \\ \times \int \exp\left(\sum_j \varphi(\xi_j)\right) \prod_j d^2 \xi_j \exp\left(-\sum_i p_i p_j K(\xi_i, \xi_j, \varphi)\right). \quad (27)$$

Функция $K(\xi, \xi', \varphi)$ является гриновской функцией для лапласиана в метрике $g_{ab} = e^\varphi \delta_{ab}$. Если точки ξ и ξ' не совпадают, то эта функция в точности определяется формулой

$$K(\xi, \xi') = -(4\pi)^{-1} \log(\xi - \xi')^2. \quad (28)$$

Однако, когда точка ξ близка к ξ' , то требуется дополнительное рассмотрение. Необходимо вспомнить используемое в нашей теории обрезание. Точное значение оператора K задается формулой

$$K(\xi, \xi') = \sum_n [\chi_n(\xi) \chi_n(\xi') / \lambda_n] \exp(-\epsilon \lambda_n), \quad (29)$$

где λ_n — собственные значения, χ_n — собственные функции лапласиана и ϵ — параметр обрезания посредством собственного времени.

При помощи (29) получаем, что

$$K(\xi, \xi^P) = -(4\pi)^{-1} \log(1/\epsilon) + (4\pi)^{-1} \varphi(\xi). \quad (30)$$

В этом случае A -функции (26) определяются корреляторами Лиувилля. Заметим, что лишь при $D = 26$ мы получаем из (27) стандартную дуальную модель в представлении Коба-Нильсена (см. обзор [6]). Для того, чтобы найти амплитуды рассеяния в физических размерностях D необходимо решать теорию Лиувилля.

Несколько слов о проблеме квантования теории Лиувилля. Лагранжиан этой теории обладает симметрией

$$\varphi(z, \bar{z}) \rightarrow \varphi(w(z), \bar{w}(z)) + \log |dw/dz|^2, \quad (31)$$

которая является остаточной симметрией от симметрии общей ковариантности после фиксации конформной калибровки. Теория должна

быть проквантована таким образом, чтобы эта инвариантность сохранилась. Можно доказать, что это действительно возможно и приводит к единственно возможной процедуре перенормировки.

Таким образом, главный наш вывод заключается в том, что суммирование по случайным поверхностям сводится к двумерной точно решаемой теории и что старый дуальный подход к теории струны корректен лишь при $D = 26$.

Распространение этих результатов на фермионный случай и его физические применения обсуждаются в других работах [2, 7].

Я благодарен А.А. Мигдалу и А.Б. Замоладчикову за ценные советы и Д.Г. Макогоненко за бесценную поддержку на последней и более трудной стадии этой работы.

Литература

1. *Polyakov A.M.*, Phys. Lett. 82B (1979) 247.
2. *Dotsenko V.G.* and *Polyakov A.M.*, to be published.
3. *Migdal A.A.*, Nucl. Phys., to be published.
4. *Brink L.* and *Schwarz J.*, Nucl. Phys. B121 (1977) 285.
5. *Schwartz A.S.*, Commun. Math. Phys. 64 (1979) 233.
6. *Mandelstam S.*, Phys. Rep. 13C (1974) 261.
7. *Polyakov A.M.*, Phys. Lett 103B (1981) 211.

НЕИНВАРИАНТНОСТЬ МЕРЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ИНТЕГРАЛЕ — ИСТОЧНИК АНОМАЛИЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ¹⁾

Вергелес С.Н.

Канд. диссертация. Москва: Черноголовка, 1979

Показано, что аномальная дивергенция аксиальных токов возникает из-за неинвариантности фермионной меры во внешнем калибровочном поле при γ^5 -преобразованиях

Рассмотрим функциональный интеграл

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi \exp S. \quad (1)$$

Здесь

$$S = \int dx \bar{\psi} (i\gamma^k \nabla_k + m) \psi, \quad \nabla_k = \partial_k - ie A_k.$$

Метрика считается евклидовой, x -пространство — любой размерности, теория может быть как абелевой, так и неабелевой. Пусть $\{\psi_n\}$ — полный ортонормированный набор собственных функций оператора Дирака:

$$i\gamma^k \nabla_k \psi_n = \epsilon_n \psi_n. \quad (2)$$

Разложим фермионные поля по этому полному набору функций:

$$\psi(x) = \sum_n' \eta_n \psi_n, \quad \bar{\psi}(x) = \sum_n' \bar{\eta}_n \bar{\psi}_n. \quad (3)$$

В разложениях (3) штрих над знаком суммы означает, что суммирование ограничено теми значениями n , для которых

$$|\epsilon_n| < \Lambda \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где Λ — импульс обрезания. Таким образом фермионные поля (3) являются регуляризованными.

¹⁾ Впервые излагаемый здесь метод был применен для вычисления аксиальной аномалии А.А. Мигдалом (*Migdal A.A.*, Phys. Lett. 81B (1979) 37) на основании устного сообщения автора этого письма. Немного позднее этот же метод вычисления аномалий был открыт К. Фуджикавой (*Fujikawa K.*, Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 1195).

Обычно подразумевается, что континуальная фермионная мера в интеграле (1) представляется в виде

$$D\bar{\psi} D\psi = \prod_{x,\nu} d\bar{\psi}_\nu(x) d\psi_\nu(x). \quad (5)$$

Поскольку произведение континуального числа дифференциалов не является корректно определенной величиной, то определим регуляризованную фермионную меру при помощи следующей формулы:

$$(D\bar{\psi} D\psi)_{reg} = \prod_n' d\bar{\eta}_n d\eta_n \equiv \prod_{|\epsilon_n| < \Lambda} d\bar{\eta}_n d\eta_n. \quad (6)$$

Если в x -пространстве наложить периодические граничные условия, то мера (6) становится мерой в конечномерном грассмановом пространстве. Очевидно, что мера (6) является калибровочно инвариантной. Далее мы используем регуляризованную меру (6).

Совершим бесконечно малое аксиальное преобразование фермионных полей:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \tilde{\psi}(x) = \psi(x) + i\alpha(x)\gamma^5\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \tilde{\bar{\psi}}(x) = \bar{\psi}(x) + i\alpha(x)\bar{\psi}(x)\gamma^5. \end{aligned} \quad (7)$$

В терминах переменных η_n и $\bar{\eta}_n$ преобразование (7) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_n &\longrightarrow \tilde{\eta}_n = \eta_n + i \sum_m' \eta_m \int dx \alpha(x) \bar{\psi}_n(x) \gamma^5 \psi_m(x), \\ \bar{\eta}_n &\longrightarrow \tilde{\bar{\eta}}_n = \bar{\eta}_n + i \sum_m' \bar{\eta}_m \int dx \alpha(x) \bar{\psi}_m(x) \gamma^5 \psi_n(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Преобразование (7) формально не изменяет меру (5), в то время как преобразование (8) изменяет меру (6) (в первом порядке по α):

$$\prod_n' d\bar{\eta}_n d\eta_n = \left(1 + 2i \int dx \alpha \sum_m' \bar{\psi}_m \gamma^5 \psi_m\right) \prod_n' d\tilde{\bar{\eta}}_n d\tilde{\eta}_n. \quad (9)$$

Используя в выражении (1) регуляризованную и калибровочно инвариантную функциональную фермионную меру (6), произведем в этом функциональном интеграле замену переменных согласно формулам (7), (8):

$$\begin{aligned} \prod_n' d\bar{\eta}_n d\eta_n e^S &= \int \prod_n' d\tilde{\bar{\eta}}_n d\tilde{\eta}_n e^{\tilde{S}} \left[1 + 2i \int dx \alpha \sum_m' \bar{\psi}_m \gamma^5 \psi_m - \right. \\ &\quad \left. - 2im \int dx \alpha \tilde{\bar{\psi}} \gamma^5 \tilde{\psi} + i \int dx (\partial_k \alpha) \tilde{J}_k^5\right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $J_k^5 = i \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^k \psi$ — аксиальный ток. Полагая в (10) $\alpha(x) \sim \delta(x - y)$, получаем:

$$\langle \partial_k J_k^5 \rangle = -2m \langle \bar{\psi} \gamma^5 \psi \rangle + 2 \sum_n' \bar{\psi}_n \gamma^5 \psi_n. \quad (11)$$

В уравнении (11) $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по фермионному вакууму. Второе слагаемое в правой части (11) возникает вследствие неинвариантности регуляризованной фермионной меры (6) относительно преобразований (8). Это слагаемое легко вычисляется, если обрезание в сумме сделать “мягким”, то есть вместо обрезанной суммы \sum_n' использовать регуляризованную сумму $\sum_n \exp(-\tau \epsilon_n^2)$, $\tau \rightarrow +0$. Таким образом получаем в пределе $\tau \rightarrow +0$:

$$2 \sum_n e^{-\tau \epsilon_n^2} \bar{\psi}_n \gamma^5 \psi_n = \begin{cases} -\frac{e^2}{16\pi^2} \text{tr } \epsilon_{ijkl} F_{ij} F_{kl}, & \text{если } d = 4, \\ 0, & \text{если } d = 3, \\ \frac{e}{2\pi} \text{tr } \epsilon_{ij} F_{ij}, & \text{если } d = 2. \end{cases}$$

Здесь d — размерность пространства. Аномальная дивергенция аксиального тока впервые была открыта в работе [1], а затем, повторно, в работах [2].

γ^5 -инвариантной мерой типа меры (5) можно пользоваться в теориях, сформулированных на решетке [3]. Однако, при построении γ^5 -инвариантного действия на решетке возникают большие трудности [4]. В настоящее время известны только решеточные модели с нелокальным взаимодействием, обладающие γ^5 -инвариантностью (см., например, [5]). В таких моделях строго сохраняются оба тока: векторный и аксиально-векторный.

Замечание. Строго говоря, преобразованные поля (7) должны быть спроектированы на регуляризованное пространство фермионных полей (3) с базисом мод $\{\psi_n\}$, $|\epsilon| < \Lambda$. Иными словами, для преобразованных полей также должны иметь место разложения (3):

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_n' \tilde{\eta}_n \psi_n, \quad \tilde{\bar{\psi}}(x) = \sum_n' \tilde{\bar{\eta}}_n \bar{\psi}_n. \quad (12)$$

В противном случае действие

$$\tilde{S} = \int dx \tilde{\bar{\psi}} (i\gamma^k \nabla_k + m) \tilde{\psi}$$

в (10) как функция переменных $\tilde{\eta}_m, \tilde{\bar{\eta}}_m$ оказалось бы отличным от действия S в (1) как функции переменных $\eta_m, \bar{\eta}_m$, и из (10) не следовало бы соотношение (11). Однако вследствие того, что моды в

разложениях (3) и (12) являются собственными для оператора Дирака $(i\gamma^k \nabla_k + m)$, мы имеем

$$\tilde{S} = \left(\sum_{|\epsilon_n| < \Lambda} (\epsilon_n + m) \tilde{\bar{\eta}}_n \tilde{\eta}_n \right) + \left(\sum_{|\epsilon_n| > \Lambda} (\epsilon_n + m) \tilde{\bar{\eta}}_n \tilde{\eta}_n \right)$$

Здесь второе слагаемое имеет порядок $O(\alpha^2)$ и потому не играет роли в приведенном выше вычислении. Мы видим, что в фермионном действии проектирование преобразованных фермионных полей на регуляризованное фермионное подпространство происходит автоматически. Подчеркнем, что этот факт является следствием использования собственных функций оператора Дирака для регуляризации фермионных полей. Поэтому корректность перехода от равенства (10) между регуляризованными фермионными интегралами к соотношению (11) очевидна.

Я благодарен С.Б. Хохлачеву за полезные обсуждения.

Литература

1. *Schwinger J.*, Phys. Rev. **82** (1951) 664.
2. *Adler S.L.*, Phys. Rev. **177** (1969) 2426; *Bell J.S., Jackiw R.*, Nuovo Cimento, **A60** (1969) 47.
3. *Wilson K.G.*, Phys. Rev. **D10** (1974) 2445.
4. *Susskind L.*, Phys. Rev. **D16** (1977) 3031; *Wilson K.G.*, Erice School of Physics, Cornell Report No. CLNS-321, 1975.
5. *Drell S.D., Weinstein M., Yankielowicz S.*, Phys. Rev. **D14** (1976) 1627.

КОМПЛЕКСНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТЕОРИЯ КВАНТОВЫХ СТРУН

Белавин А.А., Книжник В.Г.

ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 364–390

Суммирование по замкнутым ориентируемым поверхностям рода $p \geq 2$ (p — петлевые вакуумные амплитуды теории бозонных струн) в критической размерности $D = 26$ сводится к интегрированию по пространству M_p комплексных структур римановых поверхностей рода p . Изучены аналитические свойства меры интегрирования как функции комплексных координат на M_p . Показано, что мера, помноженная на $(\det \operatorname{Im} \hat{\tau})^{13}$ ($\hat{\tau}$ — матрица периодов поверхности) является квадратом модуля функции, голоморфной на M_p и нигде не обращающейся в нуль. Эта функция имеет полюс второго порядка на бесконечности $D = \bar{M}_p/M_p$ компактифицированного пространства модуля M_p . Этими свойствами мера определяется однозначно с точностью до произвольной постоянной, что позволяет построить явные формулы для рода $p = 2, 3$ через тэта-функции. В теории имеются степенная и логарифмическая расходимости, связанные соответственно с перенормировкой волновой функции тахиона и нуклона. Обсуждаются связи с теоремой Мамфорда. Квантовая геометрия критических струн называется комплексной геометрией.

1. Введение

Теория квантовых струн безусловно заслуживает того огромного интереса, который она вызывает. Добавим к старым идеям новый принцип: фундаментальный объект является не точечным, но одномерным, эта теория добилась ряда успехов и является в настоящее время “самым многообещающим кандидатом и т.д.” [1], [2], [3].

Однако теорию струн нельзя считать свободной от проблем. Поскольку чаще обсуждаются феноменологические проблемы, мы хотели бы напомнить о некоторых теоретических. Во-первых, отсутствует понимание фундаментального принципа, лежащего в основе теории. Существующее описание аналогично описанию частиц на языке сумм по траекториям, а не теории поля. Во-вторых, в связи с этим отсутствием глубокого понимания мы не знаем сколько существует теорий струн и воспринимаем существующие при $D = 26$ и $D = 10$ как уникальные. Между тем эти теории являются частными случаями двумерных конформных теорий поля (конформный

бутстран) [4]. В настоящее время известно бесконечное количество таких теорий. Использование достижений (настоящих и будущих) конформного бутстрана может способствовать пониманию струнных теорий и увеличению наших возможностей в конструировании новых моделей. В-третьих, существует два языка для описания струн: алгебраический, использующий представления алгебр Вирасаро и других бесконечномерных алгебр Ли, и геометрический — язык сумм по поверхностям, приводящий, как будет показано в этой статье, к комплексноаналитической геометрии пространства модулей римановых поверхностей. Связь этих подходов, по большому счету, отсутствует. В геометрическом подходе p -петлевые амплитуды рассеяния замкнутых бозонных ориентируемых струн являются суммами по замкнутым ориентируемым поверхностям рода p (с p ручками). В критической размерности $D = 26$ суммирование, как будет показано в разд. 2, сводится к интегрированию по пространству модулей \bar{M}_p римановых поверхностей рода p . Если всерьез относиться к теории струн, то необходимо изучить такие суммы. Здесь появляется четвертая проблема — описать аналитические свойства многопетлевых амплитуд как функций от координат на \bar{M}_p . Именно этими свойствами и определяется структура расходимостей в теории.

В этой работе мы исследуем именно последнюю проблему и увидим, что аналитические свойства являются очень простыми. Амплитуды, грубо говоря, строятся с помощью мероморфных и даже рациональных функций на \bar{M}_p . Более точно постановку задачи и результат можно сформулировать следующим образом. В ковариантном геометрическом подходе Полякова [5] сумма по поверхностям является суммой по топологиям (род p), внутренним метрикам $g_{ab}(\xi)$ и вложениям $\lambda_\mu(\xi)$ поверхности с координатами $\xi_{1,2}$ в D -мерное плоское пространство-время. При $D = 26$ происходит сокращение конформной аномалии [5], и полной квантовой группой симметрии становится произведение группы Вейля $\text{Conf}(S)$ -конформных преобразований $g_{ab}(\xi) \rightarrow \lambda(\xi)g_{ab}(\xi)$ на группу общекоординатных преобразований $\text{Diff}(S)$ поверхности S . Таким образом, для каждого p мы должны проинтегрировать по орбитам группы

$$H = \text{Conf}(S) \otimes \text{Diff}S$$

в пространстве $G(S)$ всех метрик на S , т.е. по фактор-пространству $G/H = M_p$. Это пространство называется пространством модулей римановых поверхностей рода p , и его размерность, как было показано Риманом, конечна и равна 0 для $p = 0$; 2 для $p = 1$ и $6p - 6$ для $p \geq 2$. В работах Тейхмюллера, Альфорса и Берса [6] было показано, что M_p имеет естественную комплексную структуру. Более того, M_p является алгебраическим многообразием [7].

Пусть y_1, \dots, y_{3p-3} — какие-нибудь комплексно аналитические координаты на M_p . Тогда при $D = 26$ сумма по поверхностям рода p

после выделения объема калибровочной группы H будет иметь следующий вид (см. разд. 2):

$$Z_p = \int_{M_p} d\Omega \exp \widetilde{W}(y_i, \bar{y}_i), \quad d\Omega = (i/2)^{3p-3} dv \wedge d\bar{v},$$

$$dv = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{3p-3}, \quad (1.1)$$

где \widetilde{W} является некоторой функцией координат y_i, \bar{y}_i . Возникает естественный вопрос: как комплексная структура на M_p проявляет себя в аналитических свойствах $\widetilde{W}(y_i, \bar{y}_i)$? Напомним, что однопетлевое вычисление ($p = 1$) дает [8]

$$Z_1 = \int_{M_1} d^2 y |y|^{-2} |\Delta(y)|^{-2} (\log |y|)^{-14};$$

$$\Delta(y) = y \prod_{n=1}^{\infty} (1 - y^n)^{24}, \quad (1.2)$$

где $y = \exp(2\pi i \tau)$, а τ — отношение периодов тора — пробегает фундаментальную область модулярной группы $SL(2, \mathbb{Z})$. Формула (1.2) наводит на мысль, что эти свойства могут оказаться достаточно простыми и для $p > 1$. Мера в (1.2) с точностью до степени логарифма является квадратом модуля аналитической функции y , нигде не обращающейся в нуль и имеющей полюс второго порядка при $y = 0$, где тор вырождается. Наше основное утверждение, подробно доказанное в разд. 3, 4, состоит в том, что для $p > 1$ мера обладает почти такими же свойствами:

$$A) \exp \widetilde{W} = |F(y_1, \dots, y_{3p-3})|^2 (\det \operatorname{Im} \hat{\tau})^{-13}. \quad (1.3)$$

где $F(y) dv$ — голоморфная $(3p - 3, 0)$ -форма, нигде не обращающаяся в нуль на M_p , а $\hat{\tau}$ — матрица периодов римановой поверхности с координатами $y_1, \bar{y}_1, \dots, y_{3p-3}, \bar{y}_{3p-3}$ в M_p .

Б) форма $F(y) dv$ имеет полюс второго порядка на бесконечности D пространства M_p , где поверхности вырождаются¹⁾.

Этот полюс приводит к расходимостям в (1.1), и его наличие тесно связано с тем, что основным состоянием бозонной струны является тахион.

Нетрудно показать, что условиями А), Б) форма $F(y) dv$ определяется однозначно, с точностью до постоянного множителя. Это, в частности, позволяет выразить $F(y)$ для случая $p = 2, 3$ [10], а также для $p = 4$ через тэта-функции Римана. Эти результаты вместе с необходимыми сведениями по теории автоморфных форм Зигеля мы при-

¹⁾ После того, как к M_p присоединяется D , оно становится компактным алгебраическим многообразием \overline{M}_p [9].

водим в разд. 6. Укажем также, что недавно Манину удалось, используя результаты работы Фальтингса [11] и свойства А), Б) меры [12], выразить меру через тэта-функции и абелевы дифференциалы с помощью более сложной формулы, но зато для произвольного рода [13].

В разд. 4 мы определяем порядок полюса с помощью прямой оценки континуальных интегралов, однако А. Бенчинсон и В. Дринфельд сообщили нам, что теорема Мамфорда [7] вместе с результатами Вольперта [14] о кохомологиях \bar{M}_p позволяет определить порядок полюса в предположении, что $F(y)$ мероморфна на \bar{M}_p и не имеет нулей и полюсов на M_p . Подробнее см. разд. 5, где мы также приводим точную математическую формулировку наших результатов.

Отметим, что в недавних работах [15] многополюсные амплитуды²⁾ строятся с помощью ζ -функции Сельберга [16]. Единственным недостатком этих элегантных формул является то, что они дают выражение для меры в терминах вещественных координат на M_p (точнее, на пространстве Тейхмюллера, являющемся его накрытием). При этом простая комплексно-аналитическая структура теории является скрытой, что при рассмотрении суперсимметричных (SS) и гетеротических (HS) струн является серьезным препятствием к их изучению. Наш подход к теориям SS и HS мы кратко обсуждаем в разд. 7, где обращение в нуль вакуумных амплитуд связывается с гипотетическим отсутствием параболических форм веса 8 на \bar{M}_p .

Появление комплексно-аналитической структуры в теории струн тесно связано с конформной инвариантностью и сокращением гравитационной аномалии в секторах правых и левых возбуждений струны по отдельности [18]. При этом $F(y)(\overline{F(y)})$ является вкладом в меру левых (правых) возбуждений. Три аномалии — конформная, гравитационная и аналитическая — сокращаются одновременно.

2. От суммы по поверхности к интегрированию по пространству модулей

Согласно Полякову [5], сумма по поверхностям определяется как

$$\sum_{\text{пов}} e^{-(\text{площадь})} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p=0}^{\infty} \int \mathcal{D}g_{ab}(\xi) \mathcal{D}X_{\mu}(\xi) \exp\{-S[X_{\mu}, g^{ab}]\}, \quad (2.1)$$

где $g_{ab}(\xi)$ — внутренняя метрика на поверхности с координатами ξ_1, ξ_2 , а $X_{\mu}(\xi)$ определяет вложение поверхности в \mathcal{D} -мерное пространство-время; S — действие Намбу–Гото:

$$S = \int d^2\xi g^{1/2} (g^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X_{\mu} + m_0^2). \quad (2.2)$$

²⁾ См. также пионерские работы [17].

Ниже мы положим $D = 26$. Мера интегрирования в (2.1) определяется с помощью интервалов в функциональном пространстве:

$$\begin{aligned}\|\delta g\|^2 &= \int g^{aa_1} g^{bb_1} \partial g_{ab} \partial g_{a_1 b_1} g^{1/2} d^2 \xi, \\ \|\delta X\|^2 &= \int (\delta X)^2 g^{1/2} d^2 \xi.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Каждая метрика определяет форму объема

$$ds = g^{1/2} d\xi^1 \wedge d\xi^2$$

и согласованную с метрикой комплексную структуру

$$J_a^b = g^{1/2} \varepsilon_{ac} g^{cb}, \quad (2.4)$$

где $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$. С этой комплексной структурой связаны гармонические координаты z, \bar{z} ; z определяется из решения уравнения Бельтрами:

$$J_a^b \frac{\partial z}{\partial \xi^b} = i \frac{\partial z}{\partial \xi^a}. \quad (2.5)$$

В этих координатах метрика принимает конформный вид:

$$\hat{g} \equiv g_{ab} d\xi^a d\xi^b = \rho dz d\bar{z}, \quad \rho \equiv e^\varphi. \quad (2.6)$$

При бесконечно малых конформных $\delta\rho = \delta\varphi\rho$ и общесоординатных $z \rightarrow z + \varepsilon(z, \bar{z})$ преобразованиях вариация метрики равна

$$\begin{aligned}\delta\hat{g} &= \rho\delta\tilde{\varphi} dz d\bar{z} + \rho\bar{\partial}\varepsilon(\partial\bar{z})^2 + \rho\partial\bar{\varepsilon}(dz)^2, \\ \delta\tilde{\varphi} &= \delta\varphi + \partial(\rho\varepsilon) + \bar{\partial}(\rho\bar{\varepsilon}); \\ \delta &\equiv \delta/\delta z, \quad \bar{\delta} \equiv \delta/\delta\bar{z},\end{aligned}\quad (2.7)$$

а ее длина в смысле (2.3) равна

$$\|\delta\varphi\|^2 = \int \rho(\delta\tilde{\varphi})^2 d^2 \xi + \int \rho(\partial\bar{\varepsilon})(\bar{\partial}\varepsilon) d^2 \xi. \quad (2.8)$$

Под $d^2 \xi$ здесь и далее следует понимать $1/2 i dz \wedge d\bar{z}$.

Для выделения из (2.1) объема калибровочной группы общесоординатных и конформных преобразований надо, согласно [5], перейти от интегрирования по $g_{ab}(\xi)$ к интегрированию по φ и ε . Для этих целей интервалы в функциональном пространстве, с учетом того, что φ — скаляр, а ε — векторное поле, равны

$$\|\delta\varphi\|^2 = \int \rho(\delta\varphi)^2 d^2 \xi, \quad \|\varepsilon\|^2 = \int \varepsilon\bar{\varepsilon}\rho^2 d^2 \xi. \quad (2.9)$$

Из (2.8), (2.9) находим, что ³⁾

$$\mathcal{D}g_{ab}(\xi) = \det(-\rho^{-2}\partial\rho\bar{\partial})\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\varepsilon\mathcal{D}g_{ab}^\perp. \quad (2.10)$$

В этой формуле $\mathcal{D}g_{ab}^\perp$ обозначает интегрирование по тем направлениям в функциональном пространстве метрик, которые ортогональны вариациям (2.7). Чтобы доказать, что такие направления существуют, рассмотрим произвольную бесконечно малую вариацию метрики $\delta\hat{g}^*$ (не путать с $\delta\hat{g}$ из (2.7)):

$$\delta\hat{g}^* = \delta\varphi^* \rho dz d\bar{z} + f(dz)^2 + \bar{f}(d\bar{z})^2. \quad (2.11)$$

Из условия ортогональности

$$\|\delta\hat{g}, \delta\hat{g}^*\| = \int \delta\bar{\varphi}\delta\varphi^* \rho d^2\xi + \int \bar{\delta}\varepsilon f d^2\xi + \int \partial\bar{\varepsilon}\bar{f} d^2\xi = 0$$

находим

$$\delta\varphi^* = \bar{\partial}f = \partial\bar{f} = 0. \quad (2.12)$$

Вариации метрики, ортогональные калибровочной группе, т.е. удовлетворяющие (2.12), называются голоморфными квадратичными дифференциалами. Известно, что на поверхности рода $p \geq 2$ комплексная размерность линейного пространства V таких дифференциалов равна $3p - 3$ (1 для $p = 1$ и 0 для $p = 0$). Таким образом, интегрирование по $\mathcal{D}g_{ab}^\perp$ является интегрированием по конечномерному пространству M_p комплексных структур римановых поверхностей рода p (пространству модулей), связанному с вариациями метрики вида (2.12),

Комплексно-аналитические координаты в пространстве M_p вводятся следующим образом [6]. Выберем базис f_1, \dots, f_{3p-3} в V и дуальный ему базис $\eta^1, \dots, \eta^{3p-3}$ в пространстве дифференциалов Бельтрами ⁴⁾:

$$\int \eta^k f_j d^2\xi = \delta_j^k. \quad (2.13)$$

Тогда любая комплексная структура J , близкая к структуре J_0 , согласованной с метрикой $\rho dz d\bar{z}$, может быть параметризована комплексными параметрами y_1, \dots, y_{3p-3} и является согласованной с метрикой

$$\hat{g}_V = \rho |dz + y_i \eta^i d\bar{z}|^2 = \tilde{\rho} du d\bar{u}, \quad (2.14)$$

где координата u определяется из уравнения Бельтрами

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = y_i \eta^i \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.15)$$

³⁾ В рассматриваемом нами случае рода $p \geq 2$ оператор $-\rho^{-2}\partial\rho\bar{\partial}$ не имеет нулевых мод и обычный штрих у детерминанта можно не писать.

⁴⁾ Дифференциалом Бельтрами называется величина $\eta(z, \bar{z})$, связь которой с комплексной структурой J определяется следующим выражением для согласованной с J метрики: $g = \rho |dz + \eta d\bar{z}|^2$.

и голоморфно зависит от y_i [6].

Условия (2.13) определяют η^k с точностью до полной производной

$$\eta^k \rightarrow \tilde{\eta}^k = \eta^k + \bar{\partial}\varepsilon^k, \quad (2.10)$$

однако комплексные структуры, соответствующие $\delta y_k \eta^k$ и $\delta y_k \tilde{\eta}^k$ и инфинитезимально близкие к J_0 , совпадают. Произвол (2.16) фиксируется условием ортогональности метрики (2.14) вариациям (2.7), что приводит к выбору

$$\eta^k = \rho^{-1} (N_2^{-1})^{ki} \bar{f}_i, \quad (N_2)_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \int \bar{f}_i f_k \rho^{-1} d^2 \xi. \quad (2.17)$$

следовательно,

$$\|\delta \hat{g}_y^\perp\|^2 = \delta y_i \delta \bar{y}_k (N_2^{-1})^{ik}$$

и

$$Dg_{ab}^\perp = (\det N_2)^{-1} d\Omega, \\ d\Omega = (i/2)^{3p-3} dv \wedge d\bar{v}, \quad dv = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{3p-3}. \quad (2.18)$$

Теперь подставим (2.18) в (2.10), произведем в (2.1) гауссово интегрирование по $X_\mu(\xi)$ (с учетом нулевой моды $X_\mu^{(0)}(\xi) = \text{const}$) и выделим бесконечный объем группы общесоординатных и конформных преобразований

$$\int D\varepsilon D\varphi.$$

После этого задача сводится к вычислению следующего интеграла по пространству модулей M_p :

$$Z_p = \int d\Omega \frac{\det \Delta_{-1}}{\det N_2} \left(\frac{\det N_0 \det N_1}{\det' \Delta_0} \right)^{13} (\det N_1)^{-13} \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} \int d\Omega \exp W(y_i, \bar{y}_i) (\det N_1)^{-13}. \quad (2.19)$$

Здесь $\Delta_j = -\rho^{j-1} \delta \rho^{-i\bar{\partial}}$ является оператором Лапласа, действующим на пространстве j -дифференциалов (т.е. тензоров

$$\Phi + \underbrace{\dots}_j +,$$

преобразующихся как $(dz)^{-j}$), а

$$(N_j)_{\alpha\beta} = \int \rho^{1-j} \bar{\Phi}_\alpha \Phi_\beta d^2 \xi \quad (2.20)$$

является матрицей скалярных произведений нулевых мод Φ_α оператора Δ_j . Заметим, что $\det N_1$ не зависит от ρ , а $\det N_{-1}$ в (2.19) отсутствует, так как при $p \geq 2$ у Δ_{-1} нет нулевых мод. Вследствие сокращения конформной аномалии [5] произведение остальных членов

в (2.19) также не зависит от ρ и является, таким образом, функцией только от y_i, \bar{y}_i . В этом можно убедиться с помощью формулы [5, 19, 20]:

$$\delta_\rho \log \frac{\det' \Delta_j}{\det N_j \det N_{1-j}} = \frac{C_j}{6\pi} \int \delta \rho \rho^{-1} \partial \bar{\partial} (\log \rho) d^2 \xi, \quad (2.21)$$

$$C_j = 6j^2 - 6j + 1,$$

где $\det N_k \stackrel{\text{def}}{=} 1$, если у Δ_k нет нулевых мод. (В (2.21) стоят 6π вместо обычных 24π , так как $\partial \bar{\partial} = 1/4 \Delta!$).

3. Голоморфность $F(y)$

Докажем теперь, что $\exp W(y_i, \bar{y}_i)$ в (2.19) является квадратом модуля голоморфной функции y_i . Для этого нам надо вычислить вариацию W при инфинитезимальном изменении комплексной структуры, порождаемом вариацией метрики вида

$$\delta \hat{g} = \rho [\eta(y) d\bar{z}^2 + \overline{\eta(y)} dz^2], \quad \eta = \sum_{i=1}^{3p-3} \delta y_i \eta^i \ll 1. \quad (3.1)$$

Функция

$$\exp W(y_i, \bar{y}_i)$$

является квадратом модуля голоморфной функции тогда и только тогда, когда вторая вариация W не содержит членов $\eta \bar{\eta}$:

$$\delta_\eta \delta_{\bar{\eta}} W = 0. \quad (3.2)$$

Ниже мы докажем, что

$$\delta_\eta \delta_{\bar{\eta}} \log \frac{\det' \Delta_j}{\det N_j \det N_{1-j}} \equiv -\frac{C_j}{6\pi} \int \rho^{-2} [\bar{\partial} f \partial \bar{f} + f \bar{f} \partial \bar{\partial} \log \rho] d^2 \xi, \quad (3.3)$$

$$f \equiv \rho \bar{\eta},$$

откуда с учетом (2.19) следует (3.2). Аналитическая аномалия (3.3) сокращается и

$$\exp W(y_i, \bar{y}_i) = |F(y_i)|^2. \quad (3.4)$$

Более того, из (3.3) следует, что любое выражение вида

$$\prod_j \left(\frac{\det' \Delta_j}{\det N_j \det N_{1-j}} \right)^{n_j} \quad (3.5)$$

будет квадратом модуля голоморфной функции на M_p при условии

$$\sum_j C_j n_j = 0. \quad (3.6)$$

Перейдем теперь к доказательству формулы (3.3). Пусть после вариации (3.1) метрика имеет конформный вид в координатах u, \bar{u} . Тогда

$$\begin{aligned}\hat{g}' &= \tilde{\rho}(u, \bar{u}) du d\bar{u} = \tilde{\rho}(u, \bar{u}) u_z \bar{u}_{\bar{z}} |dz + (u_{\bar{z}}/u_z) d\bar{z}|^2 = \\ &= \rho(z, \bar{z}) dz d\bar{z} + \rho\eta(dz)^2 + \rho\bar{\eta}(d\bar{z})^2, \quad (3.7)\end{aligned}$$

откуда находим

$$u_{\bar{z}} = \eta u_z, \quad \rho(z, \bar{z}) = \tilde{\rho}(u, \bar{u}) u_z \bar{u}_{\bar{z}} (1 + \eta\bar{\eta}), \quad (3.8)$$

где $u_z \equiv \partial u / \partial z$ и т.д. Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}} = (1 - \eta\bar{\eta})^{-1} \frac{1}{\bar{u}_{\bar{z}}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \eta \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (3.9)$$

Представим теперь детерминант в виде континуального интеграла в координатах u, \bar{u} :

$$(\det' \Delta_j(u))^{-1} = \int D' \Phi_j \exp \left[- \int \tilde{\rho}^{-j} \partial_u \bar{\Phi}_j \partial_{\bar{u}} \Phi_j i du \wedge d\bar{u} / 2 \right], \quad (3.10)$$

где мера определена с помощью интервала

$$\|\delta \Phi_j\|_u^2 = \int \bar{\delta \Phi}_j \delta \Phi_j \tilde{\rho}^{1-j} i du \wedge d\bar{u} / 2. \quad (3.11)$$

Для того чтобы выяснить, как изменился оператор Δ_j , перейдем в формулах (3.10), (3.11) к координатам z, \bar{z} . С учетом того, что

$$\Phi_j(u, \bar{u}) = (u_z)^{-j} \Phi_j(z, \bar{z})$$

и формул (3.8), (3.9) находим, что действие в (3.10) с нужной нам точностью имеет вид

$$S = \int [1 + (j+1)\eta\bar{\eta}] \rho^{-j} |[\partial - \eta\partial - j(\partial\eta)] \Phi_j|^2 i dz \wedge d\bar{z} / 2$$

и мера (3.11) равна

$$\|\delta \Phi_j\|_z^2 = \int |\delta \Phi_j(z, \bar{z})|^2 (1 + (j-2)\eta\bar{\eta}) \rho^{1-j} i dz \wedge d\bar{z} / 2. \quad (3.12)$$

Таким образом

$$\begin{aligned}\Delta_j(u) &= -\rho^{j-1} [1 + (2-j)\eta\bar{\eta}] \times \\ &\times [\partial - \bar{\eta}\bar{\partial} - (1-j)(\bar{\partial}\bar{\eta})] \rho^{-j} [1 + (j+1)\eta\bar{\eta}] [\bar{\partial} - \eta\partial - j(\partial\eta)]. \quad (3.13)\end{aligned}$$

Вычислим сначала вторую вариацию от $\log \det N_j$. Для этого введем некоторые обозначения. Пусть A^j — это пространство j -дифференциалов, P_j — проектор на подпространство H^j голоморфных j -дифференциалов (нулевых мод Δ_j), $\{\Phi_\alpha^{(j)}\}$ — базис в H^j , который

мы выберем голоморфно зависящим от y_i . Это можно сделать, так как из (3.9) следует, что уравнение

$$\bar{\delta}\Phi_\alpha = 0,$$

которому удовлетворяют Φ_α , не зависит от \bar{y}_j . Пусть, кроме того, индекс под знаком Tr обозначает пространство, по которому вычисляется след. Тогда из (3.12) вытекает, что

$$\begin{aligned} \partial\bar{\delta}\log\det N_j = \\ = \text{Tr}_{H^j}(j-2)\eta\bar{\eta} + \int \rho^{1-j}(\bar{\delta}\bar{\Phi}_\alpha^{(j)})(\delta\Phi_\beta^{(j)})(N_j^{-1})^{\alpha\beta}i\,dz\wedge d\bar{z}/2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Мы воспользовались тем, что $\delta\bar{\Phi}_\beta^{(j)} = \bar{\delta}\Phi_\beta^{(j)}$. Вариацию $\delta\Phi_\alpha^{(j)}$ можно найти из уравнения

$$(\Delta_j + \delta\Delta_j)(\Phi_\alpha^{(j)} + \delta\Phi_\alpha^{(j)}) = 0.$$

Она ортогональна H^j и равна

$$\delta\Phi_\alpha^{(j)} = -\frac{1}{\Delta_j}\delta\Delta_j\Phi_\alpha^{(j)}.$$

В итоге

$$\begin{aligned} \partial\bar{\delta}\log\det N_j = \text{Tr}_{H^j}(j-2)\eta\bar{\eta} + \text{Tr}_{H^j}\bar{\delta}\Delta_j\left(-\frac{1}{\Delta_j}\right)\frac{M^2}{M^2 + \Delta_j}\delta\mathbf{P}_j, \\ M^2 \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где мы регуляризовали Δ_j^{-1} и воспользовались эрмитовостью Δ_j ; $\bar{\delta}\Delta_j$ обозначает линейный по $\bar{\eta}$ член в выражении (3.13).

Теперь все готово для вычисления вариации детерминанта. Регуляризуем его по Паули–Вилларсу и будем следить только за членами, не зависящими от массы M регулятора:

$$\begin{aligned} \delta\bar{\delta}\log[\det'\Delta_j/\det(M^2 + \Delta_j)] = \\ = \text{Tr}_{A^j}(1 - \mathbf{P}_j)(2-j)\eta\bar{\eta}\frac{M^2}{M^2 + \Delta_j} + \\ + \text{Tr}_{A^{1-j}}(1 - \mathbf{P}_{1-j})(j+1)\eta\bar{\eta}\frac{M^2}{M^2 + \Delta_{1-j}} + \\ + \delta\text{Tr}_{A^j}\rho^{j-1}(\bar{\delta}\partial_{1-j})(1 - \mathbf{P}_{1-j})(\rho^{j-1}\partial)^{-1}\frac{M^2}{M^2 + \Delta_j}(1 - \mathbf{P}_j) = \\ = \text{Tr}_{A^j}(2-j)\eta\bar{\eta}\frac{M^2}{M^2 + \Delta_j} + \text{Tr}_{A^{1-j}}(j+1)\eta\bar{\eta}\frac{M^2}{M^2 + \Delta_{1-j}} + \\ + (j-2)\text{Tr}_{H^j}\eta\bar{\eta} - (j+1)\text{Tr}_{H^{1-j}}\eta\bar{\eta} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{Tr}_{H^j} \bar{\delta} \Delta_j \left(-\frac{1}{\Delta_j} \right) \frac{M^2}{M^2 + \Delta_j} \delta \mathbf{P}_j + \\
& + \text{Tr}_{H^{1-j}} \bar{\delta} \Delta_{1-j} \left(-\frac{1}{\Delta_{1-j}} \right) \frac{M^2}{M^2 + \Delta_{1-j}} \delta \mathbf{P}_{1-j} + \\
& + \text{Tr}_{A^j} \rho^{1-j} (\bar{\delta} \partial_{1-j}) \frac{M^2}{M^2 + \Delta_{1-j}} \rho^{-j} (\delta \bar{\partial}_j) \frac{1}{M^2 + \Delta_j}, \quad (3.16)
\end{aligned}$$

где $\delta \bar{\partial}_j \equiv -\eta \partial - j(\partial \eta)$. Обозначив последнее слагаемое через Y и воспользовавшись формулами (3.15) и

$$\text{Tr}_{A^j} \eta \bar{\eta} \frac{M^2}{M^2 + \Delta_j} = \frac{3j-1}{6\pi} \int \eta \bar{\eta} \partial \bar{\partial} \varphi d^2 \xi, \quad \varphi \equiv \log \rho, \quad (3.17)$$

получаем⁵⁾

$$\begin{aligned}
& \delta \bar{\delta} \log \det'_{\text{Re } g} \Delta_j = \\
& = -\frac{6j^2 - 6j}{6\pi} \int \eta \bar{\eta} \partial \bar{\partial} \varphi d^2 \xi + Y + \delta \bar{\delta} \log(\det N_j \det N_{1-j}). \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Формула (3.17) выводится следующим образом. Будем вычислять след, выбрав в пространстве A^j базис из функций

$$\delta(\xi - \xi_0) = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \exp[i(p\bar{z} + \bar{p}z)],$$

где $z = (\xi - \xi_0)_1 + i(\xi - \xi_0)_2$ — координата в окрестности ξ_0 ; $2p = p_1 + ip_2$. Для любого оператора $V(\xi)$ имеем

$$\text{Tr } V(\xi) = \int d^2 \xi_0 \int \frac{d^2 \bar{p}}{(2\pi)^2} V^*(\xi_0, p, \bar{p}), \quad (3.19)$$

где мы в окрестности каждой точки ξ_0 перешли в импульсное представление

$$\begin{aligned}
V(\xi) = V(\xi_0, z, \bar{z}; \delta, \bar{\delta}) &= V(\xi_0, i\delta/\delta\bar{p}, i\delta/\delta p; i\bar{p}, ip) \equiv \\
&\equiv V^*(\xi_0, p, \bar{p}). \quad (3.20)
\end{aligned}$$

В (3.17) единственный не зависящий от M вклад дает член в разложении Δ_j , пропорциональный $\partial \bar{\partial} \varphi = (1/4)\Delta\varphi$:

$$\begin{aligned}
\Delta_j^*(\xi_0, p, \bar{p}) &= \rho_0^{-1} p \bar{p} + \rho_0^{-1} [(1-j)(\partial \bar{\partial} \varphi) \times \\
&\quad \times (1 + p \partial_p) + (\partial \bar{\partial} \varphi)(\bar{p} \partial_{\bar{p}} + p \bar{p} \partial_p \partial_{\bar{p}})] + \dots, \quad (3.21) \\
\rho_0 &\equiv \rho(\xi_0), \quad \partial_p = \partial/\partial p.
\end{aligned}$$

⁵⁾ В (3.17) не написаны расходящиеся члены типа $\eta \bar{\eta} M^2 \log M^2$. От них можно избавиться, взяв несколько регуляторов. Величина не зависящих от M членов при этом не изменится.

Поэтому остальные члены в (3.21) можно опустить, и мы находим:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{A^j} \eta \bar{\eta} \frac{M^2}{M^2 + \Delta_j} &= \\ &= - \int d^2 \xi_0 \eta \bar{\eta} \partial \bar{\partial} \varphi \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{M^2}{M^2 + \rho_0^{-1} p \bar{p}} \rho_0^{-1} \times \\ &\times [(1-j)(1 + \rho \partial_p) + \bar{p} \partial_{\bar{p}} + p \bar{p} \partial_p \partial_{\bar{p}}] \frac{1}{M^2 + \rho_0^{-1} p \bar{p}} = \\ &= \frac{3j-1}{6\pi} \int \eta \bar{\eta} \partial \bar{\partial} \varphi d^2 \xi, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Величина Y в (3.18) вычисляется аналогичным образом. Сложность лишь в том, что надо раскладывать по z, \bar{z} не только φ , но и η и $\bar{\eta}$, оставляя как члены $\delta \eta \bar{\delta} \bar{\eta}$, так и линейные по φ типа

$$\eta \delta \varphi \bar{\delta} \bar{\eta}, \quad \eta \bar{\eta} \partial \bar{\partial} \varphi \quad \text{и т.д.}$$

(В (3.18) еще имеется член $\partial \varphi \bar{\partial} \varphi \eta \bar{\eta}$, но если известны коэффициенты при всех остальных членах, то коэффициент при нем фиксируется общей ковариантностью.) После несколько утомительных вычислений находим

$$\begin{aligned} Y &= - \frac{6j^2 - 6j + 1}{6\pi} \times \\ &\times \int (\bar{\delta} \bar{\eta} \delta \eta + \bar{\delta} \bar{\eta} \delta \varphi \eta + \bar{\eta} \delta \varphi \delta \eta + \eta \bar{\eta} \delta \varphi \bar{\delta} \varphi) d^2 \xi - \frac{1}{6\pi} \int \eta \bar{\eta} \partial \bar{\partial} \varphi d^2 \xi. \quad (3.22) \end{aligned}$$

Подставляя в (3.18), получаем (3.3). С помощью (3.17) нетрудно также проверить и (2.21).

В итоге мы доказали (3.2), и мера в (2.19) действительно является с точностью до $(\det N_1)^{-13}$ квадратом модуля аналитической функции при условии, что базис $\Phi_\alpha^{(1)}$ в пространстве голоморфных 1-дифференциалов выбран голоморфно зависящим от y_i . Последнее может быть достигнуто следующим образом. Выберем на поверхности S рода p симплектический базис из $2p$ замкнутых, нестягиваемых, ориентированных путей $a_i, b_i, i = 1, \dots, p$ так, чтобы

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad i \neq j; \quad a_i \circ b_i = \delta_{ij}. \quad (3.23)$$

где $a \circ b$ обозначает алгебраическое число пересечений (пересечения учитываются с естественными знаками). Известно, что пространство голоморфных 1-дифференциалов (абелевых дифференциалов первого рода) имеет комплексную размерность p и в нем можно выбрать базис

$$\omega_i(z) = \Phi_i^{(1)}(z) dz$$

нормализованных дифференциалов так, чтобы

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}. \quad (3.24)$$

При этом матрица

$$\tau_{ij} = \oint_{b_i} \omega_j \quad (3.25)$$

называется матрицей периодов поверхности S . В этом базисе

$$(N_1)_{kj} = \frac{i}{2} \int_S \omega_k \wedge \bar{\omega}_j = \text{Im } \tau_{kj}. \quad (3.26)$$

Подставляя в (2.10) и вспоминая (3.4), получаем (1.3). Голоморфность и отсутствие нулей $F(y)$ следует из того, что регуляризованные детерминанты в (2.19) не должны обращаться на невырожденных поверхностях ни в нуль (так как число нулевых мод у каждого постоянно: одна у Δ_0 и ни одной у Δ_{-1}), ни в бесконечность⁶⁾. Следовательно, мы доказали сформулированное во введении свойство А) меры.

Обсудим теперь кратко связь между голоморфностью меры и конформной инвариантностью. Вторая вариация $\partial\bar{\partial}\widetilde{W}$ эффективного действия духов и полей X_μ может быть выражена через корреляционные функции оператора тензора энергии-импульса $T_{\mu\bar{\nu}}T_{\mu\nu}^{\text{ДУХ}} + T_{\mu\nu}^X$:

$$\partial\bar{\partial}\widetilde{W} = \int d^2\xi \eta(\xi) d^2\xi' \overline{\eta(\xi')} \langle T_{++}(\xi) T_{--}(\xi') \rangle. \quad (3.27)$$

Из наивного закона сохранения мы имеем

$$\partial_- T_{++} = \partial_+ T_{--} = 0,$$

откуда с точностью до нулевых мод

$$\langle T_{++}(\xi) T_{--}(\xi') \rangle = 0.$$

Из-за конформной аномалии это не верно по отдельности для духов и полей X_μ , так как $\partial_- \langle T_{++} \rangle = \partial_+ \langle T_{--} \rangle$ и $\langle T_{--} \rangle \neq 0$. Однако при $D = 26$ аномалия сокращается, вследствие чего $\langle T_{++}(\xi) T_{--}(\xi') \rangle = 0$

⁶⁾ В принципе (3.2) не исключает возможности того, что $F(y)$ в (3.4) приобретает ненулевую фазу при обходе вокруг какого-нибудь пути γ в \bar{M}_p и тем самым является функцией не на \bar{M}_p , а на некотором его накрытии. Однако если $F(y)dv$ — мероморфная форма (что мы докажем, доказав Б), то γ должно быть нестягиваемым. Но известно [7, 21], что таких путей нет: $H_1(\bar{M}_p, \mathbb{Z}) = 0$, поэтому такая возможность исключается. Авторы признательны А.Ю. Морозову, обратившему их внимание на это обстоятельство.

с точностью до нулевых мод; учитывая последние, мы приходим снова к результату (3.3).

Перейдем теперь к анализу поведения меры на бесконечности D пространства M_p , где поверхности вырождаются, и докажем свойство Б).

4. Расходимости

В этом разделе нам будет удобно иметь дело не с детерминантами, а с континуальными интегралами. Мы будем изучать расходимости следующего интеграла:

$$Z_p = \int \frac{d\Omega}{\det(f_i, f_j)} \frac{[\int D\varphi \exp(-\int \partial\bar{\varphi}\bar{\partial}\varphi d^2\xi)]^{13}}{\int D\varepsilon \exp(-\int \rho\partial\bar{\varepsilon}\bar{\partial}\varepsilon d^2\xi)}, \quad (4.1)$$

где φ — комплексное скалярное поле, ε — комплексное векторное поле духов, f_i — некоторый базис в пространстве голоморфных квадратичных дифференциалов, связанный с деформациями комплексной структуры

$$dz \rightarrow dz + \delta y_i \eta^i d\bar{z} \quad (4.2)$$

соотношением

$$\int \eta^j f_i d^2\xi = \delta_i^j, \quad (4.3)$$

y_i — комплексные координаты в пространстве модулей M_p , задаваемые в окрестности заданной комплексной структуры dz формулой (4.2). Скалярное произведение

$$(f_i, f_j) \stackrel{\text{def}}{=} \int f_i \bar{f}_j \rho^{-1} d^2\xi. \quad (4.4)$$

Формула (4.1) справедлива также и для $p = 1$. Мера в Z_p расходится в двух случаях.

Случай I. Поверхность рода p вырождается в две поверхности рода q и $p - q$ с выколотыми точками, причем поверхности в этих точках склеены (рис. 1). Многообразие таких поверхностей в пространстве модулей \bar{M}_p обозначим через

$$D_q, \quad q = 1, 2, \dots, [p/2].$$

Случай II. Поверхность рода p вырождается в поверхность рода $p - 1$ с двумя склеенными точками — остатком выродившейся ручки (рис. 2). В \bar{M}_p такие поверхности лежат на многообразии, обозначаемом D_0 . Найдем коразмерности (т.е. $\dim M_p - \dim D_\alpha$) D_q и D_0 в \bar{M}_p . Для этого воспользуемся тем, что комплексная размерность пространства модулей поверхности рода $p \geq 1$ с n отмеченными точками равна $3p - 3 + n$ (n координат точек на многоугольнике

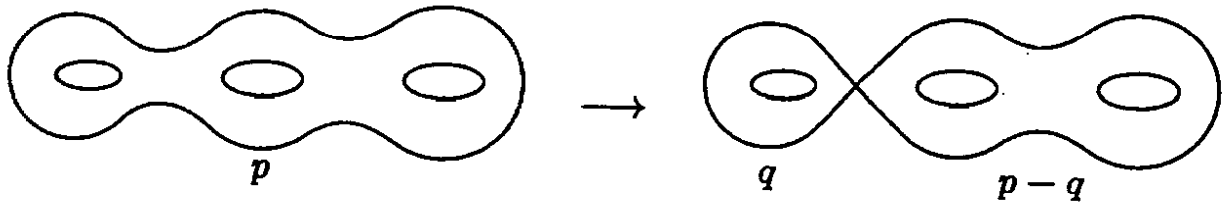


Рис. 1.

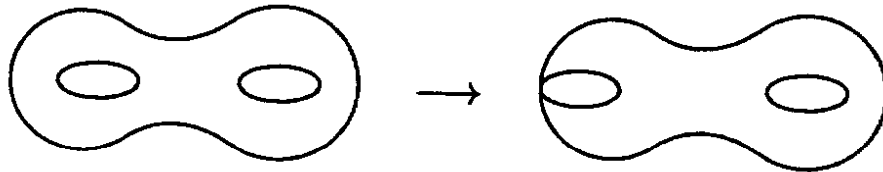


Рис. 2.

в плоскости Лобачевского $+(6p-6)$ параметров многоугольника), поэтому размерности D_q и D_0 равны

$$\begin{aligned}\dim D_q &= 3q - 3 + 1 + 3(p - q) - 3 + 1 = 3p - 4, \\ \dim D_0 &= 3(p - 1) - 3 + 2 = 3p - 4.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Таким образом, все D_α имеют комплексную коразмерность 1 в \bar{M}_p и на самом деле дополняют пространство модулей несингулярных поверхностей M_p до компактного пространства \bar{M}_p . Для анализа поведения меры в Z_p в некоторой окрестности $D = D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{[p/2]}$ выберем в этой окрестности координату y_1 поперек D , а y_2, \dots, y_{3p-3} — вдоль D , так, чтобы D локально задавалось уравнением

$$y_1(D) = 0. \quad (4.6)$$

Меру будем изучать как функцию y_1 при фиксированных y_2, \dots, y_{3p-3} . Можно показать, что в окрестности $y_1 = 0$ конформным преобразованием метрики вырождающуюся перемычку можно превратить в очень длинный цилиндр⁷⁾ (рис. 3). Это представление

⁷⁾ Выберем вдоль цилиндра длиной T координату τ , $0 \leq \tau \leq T$. Тогда при $T \gg 1$ умножение плоской метрики цилиндра на конформный множитель

$$\lambda = \exp(-2\tau) + \exp(2\tau - 2T)$$

превращает его в два диска единичного радиуса, соединенные в центрах перемычкой радиуса $e^{-\tau} \equiv |y_1| \ll 1$. Более строго, комплексная структура вырождающейся поверхности в окрестности тонкой перемычки устроена так же, как перемычка гиперболы $uv = y_1$ в C^2 , которая при $y_1 = 0$ вырождается в две плоскости: $u = 0$ и $v = 0$, пересекающиеся в точке $u = v = 0$ трансверсально. Метрика $\hat{g} = |du/u|^2$ переводит перемычку гиперболы в цилиндр длиной $T \sim \log(1/|y_1|)$. На самом деле $u = 0$ и $v = 0$ имеют смысл уравнений тех поверхностей, на которые распадается исходная.

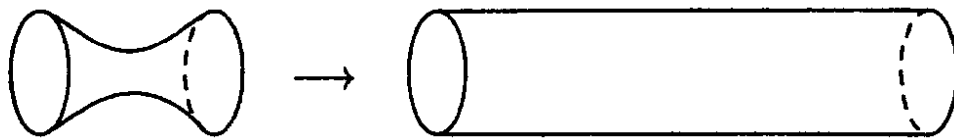
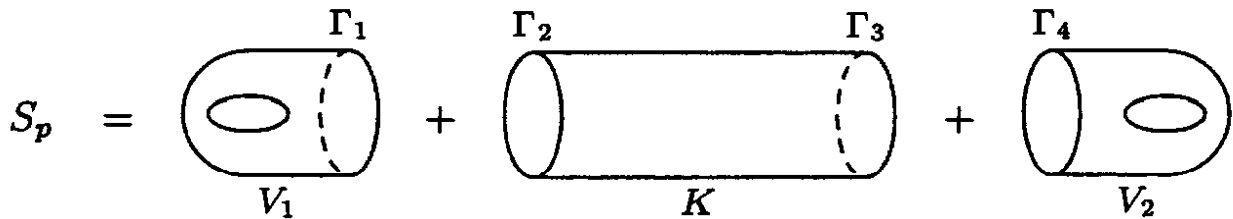


Рис. 3

удобно для анализа асимптотик. Напомним, что мера в Z_p не зависит от выбора конформной метрики.

В обоих случаях поверхность S_p будем считать склеенной из цилиндра и одной (случай II) или двух (случай I) крышечек (рис. 4).

I



II

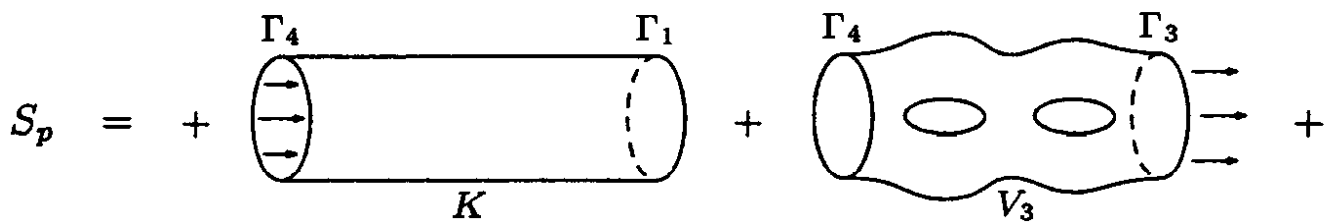


Рис. 4.

Координаты (τ, σ) на цилиндре K выберем, как на рис. 5. Поверхностям из D соответствует $T \rightarrow \infty$, и именно этот предел будет нас

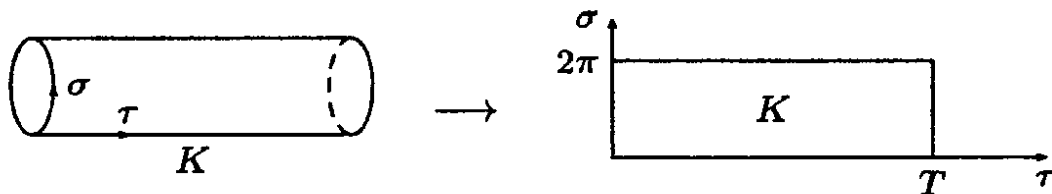


Рис. 5.

интересовать. Из дальнейшего будет видно, что “естественной” координатой y_1 является

$$y_1 = \exp [-(T + i\delta)], \quad (4.7)$$

где δ — угол поворота правого края цилиндра K относительно левого при приклеивании к крышечке.

Оценим сперва континуальные интегралы. Для этого следует зафиксировать граничные условия на контурах Γ_1, Γ_2 и Γ_3, Γ_4 , вычислить интегралы при заданных граничных условиях, после чего перемножить их и проинтегрировать по граничным условиям. В случае I)

для скаляров имеем

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(-\int_{S_p} \partial\bar{\varphi}\bar{\partial}\varphi d^2\xi\right) = \\
 &= \int \mathcal{D}\varphi(0, \sigma) \mathcal{D}\varphi(T, \sigma) \exp\{-v_1[\varphi(0, \sigma)]\} \times \\
 &\quad \times G[\varphi(0, \sigma), \varphi(T, \sigma)] \exp\{-v_2[\varphi(T, \sigma)]\}, \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \exp\{-v_1[\varphi(0, \sigma)]\} &= \int_{\text{задано } \varphi(0, \sigma)} \mathcal{D}\varphi \exp\left(-\int_{V_1} \partial\bar{\varphi}\bar{\partial}\varphi d^2\xi\right), \\
 G &= \int_{\substack{\varphi(0, \sigma) \\ \varphi(T, \sigma)}} \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-\int_K \partial\bar{\varphi}\bar{\partial}\varphi d\sigma d\tau\right\}. \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Аналогично определяются

$$\exp\{-v_2[\varphi(T, \sigma)]\} \quad \text{и} \quad \exp\{-v_3[\varphi(0, \sigma), \varphi(T, \sigma)]\}.$$

В случае II. Для духов все то же самое, только действие не

$$\int \partial\bar{\varphi}\bar{\partial}\varphi d^2\xi, \quad \text{а} \quad \int \rho \partial\bar{\varepsilon}\bar{\partial}\varepsilon d^2\xi.$$

Поскольку на цилиндре K $p = 1$, то G для скаляров и духов одно и то же:

$$G[\varphi(0, \sigma), \varphi(T, \sigma)] = \exp\{-S_{cl}[\varphi(0, \sigma), \varphi(T, \sigma)]\} \left(\det_{\text{Dir}} \Delta_0\right)^{-1}, \quad (4.10)$$

где S_{cl} — действие на решении уравнения Лапласа $\partial\bar{\partial}\varphi = 0$ с граничными условиями

$$\varphi(0, \sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(0) e^{in\sigma}, \quad \varphi(T, \sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(T) e^{in\sigma}, \quad (4.11)$$

а $\det_{\text{Dir}} \Delta_0$ — детерминант оператора Лапласа на цилиндре K с условиями Дирихле на краях. После несложных вычислений находим

$$\begin{aligned}
 G &= T^{-1} e^{T/g} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2nT})^{-2} \\
 &\quad \times \exp\left\{-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\text{Sh } nT} e^{nT} |\varphi_n(0) - e^{-nT} \varphi_n(T)|^2\right\}. \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы должны в случае I найти асимптотику при $T \rightarrow \infty$ следующего выражения:

$$I_0 = T^{-1} e^{T/6} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2nT})^{-2} \int \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}^2 \varphi_n(0) \mathcal{D}^2 \varphi_n(T) \times \\ \times \exp[-v_1[\varphi_n(0)] - S_{cl}[\varphi_n(0), \varphi_n(T)] - v_2[\varphi_n(T)]]. \quad (4.13)$$

При $T \rightarrow \infty$ в S_{cl} можно пренебречь обращающимися в нуль членами, если только при этом не возникает дополнительного вырождения у квадратичной формы $v_1 + S_{cl} + v_2$, т.е. независимости от $\varphi_n(0)$ или $\varphi_n(T)$.

Из формулы (4.12) для G видно, что

$$S_{cl} \Big|_{T \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{T} |\varphi_0(0) - \varphi_0(T)|^2 + \sum_{n>0} 2n |\varphi_n(0)|^2 + \sum_{n<0} 2|n| |\varphi_n(T)|^2 + \dots, \quad (4.14)$$

где точками обозначены экспоненциально малые члены. Мы оставили

$$\frac{|\varphi_0(0) - \varphi_0(T)|^2}{T},$$

поскольку на V_1 и V_2 имеются скалярные нулевые моды и v_1 и v_2 не зависят от $\varphi_0(0)$ и $\varphi_0(T)$. Экспоненциально малыми членами можно пренебречь, если v_1 не вырождается ни на каком векторе вида

$$\sum_{n<0} a_n e^{in\sigma},$$

а v_2 — на векторе вида

$$\sum_{n>0} b_n e^{in\sigma}.$$

Докажем, что это действительно так. Предположим противное. В этом случае на V_1 имеется решение φ^* уравнения $\bar{\partial}\varphi = 0$, обращающееся на Γ_1 в

$$\sum_{n<0} a_n e^{in\sigma}.$$

Представим теперь, что цилиндр K простирается вправо до бесконечности ($\tau \geq 0$) и метрика ρ на нем не единица, а $e^{-2\tau} = \rho^*$. В координатах

$$u = e^{-(\tau+ia)} \equiv e^{-z}$$

цилиндр $0 \leq \sigma \leq 2\pi$, $0 \leq \tau$ является кругом $|u| \leq 1$ с постоянной единичной метрикой

$$\rho^* dz \wedge d\bar{z} = |u|^2 d \log u \wedge d \log \bar{u} = du \wedge d\bar{u}.$$

Этим кругом поверхность V_1 заклеивается, становясь компактной поверхностью V_1^* рода $g \geq 1$. Решение φ^* можно продолжить на ци-

линдр, сохранив его голоморфность:

$$\varphi^*(\tau + i\sigma) = \sum_{n < 0} a_n e^{n(\tau + i\sigma)}.$$

Следовательно, на поверхности V_1^* существует голоморфная функция φ^* , отличная от постоянной. Однако известно, что таких функций не существует. Это противоречие доказывает утверждение. В итоге у формы v_1 нет нулевых векторов вида

$$\sum_{n < 0} a_n e^{ina}.$$

Аналогично и у v_2 нет нулевых векторов вида

$$\sum_{n > 0} b_n e^{ina},$$

и в S_{cl} действительно законно пренебречь экспоненциально малыми членами. Поэтому

$$\begin{aligned} I_0|_{T \rightarrow \infty} & T^{-1} e^{T/6} \int d^2 \varphi_0(0) d^2 \varphi_0(T) \times \\ & \times \exp[-|\varphi_0(0) - \varphi_0(T)|^2/T] \cdot \text{const} \sim e^{T/6} \int d^2 [\varphi_0(0) + \varphi_0(T)]/2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Как и следовало ожидать, у нас остался интеграл по нулевой моде — объем “Вселенной”. Далее мы положим его равным единице. Остается

$$I_0(T)|_{T \rightarrow \infty} \sim e^{T/6} \quad (\text{на } D_q, \quad q \neq 0). \quad (4.16)$$

Займемся теперь интегралом по духам

$$I_1(T) = \int \mathcal{D}\varepsilon \exp\left(-\int \rho \partial \bar{\varepsilon} \bar{\partial} \varepsilon d^2 \xi\right). \quad (4.17)$$

Вся разница по сравнению со случаем скаляров состоит в том, что в S_{cl} в (4.10) не надо удерживать $|\varepsilon_0(0) - \varepsilon_0(T)|^2/T$, поскольку теперь у v_1 нет нулевых векторов вида

$$\sum_{n \leq 0} a_n e^{ina}$$

($n \leq 0$, а не < 0 , как для скаляров!), а у v_2 — вида

$$\sum_{n \geq 0} b_n e^{ina}.$$

Для того чтобы доказать это, опять, как и в скалярном случае, предположим противное. Тогда на поверхности V_1 существует реше-

ние ε^* уравнения $\bar{\partial}\varepsilon = 0$, которое продолжается на цилиндр K голоморфной функцией

$$\varepsilon^*(\tau + i\sigma) = \sum_{n \leq 0} a_n e^{n(\tau + i\sigma)}.$$

Однако ε теперь не скаляр, а вектор. В координатах u

$$\varepsilon^*(u) = \varepsilon^*(z) \frac{du}{dz} = -\varepsilon^*(z)u = - \sum_{n \leq 0} a_n u^{1-n}$$

обращается в нуль при $u = 0$. Следовательно, на заклеенной поверхности V_1^* существует голоморфное непостоянное векторное поле $\varepsilon^*(z)$. Но мы знаем, что таких полей нет, если род q поверхности V_1^* больше либо равен единице. Более того, при $q > 1$ вообще никаких голоморфных векторных полей не существует, а при $q = 1$ имеется одно голоморфное векторное поле, нигде не обращающееся в нуль. Отсюда мы заключаем, что v_1 не имеет нулевых векторов вида

$$\sum_{n \leq 0} a_n e^{ina}.$$

Поскольку в этом случае в S_{cl} в (3.10) не надо удерживать член $|\varepsilon_0(0) - \varepsilon_0(T)|^2/T$, то вся главная часть зависимости от T определяется $\det_{Dir} \Delta_0(T)$ в G :

$$I_{-1}(T) \Big|_{T \rightarrow \infty} \sim T^{-1} e^{T/6} \quad (\text{на } D_q, \quad q \neq 0). \quad (4.18)$$

Отношение же континуальных интегралов, имеющееся в мере Z_p , ведет себя как ⁸⁾

$$I_{(1)} = \frac{I_0^{13}}{I_{-1}} \Big|_{T \rightarrow \infty} \sim T e^{2T} \quad (\text{на } D_q, \quad q \neq 0). \quad (4.19)$$

Случай II рассматривается совершенно аналогично, только V_3 заклеивается двумя дисками — справа и слева. Единственным отличием является то, что теперь и в случае скалярного поля в S_{cl} можно пренебречь членом $|\varphi_0(0) - \varphi_0(T)|^2/T$. Это связано с тем, что у v_3 нулевой модой является лишь сумма $\varphi_0(0) + \varphi_0(T)$, а не $\varphi_0(0)$ и $\varphi_0(T)$ по отдельности, как было для $v_1 + v_2$ в случае I.

Таким образом, в случае II $I_0 \sim I_1$, и отношение континуальных интегралов

$$I_{(II)} = \frac{I_0^{13}}{I_{-1}} \Big|_{T \rightarrow \infty} (I_{-1})^{12} \sim T^{-12} e^{2T} \quad (\text{на } D_0). \quad (4.20)$$

⁸⁾ Случай, когда род V_1^* равен нулю (заклеивание крышечкой), был разобран А. Поляковым, которому мы признательны за разъяснения. В этом случае $I_{(1)}$ не зависят от T .

Нам осталось оценить форму объема

$$\frac{d\Omega}{\det(f_i, f_j)} = \prod_{i=1}^{3p-3} \frac{i}{2} dy_i \wedge d\bar{y}_i / \det(f_i, f_j). \quad (4.21)$$

Для этого воспользуемся тем, что с вариацией T связан дифференциал Бельтрами, постоянный на K . Действительно, вариацию комплексной структуры, порождаемую таким дифференциалом,

$$dz \rightarrow dz + ad\bar{z},$$

можно рассматривать, как преобразование

$$z \rightarrow \tilde{z} = z + a\bar{z},$$

которое переводит прямоугольник

$$0 \leq \sigma \leq 2\pi, \quad 0 \leq \tau \leq T \quad (z = \tau + i\sigma)$$

в параллелограмм. Новым значением координаты $(T + i\sigma)/2\pi i$ в пространстве \bar{M}_p является комплексное отношение периодов этого параллелограмма

$$d\left(\frac{T + i\delta}{2\pi i}\right) = \frac{\tilde{z}(T)}{\tilde{z}(2\pi i)} - \frac{T}{2\pi i} = \frac{Ta}{i\pi},$$

откуда

$$a = \frac{d(T + i\delta)}{2T}.$$

Следовательно, координате $\tilde{y}_1 = T + i\delta$ в пространстве модулей \bar{M}_p соответствует дифференциал Бельтрами $\eta^1 = 1/2T$, так как сдвигу на $d\tilde{y}_1$ в \bar{M}_p соответствует, как мы только что показали, вариация комплексной структуры

$$dz \rightarrow dz + d\tilde{y}_1 \eta^1 d\bar{z}.$$

Из (4.3) находим, что квадратичный дифференциал⁹⁾ f_i на K равен единице. Координата \tilde{y}_1 направлена поперек D . Остальные квадратичные дифференциалы могут быть выбраны так, что $(f_i, f_1) \sim 1$ и соответствующие им координаты направлены вдоль D . В этом случае

$$\det(f_i, f_j) \sim \det(f_1, f_1) \sim T, \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{\det(f_i, f_j)} &\sim \frac{d\tilde{y}_1 \wedge d\bar{\tilde{y}}_1}{T} \wedge d\Omega_{\parallel} = \frac{dT d\delta}{T} d\Omega_{\parallel} = \\ &= \frac{e^{2T}}{T} dy_1 \wedge d\bar{y}_1 \wedge d\Omega_{\parallel} = \frac{dy_1 \wedge d\bar{y}_1}{|y_1|^2 \log(1/|y_1|)} \wedge d\Omega_{\parallel}, \end{aligned}$$

где

$$y_1 = e^{-\tilde{y}_1} = e^{-(T+i\delta)}.$$

⁹⁾ Напомним, что формулы (4.2), (4.4) — это определение направлений η^i и соответствующих координат δy_i в \bar{M}_p по базису f_i .

Поверхность D задается уравнением $y_1(D) = 0$. Эта координата хороша тем, что, как видно из (4.12), отношение детерминантов раскладывается в ряд по y_1 , \bar{y}_1 , и расходимости, которые кажутся экспоненциальными, в координатах $y_1 \dots$ являются степенными.

Собирая вместе (4.19)–(4.22), находим асимптотику меры в окрестности D_q , $q \neq 0$:

$$\frac{d\Omega}{\det(f_i, f_j)} \frac{I_0^{13}}{I_{-1}} \Big|_{|y_1| \rightarrow 0} \sim \frac{d^2 y_1}{|y_1|^4} \sim dT e^{2T} \quad (4.23)$$

и в окрестности D_0 :

$$\frac{d\Omega}{\det(f_i, f_j)} \frac{I_0^{13}}{I_{-1}} \Big|_{|y_1| \rightarrow 0} \sim \frac{d^2 y_1}{|y_1|^4 [\log(1/|y_1|)]^{13}} \sim \frac{dT}{T^{13}} e^{2T}. \quad (4.24)$$

Для того, чтобы найти порядок полюса формы $F(y)dv$ из (1.3), (3.4), нам осталось оценить матрицу периодов (3.25) и окрестности поверхности D . В случае I распада на две поверхности S_q и S_{p-q} рода q и $p-q$, p голоморфных 1-дифференциалов ω_i , (3.24) переходят в голоморфные 1-дифференциалы

$$\omega'_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, q \quad \text{на } S_q$$

и

$$\omega''_\beta, \quad \beta = 1, \dots, p-q \quad \text{на } S_{p-q}.$$

Матрица периодов $\hat{\tau}$ при этом принимает блочный вид и $\det \operatorname{Im} \hat{\tau}(y)$ при $y_1 \rightarrow 0$ имеет конечный предел. Таким образом, в окрестности D_q , $q \neq 0$

$$\det \operatorname{Im} \hat{\tau}(y)|_{y_1 \rightarrow 0} \rightarrow \det \operatorname{Im} \hat{\tau}' \cdot \det \operatorname{Im} \hat{\tau}'', \quad (4.25)$$

где $\hat{\tau}'$ ($\hat{\tau}''$) матрица периодов S_q (S_{p-q}). Для того чтобы оценить матрицу периодов в случае II — вырождения ручки, выберем базис циклов (3.23) так, чтобы цикл a_p проходил поперек цилиндра K на рис. 4, II, а цикл b_p — вдоль. Выберем на K координату $z = \tau + i\sigma$ (рис. 5). Тогда из соотношения

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij},$$

и условия голоморфности $\bar{\partial}\omega_i = 0$ следует, что при $T \gg 1$ все дифференциалы, кроме ω_p , экспоненциально затухают на цилиндре:

$$\omega_i \lesssim e^{-\tau} + e^{-(T-\tau)}, \quad i = 1, \dots, p-1.$$

а $\omega_p = 1/2\pi i$ при $\tau \gg 1$, $T - \tau \gg 1$. Отсюда единственный расходящийся при $T \rightarrow \infty$ элемент матрицы периодов равен

$$\tau_{pp} = \oint_{b_p} \omega_p \approx T/2\pi i$$

и в окрестности D_0 имеем¹⁰⁾

$$\det \operatorname{Im} \hat{\tau}|_{y_1 \rightarrow 0} \sim T = \log(1/|y_1|). \quad (4.26)$$

Подставляя (4.25), (4.20) в (1.3) и сравнивая соответственно с (4.23), (4.24), находим, что форма $F(y)dv$ имеет на D полюс второго порядка:

$$F(y) dv|_{y_1 \rightarrow 0} \sim y_1^{-2} dy_1 \wedge dv_{||}. \quad (4.27)$$

Таким образом, свойство Б) меры, сформулированное во введении, доказано.

Покажем теперь, что условием отсутствия нулей в M_p и (4.27) форма $F(y)dv$ определяется однозначно, с точностью до постоянного множителя. Действительно, отношение любых двух форм F' и F'' , удовлетворяющих этим условиям, является мероморфной функцией на \bar{M}_p , не обращающейся в нуль или бесконечность нигде, кроме, быть может, пересечений компонент D_i поверхности D (т.е. в тех местах, где коэффициент при y_1^{-2} в (4.27) может иметь особенности). Отсюда вытекает, что либо $F'/F'' = \text{const}$, либо многообразие нулей и полюсов функции F'/F'' имеет комплексную коразмерность 2 в \bar{M}_p . Однако известно, что многообразие нулей и полюсов непостоянной мероморфной функции на компактном алгебраическом многообразии имеет комплексную коразмерность 1. Значит, $F'/F'' = \text{const}$.

Асимптотики (4.23), (4.24) имеют очень простой смысл. Если рассматривать теорию струны как теорию бесконечного числа взаимодействующих частиц, то K на рис. 5 имеет смысл пронагатора в представлении собственного времени T , а интеграл по dT от меры в случае II может быть записан в виде

$$Z_p^{\text{pacz II}} = \int d^D p_\mu \int_0^\infty dT \sum_r \exp[-(p_\mu^2 + m_V^2)T] V_3(r, p_\mu), \quad (4.28)$$

где сумма идет по всем частицам, соответствующим различным возбужденным состояниям струны (p_μ — импульс, протекающий по петле). При больших T в интеграле по импульсам в (4.28) существенны малые p_μ^2 и мера в (4.28) имеет асимптотику

$$dT \cdot T^{-D/2} \sum_r \exp(-m_r^2 T) V_3(r, 0), \quad (4.29)$$

¹⁰⁾ В этом случае вырожденную поверхность можно представлять себе как поверхность рода $p-1$ с двумя выколотыми точками R и Q . Цикл a_p обходит вокруг одной из них, а цикл b_p соединяет их. Дифференциал ω_p является нормализованным абелевым дифференциалом третьего рода с полюсами в R и Q . Подробное обсуждение см. в работе Алессандрини [17].

откуда следует, что главный вклад в интеграл (4.28) на больших временах T дают тахионы и безмассовые состояния:

$$Z_p^{paczII} \sim \int dT \cdot T^{-D/2} \sum_{m_r^2 \leq 0} \exp(-m_r^2 T) V_3(r, 0). \quad (4.30)$$

Вспомним теперь, что в замкнутой бозонной струне основное состояние является тахионом [22] с $m_0^2 = -2$ (в нашей нормировке), а все возбужденные состояния имеют $m_r^2 \geq 0$ (мультиплет безмассовых возбуждений содержит гравитон $g^{\mu\nu}$, тензор $A^{\mu\nu}$ и дилатон Φ). Тогда, с учетом того, что $D = 26$, получаем из (4.30) асимптотику

$$Z_p^{paczII} \sim \int dT \cdot T^{-13} e^{2T},$$

совпадающую с (4.24). Отметим, что при $D > 2$ безмассовые состояния не дают вклада в расходимость интеграла (4.30).

В случае I частицы распространяются между вершинами V_1 и V_2 (рис. 4, I) с нулевым импульсом, и вместо (4.30) имеем

$$Z_p^{paczI} \sim \int dT \sum_{m_r^2 < 0} \exp(-m_r^2 T) V_1(r) V_2(r) \quad (4.31)$$

и главный вклад в расходимость в (4.31) опять связан с тахионом и имеет вид

$$\int dT e^{2T},$$

что совпадает с (4.23). Однако ясно, что в этом случае имеется также и расходимость, связанная с безмассовым дилатоном ($g^{\mu\nu}$ и $A^{\mu\nu}$ из вакуума не рождаются) и, по-видимому, приводящая к перенормировке наклона.

В итоге, порядок γ полюса формы $F(y) dv$ равен

$$\gamma = 1 - \frac{m_0^2}{2}. \quad (4.32)$$

Полученные результаты позволяют также предположить, что модель является перенормируемой, причем имеется только две перенормировки: наклона и вершины тахион-вакуум (тахионный тадполь).

5. Мера в бозонной струне и теорема Мамфорда

В этом разделе мы приведем математически строгую формулировку полученных выше результатов и обсудим их связь с теоремой Мамфорда [7]. Из (2.19), (3.4) следует, что $F(y)$ является не функцией,

а сечением некоторого линейного (т.е. комплексная размерность слоя равна единице) расслоения E над M_p . Более точно, $F(y)$ является вкладом в меру от левых возбуждений струны:

$$F(y) = \det \bar{\partial}_{-1} \cdot (\det \bar{\partial}_0)^{-13}, \quad (5.1)$$

где $\bar{\partial}_j$ действует на пространстве j -дифференциалов; $\det \bar{\partial}_j$ является сечением линейного расслоения [23] со слоем, порождаемым вектором

$$\Phi_1^{(j)} \wedge \dots \wedge \Phi_{\alpha_j}^{(j)} \wedge \Phi_1^{(1-j)} \wedge \dots \wedge \Phi_{\alpha_{1-j}}^{(1-j)},$$

где $\Phi_\alpha^{(j)}$ — некоторый базис в пространстве $\text{Ker } \bar{\partial}_j$ голоморфных j -дифференциалов, а $\Phi_\alpha^{(1-j)}$ — базис в $(\text{Co Ker } \bar{\partial}_j)^* \approx \text{Ker } \bar{\partial}_{1-j}$. Таким образом, E является тензорным произведением двух линейных расслоений над M_p :

$$E = \mathcal{K} \otimes \lambda^{-13}, \quad (5.2)$$

где \mathcal{K} — расслоение $|3p-3, 0|$ форм со слоями, порождаемыми вектором $dv = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{3p-3}$, а λ — расслоение модулярных форм, со слоями, порождаемыми $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$, где $\{\omega_i\}$ — базис в пространстве голоморфных 1-форм. Мы его выбрали, как в конце разд 3. Расслоение λ нетривиально, поскольку при обходе по замкнутой кривой γ в M_p базис циклов может измениться. Сечение $F(y)$ хорошо определено лишь в том случае, когда в (5.1) сокращаются гравитационные аномалии [24]. Это на самом деле имеет место [18], причем условие сокращения гравитационной аномалии фактически эквивалентно [19] условию сокращения конформной аномалии в отношении $\det \Delta_{-1} / (\det \Delta_0)^{13}$.

Теорема¹¹⁾, доказанная Мамфордом [7] на основе вычисления характеристического класса $c_1(E)$ расслоения E , утверждает, что это расслоение тривиально на M_p (что отражает, в частности, отсутствие топологических препятствий к сокращению аномалий). Более того, из вычисления $c_1(E)$ также следует, что у E существует голоморфное и не обращающееся на M_p в нуль сечение F , имеющее полюс второго порядка на бесконечности D . Более того, теорема Вольперта [14] о независимости компонент $D_0, \dots, D_{[p/2]}$ бесконечности D в группе $H_{6p-8}(\bar{M}_p, \mathbb{Q})$ гомологий пространства \bar{M}_p позволяет заключить, что любое голоморфное и не обращающееся в нуль на M_p сечение E отличается от F на постоянный множитель. Как было замечено Бейлинсоном и Дринфельдом, с помощью квадрата модуля сечения F можно определить меру на \bar{M}_p :

$$d\mu = dv \wedge d\bar{v} |F(y)|^2 [\det(\omega_i, \omega_j)]^{-13}, \quad (5.3)$$

¹¹⁾ Загадочное совпадение числа 13 в теореме Мамфорда с числом $26/2$ в теории струн было отмечено Ю.И. Маниным [25]. Мы признательны ему за привлечение нашего внимания к работе [7].

где

$$(\omega_i, \omega_j) \stackrel{\text{def}}{=} (i/2) \int \omega_i \wedge \bar{\omega}_j,$$

а $\det(\omega_i, \omega_j)$ является естественной эрмитовой метрикой на λ и в выбранном в конце разд. 3 базисе совпадает с $\det \text{Im } \hat{\tau}$. Сравнивая (5.3) с (2.10), (3.4), (4.27), мы видим, что в теории бозонных струн возникает именно такая мера. Таким образом нами доказана следующая теорема.

Теорема. Мера интегрирования в теории замкнутых бозонных ориентируемых струн является квадратом модуля глобального, голоморфного и не имеющего нулей на M_p сечения расслоения $K \otimes \lambda^{-13}$, деленным на 13 степень естественной метрики на λ .

Поскольку голоморфная структура на пространстве модулей возникает из алгебраической, любой голоморфный объект на нем, в частности сечение F , возникающее в теории струн, является алгебраическим (согласно принципу GAGA [26]). Наши результаты естественно обобщает следующая гипотеза.

Гипотеза. Многопетлевые амплитуды (не только вакуумные) в любой конформно-инвариантной теории струн (такой, как бозонная струна в $D = 26$ или SS и HS в $D = 10$) выражаются через алгебраические объекты (функции или сечения голоморфных расслоений) на пространстве модулей римановых поверхностей.

Таким образом, квантовая геометрия является комплексной геометрией пространства \bar{M}_p .

6. Многопетлевые амплитуды и тэта-функции

В этом разделе мы приводим явные формулы для меры в случае $p = 2$ и $p = 3$, полученные в [10], и сформулируем гипотезу о виде меры для $p = 4$. Простые формулы для рода $p = 2, 3$ удастся написать потому, что в этих случаях существует явная параметризация пространства M_p матрицами периодов, к описанию которой мы и перейдем.

На произвольной римановой поверхности S_p рода p по симплектическому базису циклов (замкнутых путей) $a_i, b_i = 1, \dots, p$

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad i \neq j; \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}, \quad (6.1)$$

введенному в конце разд. 3, и связанному с ним базису голоморфных 1-дифференциалов ω_i :

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij} \quad (6.2)$$

можно построить матрицу периодов

$$\tau_{ik} = \oint_{b_i} \omega_k. \quad (6.3)$$

которая удовлетворяет соотношениям Римана [27]

$$\tau_{ik} = \tau_{ki}, \quad \operatorname{Im} \hat{\tau} > 0. \quad (6.4)$$

Эти соотношения являются следствием формулы

$$\int_{S_p} \omega \wedge \bar{\omega}' = \sum_{i=1}^p \left(\int_{a_i} \omega \int_{b_i} \overline{\omega'} + \int_{b_i} \omega \int_{a_i} \overline{\omega'} \right),$$

где ω и ω' — произвольные голоморфные 1-дифференциалы, и того, что норма ненулевого дифференциала ω положительна:

$$\|\omega\|^2 = \frac{i}{2} \int_{S_p} \omega \wedge \bar{\omega} > 0.$$

Теорема Торелли утверждает, что комплексная структура с точностью до диффеоморфизма однозначно определяется матрицей периодов. Таким образом, комплексные структуры можно параметризовать матрицами $\hat{\tau}$. Однако одной и той же поверхности может соответствовать бесконечно много матриц $\hat{\tau}$. В самом деле, базис $\{a_i, b_i\}$ условиями (6.1) определяется неоднозначно. Мы можем выбрать другой базис:

$$b'_i = A_{ik} b_k + B_{ik} a_k, \quad a'_i = C_{ik} b_k + D_{ik} a_k, \quad (6.5)$$

который будет удовлетворять (6.1), если целочисленные матрицы A, B, C, D удовлетворяют условиям:

$$AB^T - BA^T = CD^T - DC^T = 0, \quad AD^T - BC^T = 1, \quad (6.6)$$

т.е. матрица

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \operatorname{Sp}(p, \mathbb{Z}) \equiv \Gamma_p.$$

Группа Γ_p называется модулярной группой Зигеля степени p . При преобразованиях (6.5) базис дифференциалов (6.2) переходит в

$$\omega'_i = \omega_k (C\hat{\tau} + D)^{-1}_{ki}, \quad (6.7)$$

откуда находим, что матрица периодов $\hat{\tau}'$ в базисе (6.5) имеет вид

$$\hat{\tau}' = (A\hat{\tau} + B)(C\hat{\tau} + D)^{-1}. \quad (6.8)$$

Таким образом, для того, чтобы не учитывать одну и ту же поверхность несколько раз, нам нужно ограничиться рассмотрением факторпространства

$$\mathcal{G}_p = \mathcal{H}_p / \Gamma_p,$$

где \mathcal{H}_p обозначает пространство всех симметрических $p \times p$ матриц с положительно определенной мнимой частью и называется верхней полуплоскостью Зигеля. Группа Γ_p действует на ней преобразованиями (6.8). Многообразие \mathcal{G}_p имеет комплексную размерность $p(p+1)/2$, которая для $p = 1, 2, 3$ совпадает с размерностью пространства M_p . В действительности, для этих случаев \mathcal{G}_p и M_p совпадают. В итоге для рода $p = 1, 2, 3$ пространство M_p может быть параметризовано матрицами периодов, пробегающими фундаментальную область \mathcal{G}_p группы Γ_p в верхней полуплоскости Зигеля \mathcal{H}_p .

Из (1.1) и (1.3) следует, что мера в случае $p = 2, 3$ должна иметь вид [10]

$$Z_p = \int_{\mathcal{G}_p} \prod_{k \leq j} \frac{i}{2} d\tau_{kj} \wedge d\bar{\tau}_{kj} |\bar{\chi}_{12-p}(\hat{\tau})|^{-2} (\det \operatorname{Im} \hat{\tau})^{-13}. \quad (6.9)$$

Можно показать [28], что естественной модулярно инвариантной мерой на \mathcal{G}_p является

$$d\mu_p = \prod_{k \leq j} \frac{i}{2} d\tau_{jk} \wedge d\bar{\tau}_{jk} (\det \operatorname{Im} \hat{\tau})^{-(p+1)}.$$

Кроме того, из (6.6) следует, что

$$\det \operatorname{Im} \hat{\tau}' = |\det(C\hat{\tau} + D)|^{-2} \det \operatorname{Im} \hat{\tau}. \quad (6.10)$$

Поэтому условие того, что мера в (6.9) является мерой на \mathcal{G}_p , т.е. модулярно инвариантна, имеет вид

$$\chi_k(\hat{\tau}') = [\det(C\hat{\tau} + D)]^k \chi_k(\tau), \quad k = 12 - p \quad (6.11)$$

(для $p = 3$ формула (6.11) нуждается в уточнении, см. ниже). Далее, форма

$$\prod_{i \leq j} d\tau_{ij}$$

имеет на компоненте D_0 бесконечности ($\operatorname{Im} \tau_{11} \rightarrow \infty$) полюс первого порядка, а на компоненте D_1 (для $p = 2, 3$ других компонент нет), где $\hat{\tau}$ принимает блочный вид, нуль порядка $p - 2$. Поэтому из свойства Б) введения и (6.11) следует, что $\chi_k(\hat{\tau})$ является параболической модулярной формой веса $k = 12 - p$ на \mathcal{G}_p , причем на D_1 она имеет нуль порядка p . Модулярной формой (Зигеля) веса k на \mathcal{G}_p называется голоморфная на \mathcal{H}_p функция $\hat{\tau}$, преобразующаяся по закону (6.11). Для нечетного p обязательно k четное. Модулярная форма, обращающаяся в нуль на D_0 , называется параболической. Если же p и k нечетные, то форму нужно определять с помощью домножения на характер группы Γ_p , так как при одновременной замене знака у A, B, C и D в (6.8) $\hat{\tau}'$ не меняется, а правая часть в (6.11) меняет знак.

Для $p = 1, 2$ пространство модулярных форм на \mathcal{G}_p хорошо изучено. Так для $p = 1$ все формы являются линейными комбинациями

форм веса 4 и 6, их число определяется формулой

$$p_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k}(1)t^{2k} = (1-t^4)^{-1}(1-t^6)^{-1}, \quad (6.12)$$

где $d_{2k}(p)$ обозначает число линейно независимых модулярных форм веса $2k$ на \mathcal{G}_p . Для $p=2$ ситуация аналогичная, хотя и несколько более сложная [29]. Если ограничиться формами четного веса, то имеется 4 основных формы с весами 4, 6, 10 и 12.

$$p_2(t) = (1-t^4)^{-1}(1-t^6)^{-1}(1-t^{10})^{-1}(1-t^{12})^{-1}. \quad (6.13)$$

В [29] приводятся выражения для основных форм через ряды Эйзенштейна и тэта-константы. В этой же работе показано, что имеется единственная параболическая форма веса 10. Она должна, следовательно, совпадать с χ_{10} из (6.9) и иметь на D_1 нуль второго порядка, в чем нетрудно убедиться с помощью формулы [29]

$$\chi_{10} = -2^{-14} \prod_m \theta_m^2(\hat{\tau}), \quad (6.14)$$

где тэта-константы $\theta_m(\hat{\tau})$ определяются как

$$\begin{aligned} \theta_m(z; \hat{\tau}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^p} \exp \left\{ \pi i \left(n + \frac{m'}{2} \right)^T \hat{\tau} \left(n + \frac{m'}{2} \right) + \right. \\ \left. + 2\pi i \left(n + \frac{m'}{2} \right)^T \left(z + \frac{m''}{2} \right) \right\}, \\ \theta_m(\hat{\tau}) \equiv \theta_m(0; \hat{\tau}), \quad m \equiv (m'; m''), \end{aligned} \quad (6.15)$$

а компоненты векторов m' , m'' характеристики m принимают значения 0, 1. Величина

$$e(m) = (m'm'') \pmod{2} \quad (6.16)$$

называется четностью характеристики m , и в (6.14) произведение берется только по четным характеристикам. Для рода p имеется $2^{p-1}(2p+1)$ четных и $2^{p-1}(2p-1)$ нечетных характеристик. Если $e(m) = 1$, то $\theta_m(0; \tau) = 0$. Из (6.14), (6.15) следует, что при $\tau_{12} \rightarrow 0$

$$\chi_{10} \sim \exp(2\pi i \tau_{11}) \exp(2\pi i \tau_{22}) (\pi \tau_{12})^2 + \dots, \quad (6.17)$$

как и требовалось. Из результатов [21] также следует, что $\chi_{10}(\hat{\tau})$ не имеет нулей внутри \mathcal{G}_2 . Трансформационные свойства тэта-функций (6.15) относительно Γ_p подробно описаны в [30].

Формулы (6.9), (6.14) решают задачу вычисления меры для $p=2$ [10]. Для $p=3$ пространство модулярных форм устроено более сложно. Однако известно [31], что до веса 10 оно порождается формами веса 4, 6 и 10, как и для $p=2$, т.е. имеется лишь 5 линейно

независимых форм:

$$\psi_4, \quad \psi_6, \quad (\psi_4)^2, \quad \psi_4\psi_6, \quad \psi_{10}. \quad (6.18)$$

Выражения для форм ψ_k веса k через $\theta_m(\hat{\tau})$ приведены в [31], где также можно найти утверждение о том, что параболических форм веса < 12 не существует. Специфика случая $p = 3$ состоит в том, что нам нужна форма нечетного веса 9, т.е. со значениями в характере группы Γ_3 . Обычной же комплекснозначной формой веса 18 будет ее квадрат $\chi_9^2 = \chi_{18}$. Форма χ_{18} должна быть параболической, причем должна иметь при этом на D_0 нуль второго порядка, а на D_1 — шестого. Кроме того, можно показать, что мера $d\mu_3$ (6.10) при корректном определении области интонирования имеет нуль на многообразии гиперэллиптических поверхностей D_* , поэтому χ_{18} также должна обращаться в нуль на D_* и других нулей иметь не может. Такая форма существует и имеет вид [31]

$$\chi_{18} = \prod_m \theta_m(\hat{\tau}), \quad (6.19)$$

где произведение берется по всем 36 четным характеристикам. Поскольку модулярная форма определяется положением и порядком нулей однозначно, с точностью до постоянного множителя, то мы заключаем, что (6.19) и есть та форма, которая является квадратом формы χ_9 в мере (6.9). В итоге [10]

$$Z_3 = \int_{\mathcal{G}_3} d\mu_3 |\chi_{18}(\hat{\tau})|^{-1} (\det \operatorname{Im} \hat{\tau})^{-9}. \quad (6.20)$$

Явные формулы (6.9), (6.14) и (6.10), (6.20) имеет смысл, на наш взгляд, дополнить формулами для амплитуд рассеяния тахионов. Для этого нам потребуется, следуя [5], вычислить гауссов интеграл:

$$\begin{aligned} & \int DX^\mu \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu d^2 \xi \right] \times \\ & \quad \times \prod_{k=1}^N \int \exp[ip_k^\mu X_\mu(\xi_k)] \rho(\xi_k) d^2 \xi_k = \\ & = \left(\frac{\det N_0}{\det' \Delta_0} \right)^{13} \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int dX_{cl}^\mu \bar{\partial} X_{\mu, cl} d^2 \xi \right] \times \\ & \quad \times \prod_{k=1}^N \int \exp[ip_k^\mu X_{\mu, cl}(\xi_k)] \rho(\xi_k) d^2 \xi_k \stackrel{\text{def}}{=} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\det N_0}{\det' \Delta_0} \right)^{13} K(p_1, \dots, p_N; \hat{\tau}), \quad (6.21) \end{aligned}$$

где χ_{cl}^μ является решением уравнения

$$-2\partial\bar{\partial}X_{cl}^\mu(\xi) = \sum_{k=1}^N i\pi p_k^\mu \delta(\xi - \xi_k). \quad (6.22)$$

Благодаря условию сохранения импульса

$$\sum_{k=1}^N p_k^\mu = 0 \quad (6.23)$$

решение (6.22) нетрудно выразить через тэта-функции (6.15):

$$X_{cl}^\mu(\xi) = - \sum_{k=1}^N i p_k^\mu [\log |\theta_m[z(\xi) - z(\xi_k); \hat{\tau}]|^2 + \\ + 4\pi \operatorname{Im} z(\xi)^T (\operatorname{Im} \hat{\tau})^{-1} \operatorname{Im} z(\xi_k)], \quad (6.24)$$

где m — любая нечетная характеристика. Аргументом $z(\xi)$ в (6.24) является интеграл от вектора $\omega = (\omega_i, \dots, \omega_p)$ из голоморфных абелевых дифференциалов по некоторому пути, соединяющему точку ξ с фиксированной точкой ξ_0

$$z(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \omega. \quad (6.25)$$

Регуляризуя функцию (6.24) при $\xi = \xi_k$, как в [5], находим, что на массовой поверхности $p^2 = 2$ зависимость от ρ в (6.21) сокращается и после несложных вычислений фактор $K(p_i; \hat{\tau})$ приводится к виду

$$K(p_i; \hat{\tau}) = \int \prod_{k=1}^N \frac{i}{2} \kappa_m(\xi_k) \wedge \overline{\kappa_m(\xi_k)} \prod_{i < j} |\chi_{ij}|^{2p_i p_j}, \\ \chi_{ij} \equiv \theta_m(z_{ij}; \hat{\tau}) \exp(-\pi \operatorname{Im} z_{ij}^T) (\operatorname{Im} \tau)^{-1} (\operatorname{Im} z_{ij}), \quad (6.26)$$

где $z_{ij} \equiv z(\xi_i) - z(\xi_j)$ и 1-дифференциал $\kappa_m(\xi)$ имеет вид

$$\kappa_m(\xi) = \omega_i(\xi) \frac{\partial \theta_m(z; \hat{\tau})}{\partial z_i} \Big|_{z=0}. \quad (6.27)$$

Выражение (6.26) не зависит от выбора нечетной характеристики m и его можно подставлять в меру для получения амплитуд

$$A(p_i, \dots, p_N) = \int_{M_p} d\Omega |F(y)|^2 (\det \operatorname{Im} \hat{\tau})^{-13} K(p_1, \dots, p_N; \hat{\tau}). \quad (6.28)$$

Для случая $p = 1$ с помощью (6.26) и (1.2) воспроизводится известный результат [8].

Перейдем теперь к случаю $p = 4$. Комплексная размерность \mathcal{G}_4 на единицу больше, чем \overline{M}_4 , поэтому на матрицу $\hat{\tau}$ имеется одно соотношение. Оно называется соотношением Шоттки [32] и является условием обращения в нуль некоторой параболической формы J_8 веса 8:

$$J_8(\hat{\tau}) = 0. \quad (6.29)$$

Строго говоря, Шоттки доказал, что любая матрица τ римановой поверхности рода 4 удовлетворяет (6.29), а обратное утверждение было доказано сравнительно недавно [33], куда мы и отсылаем читателя за формулой для J_8 через $\theta_m(\hat{\tau})$. Результаты [33] позволяют сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 1. Мера для $p = 4$ имеет вид

$$\begin{aligned} Z_4 &= \int_{\mathcal{G}_4} d\mu_4 |\delta(J_8)|^2 (\det \operatorname{Im} \hat{\tau})^{-8} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{M_4} \operatorname{res} dv J_8^{-1}(\hat{\tau}) \wedge \overline{\operatorname{res} dv J_8^{-1}(\tau)} (\det \operatorname{Im} \hat{\tau})^{-13}, \\ dv &\equiv \prod_{i \leq j} d\tau_{ij}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

7. Дискуссия: структура меры в суперструне

В этом разделе мы обсудим структуру меры в теории замкнутых ориентируемых суперструн (SS) [1] и в модели гетеротической струны (HS) [2]. Результаты предыдущих разделов и однопетлевых вычислений [1, 2] позволяют предположить, что мера в случае $p > 1$ имеет следующий вид:

$$Z_p^{SS} = \int_{M_p} d\Omega |F(y)|^2 |\chi_8^{SS}(y)|^2 (\det \operatorname{Im} \hat{\tau})^{-5}, \quad (7.1)$$

$$Z_p^{HS} = \int_{M_p} d\Omega |F(y)|^2 \chi_8^{SS}(y) \overline{f_8^{HS}(y)} (\det \operatorname{Im} \tau)^{-5}, \quad (7.2)$$

где $F(y)\chi_8^{SS}(y)$ есть вклад в меру левых возбуждений струны Грина-Шварца, а $\overline{F(y)f_8^{HS}(y)}$ — вклад правых возбуждений гетеротической струны, получаемой компактификацией бозонной струны на соответствующий тор [2]. Фактически, (7.2) есть наиболее общий вид меры для десятимерной теории струн с невзаимодействующими правыми и левыми возбуждениями. Ниже мы объясним, что, по видимому, таких теорий всего 3: SS , HS и теория с мерой (7.2), где вместо χ_8^{SS} стоит f_8^{HS} , причем χ_8^{SS} и f_8^{HS} некоторыми естественными условиями фиксируются однозначно.

Принципиальную роль в выводе (7.1), (7.2) играет то обстоятельство, что мы, для того чтобы выделить в струне Невье–Шварца суперсимметричный сектор, должны суммировать по граничным условиям накладываемым независимо на правые и левые фермионы (причем брать только такие условия, при которых нет фермионных нулевых мод). Именно поэтому в (7.1) появляется квадрат модуля, а не сумма квадратов, и сектора правых и левых возбуждений полностью разделяются, допуская конструкцию гетеротической струны.

Поскольку в суперструне основное состояние является безмассовым [1], а в гетеротической струне в правом секторе имеется тахивон, то на основе анализа в конце разд. 3 и из условия модулярной инвариантности (7.1), (7.2) мы заключаем, что:

- а) χ_8^{SS} и f_8^{HS} являются модулярными формами веса 8 на \overline{M}_p ,
- б) χ_8^{SS} является параболической формой, обращающейся на D в нуль. Вследствие б) тахивон в правой части меры не дает вклада в расходимости, так как

$$\int d^2y y^{-1}(\bar{y})^{-2} = 0.$$

То что условиями а), б) формы χ_8^{SS} и f_8^{HS} определяются однозначно, можно увидеть¹²⁾ уже на примере $p = 1, 2, 3$. В этих случаях $M_p = \mathcal{G}_p$ и из (6.12), (6.13) и (6.18) следует, что существует единственная форма веса 8. Она не является параболической и должна совпадать с f_8^{HS} . Из б) при этом следует, что

$$\chi_8^{SS} = 0 \quad (7.3)$$

Для формы f_8^{HS} существуют два представления

$$f_8^{HS} = \left[\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{m}} \theta_{\mathbf{m}}^8(\hat{\tau}) \right]^2 = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{m}} \theta_{\mathbf{m}}^{16}(\hat{\tau}), \quad (7.4)$$

где N — некоторый нормировочный множитель, а суммирование идет только по четным характеристикам. Представления (7.4) соответствуют группам $E_8 \otimes E_8$ и $SO(32)$, соответственно. Это можно показать следующим образом. После фермионизации [2, 34] вклад правых возбуждений в меру HS отличается от их вклада в меру бозонной струны на множитель

$$f_8^{HS, SO(32)} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{m}} [\det_{\mathbf{m}} \partial_{1/2} (\det \partial_0)^{1/2}]^{16} \quad (7.5)$$

¹²⁾ При $p = 1$ форма $F(y) dv$ является формой веса 14, что компенсируется лишней степенью $(\text{Im } \tau)^{-1}$ в (1.2), возникающей из-за интегрирования по нулевой моде поля духов $\varepsilon_0 = \text{const}$ в (4.1). Вес же χ_8^{SS} и f_8^{HS} остается по прежнему 8.

для группы $SO(32)$ и

$$f_8^{HS, E_8 \times E_8} = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{m}} [\det_{\mathbf{m}} \partial_{1/2} (\det \partial_0)^{1/2}]^8 \right\}^2 \quad (7.6)$$

для группы $E_8 \times E_8$. Характеристика $\mathbf{m} = (\mathbf{m}', \mathbf{m}'')$ у $\det_{\mathbf{m}} \partial_{1/2}$ параметризует граничные условия на фермионы при обходе вокруг цикла a_i ; фермионное поле приобретает множитель $(-1)^{\mathbf{m}'_i+1}$, а при обходе вокруг b_i множитель $(-1)^{\mathbf{m}''_i+1}$. Суммировать в обоих случаях (так же, как и в левом секторе) надо только по четным характеристикам. Произведение детерминантов в квадратных скобках в (7.5), (7.0) свободно от всех аномалий и для него имеет место формула¹³⁾

$$\det_{\mathbf{m}} \bar{\partial}_{1/2} (\det \bar{\partial}_0)^{1/2} = \theta_{\mathbf{m}}(\hat{\tau}), \quad (7.7)$$

справедливая для любого рода p . В случае нечетной характеристики у $\bar{\partial}_{1/2}$ появляется нулевая мода $\kappa_{\mathbf{m}}^{1/2}$, где $\kappa_{\mathbf{m}}$ определено в (6.27) (можно показать, что корень извлекается) и (7.7) обращается в нуль. Подставляя (7.7) в (7.5), (7.6), получаем (7.4), причем равенство

$$f_8^{HS, E_8 \otimes E_8} = f_8^{HS, SO(32)}, \quad (7.8)$$

справедливое для $p = 1, 2, 3$, является нетривиальным тождеством и следует из того, что при этих значениях p на \bar{M}_p имеется только одна форма веса 8.

Связь (7.4) с группами $E_8 \otimes E_8$ и $SO(32)$ возникает следующим образом. Рассмотрим некоторую решетку Λ в \mathbb{R}^n и свяжем с ней следующий тэта-ряд

$$\theta_a(\hat{\tau}) = \sum_{\mathbf{r}_\alpha \in \Lambda} \exp[\pi i (\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta) \tau_{\alpha\beta}], \quad (7.9)$$

где каждый из векторов \mathbf{r}_α , $\alpha = 1, \dots, p$ пробегает решетку Λ , а

$$\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_\alpha^i \mathbf{r}_\beta^i.$$

Ряд (7.9) сходится и определяет модулярную форму веса $n/2$ на \mathcal{G}_p тогда и только тогда, когда решетка Λ является четной и самодуальной, т.е. матрица $g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ скалярных произведений — образующих векторов \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, n$ решетки является положительно определенной целочисленной симметрической матрицей с четной главной диагональю и $\det g_{ij} = 1$. Такие решетки имеются только при $n = 8k$, $k \in \mathbb{Z}$ и для веса $n/2 = 8$ имеется ровно две таких решетки $\Gamma_8 \otimes \Gamma_8$ и Γ_{16} [35], Γ_8 является решеткой весов группы E_8 , а Γ_{16} получается

¹³⁾ Доказательство вместе с формулами для корреляции функций фермионов будет опубликовано.

объединением решетки весов $SO(32)$ и ее же, сдвинутой на какой-либо спинорный вес. Нетрудно показать, что для любого p имеют место тождества

$$f_8^{\text{HS}, E_8 \otimes E_8} = \left[\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{m}} \theta_{\mathbf{m}}^8(\hat{\tau}) \right]^2 = \theta_{\Gamma_8 \otimes \Gamma_8}(\hat{\tau}) = [\theta_{\Gamma_8}(\hat{\tau})]^2, \quad (7.10)$$

$$f_8^{\text{HS}, SO(32)} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{m}} \theta_{\mathbf{m}}^{16}(\hat{\tau}) = \theta_{\Gamma_{16}}(\hat{\tau}), \quad (7.11)$$

которые выражают эквивалентность форминного и бозонного представлений сектора правых возбуждений гетеротической струны.

Перейдем теперь к $p > 3$. Для этого случая пространство модулярных форм изучено явно недостаточно. Кроме того, имеется дополнительное осложнение, связанное с тем, что \mathcal{G}_p при $p > 3$ уже не совпадает с \overline{M}_p и пространства модулярных форм на \mathcal{G}_p и \overline{M}_p вообще говоря, различны. Тем не менее нам кажутся справедливыми следующие предположения.

Гипотеза 2. Для $p \geq 4$ имеется ровно две формы веса 8 на \mathcal{G}_p : $\theta_{\Gamma_8 \otimes \Gamma_8}$ и $\theta_{\Gamma_{16}}$.

Гипотеза 3. Для любого p формы $\theta_{\Gamma_8 \otimes \Gamma_8}$ и $\theta_{\Gamma_{16}}$ совпадают на \overline{M}_p и других модулярных форм веса 8 на \overline{M}_p не существует.

Поскольку ни $\theta_{\Gamma_8 \otimes \Gamma_8}$, ни $\theta_{\Gamma_{16}}$ не являются параболическими формами, то из гипотезы 3 следует (7.3) для любого p , т.е. вакуумные диаграммы в теории замкнутых ориентируемых суперструн и гетеротических струн обращаются в нуль в любом порядке.

Другим следствием гипотез 3, 2 является условие пропорциональности

$$\theta_{\Gamma_8 \otimes \Gamma_8} - \theta_{\Gamma_{16}} = \text{const} \cdot J_8, \quad (7.12)$$

для $p = 4$. Здесь J_8 — параболическая форма Шоттки, упоминавшаяся в разделе 6. Левая часть (7.12) не обращается тождественно в нуль на \mathcal{G}_4 [31], как было в случае $p \leq 3$, а является параболической формой. Отметим также, что справедливость гипотезы 2 для $p \geq 17$ следует из теоремы 1.3 работы Фрейтага [36], утверждающей, что каждая модулярная форма веса k на \mathcal{G}_p при $p > 2k$ является линейной комбинацией тэта-рядов (7.9) с четными, самодуальными¹⁴⁾ Λ . Мы надеемся, что гипотезы 1–3 вскоре будут доказаны.

В заключение этого раздела нам хотелось бы сделать следующее замечание, касающееся однопетлевых вычислений в SS и HS. При ковариантном подходе [5] к модели форминной струны, два из десяти фермионов ψ^μ : ψ^0 и ψ^9 сокращаются фермионными духа-

¹⁴⁾ Авторы признательны А.И. Андрианову, сообщившему им эту теорему.

ми. Можно показать, что суммирование по непериодическим граничным условиям (наложенным на правые и левые ψ^μ независимо) вкладов от восьми оставшихся фермионов ψ^i , $i = 1, \dots, 8$ эквивалентно переходу к фермионам S^A в неприводимом спинорном представлении $SO(8)$, но с периодическими граничными условиями. При этом операторы $\psi_L^i \psi_L^j (\psi_R^i \psi_R^j)$ в вершинных операторах заменяются на $S_L^A S_L^B \sigma_{AB}^{ij} (L \leftrightarrow R)$, где L, R обозначают двумерную киральность. У фермиона $S_L^A (S_R^A)$ на торе с периодическими граничными условиями имеется 8 нулевых мод и континуальный интеграл по $S_L^A (S_R^A)$ обращается в ноль, если суммарное число операторов $S_L^A (S_R^A)$ в вершинах меньше 8 (т.е. число гравитонов $N < 4$). Именно это обстоятельство и выражают тождества следов в [1]. При $N = 4$ однопетлевая поправка конечна [1].

Это вместе с приведенными выше доводами о занулении всех вакуумных петель заставляет верить в гипотезу [1] о конечности теории суперструн.

Мы хотели бы выразить нашу глубокую признательность Л. Бейлинсону и В. Дринфельду за многократные обсуждения различных математических вопросов, связанных с этой работой и за уточнение нашей рабочей гипотезы о голоморфности меры, стимулировавшее изучение ее особенностей. Точная математическая формулировка (разд. 5) утверждения, доказанного в работе, также принадлежит им.

Мы также благодарны А. Замолодчикову, О. Огневецкому, А. Полякову, Б. Фейгину и В. Шехтману за стимулирующие обсуждения.

Литература

1. Schwarz J.H., Phys. Reports, 1982, 89, 223. Green M.B., Surveys in High Energy Physics, 1983, 3, 127. Brink L., CERN Preprint, 1984.
2. , Gross D.J. Harvey J., Martinec E., Rohm R., Phys. Rev. Lett., 1985, 52, 502; Princeton Preprints, 1985.
3. Green M.B., Schwarz J.H., Phys. Lett., 1984, 149B, 117; 1985, 151B, 21. Candelas P., Horowitz G., Strominger A., Witten E., Nucl. Phys., 1985, B258, 46. Witten E., Nucl. Phys., 1985, B258, 75.
4. Belavin A., Polyakov A., Zamolodchikov A., Nucl. Phys., 1984, B241, 333. Friedan D., Qui Z., Shenker S., Phys. Rev. Lett., 1984, 52, 1575. Knizhnik V., Zamolodchikov A., Nucl. Phys., 1984, B247, 83. Замолодчиков А., Фатеев В., ЖЭТФ, 1985, 89, 38; Nucl. Phys., 1986, in press.
5. Polyakov A.M. Phys. Lett., 1981, 103B, 207, 211.
6. Bers L., Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 1981, 5, 131.
7. Mumford D., Math. L'Ens., 1977, 23, 39.
8. Shapiro J.A., Phys. Rev., 1972, D5, 1945.

9. *Deligne P., Mumford D.*, Publ. IHES, 1969, **36**, 1.
10. *Белавин А., Книжник В., Морозов А., Переломов А.*, Письма в ЖЭТФ, 1986, **43**, 319.
11. *Faltings G.*, Ann. Math., 1984, **119**, 387.
12. *Belavin A., Knizhnik V.M.*, Препринт ИТФ им. Л.Д. Ландау АН СССР, 1985.
13. *Манин Ю.И.*, ФАН, 1986, в печати; Phys. Lett. B, 1986, in press.
14. *Wolpert S.A.*, Bull Amer. Math. Soc. (N.S.), 1984, **11**, 189.
15. *Mandelstam S.*, UCB-PTH-85/47 preprint, oct. 85. *Restuccia A., Taylor J.G.*, Phys. Lett., 1985, **162B**, 109. *Gilbert G.*, Univ. of Texas, preprint, UTTG-23-85, 1985. *Namazie M.A., Rajeev S.*, Preprint CERN-TH 4327/85. *D'Hoker E., Phong D.H.*, Columbia Univ. preprint CU-TP-323, 1985. *Баранов М.А., Шварц А.С.*, Письма в ЖЭТФ, 1985, **42**, 340. *Gava E., Iengo R., Jayaraman T., Ramachandran R.* Trieste, preprint 90/85/E.P.
16. *Ray D.R., Singer I.M.*, Ann. Math., 1973, **98**, 154.
17. *Lovelace C.*, Phys. Lett., 1970, **32B**, 703; 1971, **34B**, 500. *Alessandrini V.*, Nuovo Cim., 1971, **2A**, 321. *Alessandrini V., Amati D.*, Nuovo Cim., 1971, **4A**, 793. *Kaku M., Yu L.P.*, Phys. Lett. 1970, **38B**, 166; Phys. Rev., 1971, **D3**, 2992, 3007, 3020. *Kaku M., Sherk J.*, Phys. Rev., 1971, **D3**, 430, 2000.
18. *Alvarez O.*, Preprint UCB-PTH-85/39; LBL-20251.
19. *Friedan D.*, In Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics (Les Houches, Summer 1982), *Suber J.-B. and Stora R.* eds; North-Holland, 1984.
20. *Alvarez O.*, Nucl. Phys., 1983, **B216**, 125.
21. *Мамфорд Д.*, Сб. Математика, 12, вып. 6, 1968, 67.
22. *Shapiro J.A.*, Phys. Lett., 1970, **33B**, 361; *Virasoro M.A.*, Phys. Rev., 1969, **177**, 2309.
23. *Квиллен Д.*, ФАН, 1985, **19**, 37.
24. *Alvarez-Gaume L., Witten E.*, Nucl. Phys., 1984, **B234**, 269.
25. *Манин Ю.И.*, ФАН, 1985, **20**.
26. *Serre J.P.*, Geometrie Algebrique et Geometrie Analitique, Ann. of the Inst. Fourier, v. 6.
27. *Кра И.*, Автоморфные формы и клейновы группы. М.: Мир, 1975.
28. *Siegel C.L.*, Amer. J. Math., 1943, **65**, 1.
29. *Igusa J.I.*, Amer. J. Math., 1962, **84**, 175; 1964, **86**, 392.
30. *Igusa J.I.*, Amer. J. Math., 1984, **86**, 219.
31. *Igusa J.I.*, Amer. J. Math., 1967, **89**, 817.
32. *Schottky F.J.*, Reine Angen. Math., 1888, **102**, 304.
33. *Igusa J.I.*, J. Fac. Science Tokyo, 1981, **28**, 531.
34. *Goddard P., Olive D.I., Schwimmer A.*, Phys. Lett., 1985, **157B**, (1985) 393.
35. *Серп Ж.П.*, Курс арифметики. М.: Мир, 1972.
36. *Freitag E.*, Math. Z. 1977, **156**, 141.

КВАНТОВАЯ ГРАВИТАЦИЯ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Поляков А.М.

Mod. Phys. Lett. A. 2 (1987). P. 893–898

Анализируется двумерная индуцированная квантовая гравитация. Используя калибровку светового конуса мы определяем гравитационный аналог действия Весса–Зумино и обнаруживаем поразительную связь с $SL(2, R)$ алгеброй токов. Последнее позволяет нам найти дифференциальные уравнения на корреляционные функции.

В этом письме я опишу точное решение проблемы двумерной гравитации. Оно возникает как побочный продукт при работе в теории струн. Я думаю, что этот предмет интересен по двум причинам. Во-первых он неизбежно возникает в теории струн, а во-вторых, является теоретической лабораторией в реалистичной космологии и гравитации.

Далее мы сможем найти набор фрактальных размерностей определяющих структуру гравитационных флуктуаций на малых расстояниях, и определить дифференциальное уравнение для соответствующих корреляционных функций. При получении этих результатов будет существенно использована неожиданная связь с $SL(2, R)$ алгеброй токов.

Гравитационное действие которое мы собираемся обсуждать имеет вид

$$S = \frac{d}{96\pi} \int_M \left(R \frac{1}{\Delta} R \right), \quad (17)$$

где d^{-1} будет играть роль константы связи, Δ — лапласиан в метрике g_{ab} , R — скалярная кривизна и M — рассматриваемое многообразие. Это действие естественно индуцируется безмассовыми частицами и появляется в функциональном интеграле в теории струн [1].

Наиболее простой вид эта формула имеет в конформной калибровке $g_{ab} = e^\phi \delta_{ab}$, где она становится действием свободного поля. К сожалению это упрощение иллюзия. Мы должны ввести такое обрезание при квантовании этой теории, чтобы оно было совместимо с общей ковариантностью. Вообще, не ясно как это сделать. Поэтому мы используем другой метод. А именно мы попытаемся квантовать

теорию в калибровке светового конуса, определенной как

$$ds^2 = dx^+ dx^- + h_{++}(x^+, x^-)(dx^+)^2 \quad (18)$$

Чтобы найти действие и уравнения движения в этой калибровке, мы (вместо того чтобы подставлять (18) в (17)) используем следующее общее соотношение

$$\delta S = \int_M T_{--} \delta h_{++},$$

$$\nabla_+ T_{--} \equiv \partial_+ T_{--} - h_{++} \partial_- T_{--} - 2(\partial_- h_{++}) T_{--} = \frac{d}{24\pi} \partial_- R, \quad (19)$$

$$R = \partial_-^2 h_{++}.$$

Здесь мы использовали уравнение для аномалии следа (из которой (17) было определено). Из этого уравнения легко найти $S(h_{++})$ пертурбативно по h_{++} . Более того точное выражение для $S(h_{++})$ тоже может быть получено.

Очень полезно для этой и других целей увидеть аналогию между (19) и соответствующими соотношениями в двумерных калибровочных теориях описанных в [2]. А именно, в [2] мы ввели киральное поле g вместо векторного потенциала и получили действие Весса–Зумино–Новикова–Виттена (WZNW) как выражение для детерминанта оператора Дирака. Здесь мы определим гравитационный аналог

WZNW.

Вместо h_{++} мы введем поле f

$$\partial_+ f = h_{++} \partial_- f \quad (20)$$

(сравните с соотношением $\partial_+ = A_+ g$ из [2]).

Нам не нужно явное выражение для $S[f]$, но для полноты приведем его здесь без вывода (который аналогичен данному в [2])

$$S[f] = \frac{d}{24\pi} \int d^2 x \left[\frac{\partial_-^2 f \partial_+ \partial_- f}{(\partial_- f)^2} - \frac{(\partial_-^2 f)(\partial_+ f)}{(\partial_- f)^3} \right]. \quad (21)$$

Что нам нужно определить это тождества Уорда которые определяют корреляционные функции в теории. Для этого мы используем уравнения движения которые следуют из (21), но более просто их можно получить непосредственно из выражения для аномалии

$$\nabla_+ T_{--} = -\frac{c}{24\pi} \partial_-^3 h_{++} = 0, \quad (22)$$

$$c = 26 - d.$$

(Сравните с обычным WZNW уравнением $\partial_- A_+ = 0$.)

Мы докажем его используя конформную вариацию h_{++} :

$$\delta f = \epsilon_+ \partial_- f, \quad (23)$$

$$\delta h_{++} = \nabla_+ \epsilon_+ \equiv (\partial_+ - h_{++} \partial_-) \epsilon_+ + (\partial_- h_{++}) \epsilon_+.$$

Мы подставили дополнительное слагаемое 26 в (22) и затем изменили переменную h_{++} на f , что необходимо для вывода тождеств Уорда. Возникающий якобиан есть детерминант оператора в правой части (23) и в точности совпадает с духовым детерминантом рассмотренным в [1]. Отсюда мы находим тождества Уорда

$$\begin{aligned} \frac{c}{24i\pi} \partial_-^3 \langle h_{++}(z) h_{++}(x_1) \dots h_{++}(x_N) \rangle = \\ = \sum_{j=1}^N \partial_+ \delta(z - x_j) \langle h_{++}(x_1) \dots \widehat{h_{++}(x_j)} \dots h_{++}(x_N) \rangle + \\ + \sum_{j=1}^N \left[\delta(z - x_j) \frac{\partial}{\partial x_j^-} - \partial_- \delta(z - x_j) \right] \langle h_{++}(x_1) \dots h_{++}(x_N) \rangle, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\widehat{}$ означает, что соответствующий член пропущен. Мы можем легко проинтегрировать это соотношение используя

$$\frac{1}{4\pi i} \partial_-^3 \frac{(z^-)^2}{z^+} = \delta^{(2)}(z) \quad (25)$$

После удобного переобозначения $h_{++} \rightarrow (c/6)h_{++}$ мы получаем

$$\begin{aligned} \langle h_{++}(z) h_{++}(x_1) \dots h_{++}(x_N) \rangle = \\ = \frac{-c}{6} \sum_j \frac{(z^- - x_j^-)^2}{(z^+ - x_j^+)^2} \langle h_{++}(x_1) \dots \widehat{h_{++}(x_j)} \dots h_{++}(x_N) \rangle + \\ + \sum_j \left[\frac{(z^- - x_j^-)^2}{z^+ - x_j^+} \frac{\partial}{\partial x_j^-} + 2 \frac{z^- - x_j^-}{z^+ - x_j^+} \right] \langle h_{++}(x_1) \dots h_{++}(x_N) \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Эта формула определяет корреляционные формулы любого числа h_{++} рекурсивно.

Перед тем как ее анализировать приведем также соотношение для произвольного поля ϕ с трансформационными свойствами относительно изменения координаты x^-

$$\delta \phi = \epsilon_+ \partial_- \phi + \lambda (\partial_- \epsilon_+) \phi. \quad (27)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \langle h_{++}(z) \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \rangle = \\ = \sum_j \left[\frac{(z^- - x_j^-)^2}{z^+ - x_j^+} \frac{\partial}{\partial x_j^-} + 2\lambda \frac{z^- - x_j^-}{z^+ - x_j^+} \right] \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

Истинное значение этих соотношений становится очевидным, если представить

$$h_{++}(z) = j^{(1)} - 2j^{(0)}z^- + j^{(-1)}(z^-)^2. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (28) находим

$$\langle j^a(z)\phi(x_1)\dots\phi(x_N)\rangle = \sum_j \frac{l_j^a}{z^+ - x_j^+} \langle \phi(x_1)\dots\phi(x_N)\rangle, \quad (30)$$

где

$$l_j^{(-1)} = \frac{\partial}{\partial x_j^-}; \quad (31)$$

$$l_j^{(0)} = x_j^- \frac{\partial}{\partial x_j^-} + \lambda; \quad (32)$$

$$l_j^{(1)} = (x_j^-)^2 \frac{\partial}{\partial x_j^-} + 2\lambda x_j^-.$$

Мы видим, что $l_j^{(a)}$ генераторы $SL(2, R)$ и $j^{(a)}$ соответствующий ток. Мы получили обычную алгебру токов для группы $SL(2, R)$. Эта интерпретация еще больше подтверждается использованием (26)

$$\begin{aligned} \langle j^a(z)j^{b_1}(x_1)\dots j^{b_N}(x_N)\rangle = \\ = -\frac{K}{2} \sum_j \frac{\eta^{ab_j}}{(z^+ - x_j^+)} \langle j^{b_1}(x_1)\dots \widehat{j^{b_j}(x_j)}\dots \rangle + \\ + \sum_j e^{ab_ic'_j} \frac{\eta_{c_ic'_j}}{z^+ - x_j^+} \langle \dots j^{c_j}(x_j)\dots \rangle, \end{aligned} \quad (33)$$

где η_{ab} метрический тензор Киллинга для $SL(2, R)$

$$\eta_{+-} = \frac{1}{2}; \quad \eta_{00} = -1; \quad K = \frac{c}{6}.$$

Это в точности совпадает с тождествами Уорда для токов, которые были подробно исследованы Фатеевым и Замолотчиковым [3]. Единственное отличие от их случая заключается в том, что здесь λ не отрицательное целое число (что соответствует конечномерному представлению $SU(2)$).

Теперь мы определим дифференциальные уравнения на корреляционные функции, полностью следуя логике статей [3, 4, 5]. Основная идея состоит в том, чтобы посмотреть на квантовое обобщение классических уравнений движения

$$K\partial_+ f = h_{++}\partial_- f; \quad \partial_-^3 h_{++} = 0, \quad (34)$$

которые выражают тот факт, что относительно калибровочных преобразований функция преобразуется как

$$\delta f = \epsilon_+ \partial_- f. \quad (35)$$

Мы теперь сделаем предположение, касающееся квантового аналога этой формулы. Мы постулируем, что правильное уравнение движения имеет вид

$$k \partial_+ f = :h_{++} \partial_- f: \quad (\text{где } k \text{ неизвестная постоянная}). \quad (36)$$

Предположение в (36) заключается в том что, несмотря на ренормализационные эффекты, трансформационные свойства не меняются. То есть мы имеем

$$k \partial_+ f = :h_{++} \partial_- f: + \lambda :(\partial_- h_{++}) f: \quad (37)$$

Покажем теперь, что согласованность с алгеброй токов определяет эти неизвестные константы. Для этого мы заметим, что можно подставить

$$:h_{++} \partial_- f: + \lambda :(\partial_- h_{++}) f: = \eta_{ab} :j^a(z) l^b(z):, \quad (38)$$

где l^a — дифференциальные операторы (31). Используя (30) получаем

$$k \frac{\partial}{\partial x_j^+} \langle f(x_1) \dots f(x_N) \rangle = \sum_{k \neq i} \frac{\eta_{ab} l_i^a l_k^b}{x_i^+ - x_k^+} \langle f(x_1) \dots f(x_N) \rangle. \quad (39)$$

Это напоминает дифференциальное уравнение полученное в случае алгебры токов в [3, 4]. В этой статье было доказано, что согласование с тождествами Уорда приводит к тому, что $k = -(K + 2)$ и размерности по отношению к x равны $\Delta_+ = \lambda(1 - \lambda)/(K + 2)$. Однако, в нашем случае ситуация более тонкая и пока не вполне ясная. А именно, все поля описываются размерностями Δ_+, Δ_- (по отношению к конформным преобразованиям x^+, x^-) и также их трансформационными свойствами относительно диффеоморфизмов, которые определяются весом λ . Вообще $\lambda \neq \Delta_-$. Это означает, что вакуум не является проективно инвариантным. Это вполне новая ситуация, в которой анализ уравнения (39) должен быть проведен заново. Теория возмущений подсказывает, что возможно λ не перенормируется и к тому же конформный спин $j = \Delta_+ - \Delta_-$ не изменяется. Если это так, тогда уравнения определяют все размерности. Однако этот вопрос требует дальнейшего изучения.

Несколько слов должно быть добавлено по поводу унитарности теории. Так как мы имеем времениподобные гравитоны, корреляторы вне массовой поверхности могут содержать состояния с отрицательной нормой. Такие состояния должны исчезнуть из физических величин. Как это практически происходит очень интересный вопрос.

Существует много важных приложений наших результатов. Они включают спектр масс некритических струн и критические экспо-

ненты в 3D модели Изинга (в последнем случае мы должны суперсимметризовать наши формулы). Однако, прежде чем эти приложения станут доступными, требуются более глубокое исследование данной теории.

Литература

1. *Polyakov A.M.*, Quantum Geometry Of Bosonic Strings, Phys. Lett. B. **103**, 207 (1981).
2. *Polyakov A.M.* and *Wiegmann P.B.*, Theory Of Nonabelian Goldstone Bosons In Two Dimensions, Phys. Lett. B. **131**, 121 (1983).
3. *Замолодчиков А.Б.* и *Фатеев В.А.*, Operator Algebra And Correlation Functions In The Two-Dimensional Wess-Zumino $SU(2) \times SU(2)$ Chiral Model, Sov. J. Nucl. Phys. **43**, 657 (1986); Яд. физ. **43**, 1031 (1986).
4. *Knizhnik V.G.* and *Zamolodchikov A.B.*, Current Algebra And Wess-Zumino Model In Two Dimensions, Nucl. Phys. B. **247**, 83 (1984).
5. *Belavin A.A.*, *Polyakov A.M.* and *Zamolodchikov A.B.*, Infinite Conformal Symmetry In Two-Dimensional Quantum Field Theory, Nucl. Phys. B. **241**, 333 (1984).

ФРАКТАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ ДВУМЕРНОЙ КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ

Замолодчиков А.Б., Книжник В.Г., Поляков А.М.

Modern Physics Letters A. V. 3, № 8 (1988). P. 819–826

Мы решаем задачи перенормировки, сформулированные в работе [1]. В результате найдены точные формулы для спектра аномальных размерностей в двумерной квантовой гравитации. Сравнение с комбинаторным подходом к изучению случайных поверхностей и с численными результатами показывает полное совпадение со всеми известными фактами.

В этом письме представлено дальнейшее исследование теории, развитой одним из авторов этой статьи [1]. Здесь мы разрешаем некоторые трудности, связанные с перенормировками, указанные в работе [1], и находим точные формулы для спектра аномальных размерностей полей на фоне флуктуирующей внутренней геометрии.

Наши результаты сравниваются с комбинаторной аппроксимацией случайных поверхностей, их численным анализом, а также с точными результатами, полученными в частных случаях [2, 3]. Мы обнаружили полное согласие со всеми известными фактами. Наиболее удобным объектом для нашего исследования является теория, описывающая некоторое число майорановских фермионов, взаимодействующих с двумерной гравитацией. Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \bar{\phi} v^{\alpha a} \gamma^a \partial_{\alpha} \phi, \quad (1)$$

где $v_{\alpha a}$ — обычные диады. Этот лагранжиан легко переписать как

$$\mathcal{L} = \psi_{-} (\partial_{+} - h_{++} \partial_{-}) \psi_{-} + \psi_{+} (\partial_{-} - h_{--} \partial_{+}) \psi_{+}, \quad (2)$$

при помощи обозначений

$$\begin{aligned} \psi_{-} &= v_{-+}^{1/2} \phi_{-}, & \psi_{+} &= v_{+-}^{1/2} \phi_{+}, \\ h_{++} &= \frac{v_{++}}{v_{-+}}, & h_{--} &= \frac{v_{--}}{v_{+-}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Замечательное свойство лагранжиана (2) состоит в двойной “киральной” общей инвариантности, а именно, на классическом уровне этот лагранжиан инвариантен относительно независимых диффеоморфизмов полей ψ_{+} и ψ_{-} . На квантовом уровне выживают лишь согласованные диффеоморфизмы этих полей.

Чтобы работать с гравитационным полем, мы фиксируем калибровку киральным условием $h_{--} = 0$. После этого можно выполнить

интегрирование по фермионам, в результате чего получается гравитационный аналог действия Весса–Зумино–Новиова–Виттена (ВЗНВ), рассмотренного в работе [1]:

$$S(h_{++}) \propto \log \text{Det}(\partial_+ - h_{++} \partial_-). \quad (4)$$

Замечательным свойством этого действия, указанным в [1], было существование $SL(2, R)$ -алгебры токов, порожденной полем h_{++} . Эта алгебра токов приводит к дифференциальным уравнениям, определяющим корреляционные функции теории. Эти дифференциальные уравнения содержат постоянные параметры, которые, вообще говоря, подвержены конечной перенормировке. Проблема вычисления этих эффектов не была решена в работе [1]. В настоящей работе мы завершаем решение этой задачи.

Для этого мы используем некоторые тождества, являющиеся следствиями общей ковариантности изучаемой теории. Эта ковариантность не нарушается при квантовании в используемой здесь калибровке. Действительно, к действию можно добавить регулятор вида

$$S_{\text{reg}} = \Lambda^{-2} \int R^2 \sqrt{g} = \Lambda^{-2} \int (\partial_-^2 h_{++})^2 d^2x \quad (5)$$

(здесь R — скалярная кривизна, Λ — параметр обрезания). Это слагаемое преобразует пропагатор поля h , но сохраняет вершины и делает теорию конечной. В обычной конформной калибровке это свойство отсутствует.

Тождества, которые мы имеем в виду, являются ничем иным как требованием обращения в нуль полного тензора энергии-импульса. Хотя эти требования сами по себе очевидны, их очень непросто применить в теории с фиксированной калибровкой. Мы получим наши формулы путем перехода от калибровки

$$h_{--} = 0 \quad \text{и} \quad h_{+-} \equiv v_{+-} v_{-+} = 1$$

к калибровке

$$h_{--} = h_{--}(x), \quad h_{+-} = h_{+-}(x), \quad (6)$$

где в правой части уравнения (6) мы имеем фиксированные функции $h_{--}(x)$ и $h_{+-}(x)$. Поскольку статистическая сумма Z , а также любая калибровочно-инвариантная величина должна быть независимой от функций $h_{--}(x)$ и $h_{+-}(x)$, то имеют место следующие условия:

$$\left. \frac{\delta Z}{\delta h_{--}(x)} \right|_{h_{--}=0} = \left. \frac{\delta Z}{\delta h_{+-}(x)} \right|_{h_{+-}=0} = 0. \quad (7)$$

Эти вариации являются в точности компонентами полного тензора энергии-импульса, который, как мы вскоре увидим, включает духи и вклад от поляризации вакуума.

Калибровочное условие (6) требует добавления к лагранжиану духовых полей:

$$\mathcal{L}_1 = \psi_- (\partial_+ - h_{++} \partial_-) \psi_- + \psi_+ (\partial_- - h_{--} \partial_+) \psi_+ + \eta_{++} \nabla_- \varepsilon_- + \zeta (\nabla_+ \varepsilon_- + \nabla_- \varepsilon_+). \quad (8)$$

Мы ввели пару духов $(\varepsilon_+, \varepsilon_-)$ и антидухов (η_{++}, ζ) . Операторы ∇_{\pm} являются ковариантными производными. Еще раз напомним, что в то время как h_{++} является квантовой переменной, h_{--} и h_{+-} — некоторые фиксированные функции.

Имеется еще один член, который необходимо добавить к лагранжиану. Это — некий локальный функционал от полей

$$(h_{++}, h_{--}, h_{+-}),$$

гарантирующий общую ковариантность. Происхождение этого функционала, смешивающего левые и правые компоненты поля h , связано с вкладом бесконечно массивного регуляторного поля Паули–Вилларса. Его явный вид Λ определяется тем условием, что эффективное действие

$$\tilde{S}(h_{++}, h_{--}, h_{+-}) = S(h_{++}) + S(h_{--}) + \Lambda(h_{++}, h_{--}, h_{+-}) \quad (9)$$

(здесь $S(h)$ задается согласно (4)) инвариантно относительно диффеоморфизмов. Согласно (7), для наших целей необходим лишь член, линейный относительно полей h_{--} , h_{+-} :

$$\Lambda \approx \int d^2x (h_{--} T_{++}(h_{++}) + h_{+-} \theta(h_{++})). \quad (10)$$

Найдем введенные в (10) поля T_{++} и θ .

Нетрудно проверить, что из инвариантности относительно преобразований:

$$\begin{aligned} \delta h_{++} &= 2 \nabla_+ \varepsilon_+, \\ \delta h_{+-} &= \nabla_+ \varepsilon_- + \nabla_- \varepsilon_+, \\ \delta h_{--} &= 2 \nabla_- \varepsilon_- \end{aligned} \quad (11)$$

вытекает (когда h_{--} и $h_{+-} \rightarrow 0$), что

$$\begin{aligned} T_{++} &\propto \frac{1}{2} [(\partial h_{++})^2 - 2 h_{++} \partial_-^2 h_{++}] + \partial_+ \partial_- h_{++}, \\ \theta &\propto \partial_-^2 h_{++}. \end{aligned} \quad (12)$$

Обе величины имеют ясный геометрический смысл, который мы обсудим ниже. Теперь наложим условие (7). При помощи (8) и (12) мы получаем

$$\begin{aligned} T_{++}^{\text{tot}} &\equiv \psi_+ \partial_+ \psi_+ + \eta_{++} \partial_+ \varepsilon_- + \zeta \partial_+ \varepsilon_+ + T_{++}(h) = 0, \\ \theta(h) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из этого условия вытекает соотношение для центральных зарядов, которое является наиболее важной составляющей наших результатов. Имеем

$$\begin{aligned} C(\psi) &\equiv C^{\text{Matt}} \equiv d, \\ C(\eta_{++}, \varepsilon_-) &= -26, \\ C(\zeta, \varepsilon_+) &= -2 \end{aligned} \quad (14)$$

и, таким образом,

$$C^{\text{tot}} = d - 28 + C(h) = 0. \quad (15)$$

Теперь мы должны определить центральный заряд поля T_{++} . Для этого разложим поле h_{++} так же, как это было сделано в [1]

$$h_{++} = J^{(+)} - 2 J^{(0)} x^- + J^{(-)} (x^-)^2. \quad (16)$$

Главный результат [1] состоял в том, что токи $J^{(a)}$ порождают $SL(2, R)$ -алгебру токов. С этой алгеброй очевидным образом связан тензор энергии-импульса Сугавары

$$T_{++}^{(\text{Sug})} = \frac{1}{l+2} \eta_{ab} J_+^a J_+^b = \frac{1}{l+2} \frac{1}{2} [(\partial_- h_{++})^2 - 2h_{++} \partial_-^2 h_{++}] \quad (17)$$

(здесь l — центральный заряд $SL(2)$ -алгебры токов и η_{ab} — $SL(2)$ -метрический тензор).

Теперь при помощи (12) и (13) мы можем выразить T_{++} через токи:

$$T_{++} = \frac{1}{l+2} \eta_{ab} J_+^a J_+^b + \partial_+ J^0. \quad (18)$$

Этот тензор энергии-импульса, рассмотренный по другому поводу А.А. Белавиным [4], имеет центральный заряд

$$C(h) = \frac{3l}{l+2} - 6l \quad (19)$$

(слагаемое $-6l$ возникает из последнего члена в (18)).

Прежде чем получить следствия из (19), объясним геометрический смысл поля T_{++} . Для этого заметим, что калибровочное условие, рассмотренное в [1]

$$ds^2 = dx^+ dx^- + h_{++} (dx^+)^2 \quad (20)$$

имеет остаточную инвариантность, сохраняющую вид метрики, но изменяющую поле h_{++} :

$$\begin{aligned} \tilde{x}^+ &= a(x^+), \\ \tilde{x}^- &= \frac{x^-}{\dot{a}(x^+)} + b(x^+). \end{aligned} \quad (21)$$

При этом преобразовании

$$\bar{h}_{++}(x^+, x^-) = \left[h_{++} \left(a(x^+), \frac{x^-}{\dot{a}} + b \right) \right] \dot{a}^2(x^+) + \dot{a}(x^+) \dot{b}(x^+) - \frac{\ddot{a} x^-}{a}. \quad (22)$$

Если мы рассмотрим бесконечно малые преобразования:

$$\begin{aligned} a(x^+) &= x^+ + \varepsilon(x^+), \\ b(x^+) &= \eta(x^+) \end{aligned} \quad (23)$$

и переведем (22) на язык токов, то получим

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon J^{(+)} &= \varepsilon \partial_+ J^{(+)} + 2(\partial_+ \varepsilon) J^{(+)}, \\ \delta_\varepsilon J^{(0)} &= \varepsilon \partial_+ J^{(0)} + (\partial_+ \varepsilon) J^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_+^2 \varepsilon, \\ \delta_\varepsilon J^{(-)} &= \varepsilon \partial_+ J^{(-)}, \\ \delta_\eta J^{(+)} &= \eta J^{(0)} + \frac{1}{2} \partial_+ \eta, \\ \delta_\eta J^{(0)} &= \eta J^{(-)}, \\ \delta_\eta J^{(-)} &= 0. \end{aligned}$$

Из этих формул мы делаем заключение, что ε -преобразование порождается полем T_{++} , в то время как η -преобразование порождается $\theta = \partial_-^2 h_{++}$. Это делает ясным условие (13), которое, как мы теперь видим, является в точности условием инвариантности физических состояний относительно остаточной калибровочной группы (21).

Вернемся к соотношению центральных зарядов (15). Имеем:

$$d - 28 + \frac{3l}{l+2} - 6l = 0. \quad (24)$$

Если ввести “зеркальную” величину $l = -k - 4$, то ее можно выразить через центральный заряд материи

$$d - 13 = -6(k + 2) - \frac{6}{k + 2}. \quad (25)$$

В работе [1] число k определялось как коэффициент при гравитационном действии Весса–Зумино и было равно $k_0 = (26 - d)/6$. Теперь мы видим, что вследствие эффектов перенормировки, возникающих из-за гравитационного взаимодействия, физическое значение параметра k , определенного как центральный заряд алгебры токов, задается согласно (25). Такая перенормировка отсутствовала в случае обычной модели Весса–Зумино. Конечно, в пределе слабой связи $d \rightarrow \infty$ оба определения совпадают.

Заметим, что аргументы, приведенные выше при выводе равенства (25), не зависят от конкретного вида лагранжиана материи (1).

Ясно, что симметрия токов $SL(2, \tau)$ и уравнение (25), определяющее ее центральный заряд l , сохраняют свою силу в общем случае гравитации, индуцированной безмассовой материей с центральным зарядом Вирасоро d .

В работе [1] было показано, что имеет место уравнение

$$\Delta - \Delta^{(0)} = \frac{\Delta(1 - \Delta)}{k + 2},$$

определяющее $SL(2, R)$ вес $\lambda = -\Delta$ любого примарного бесспинового поля ϕ_λ , взаимодействующего с индуцированной гравитацией. Здесь $\Delta^{(0)}$ — конформная размерность этого поля до включения гравитации. Заметим, что величина Δ является масштабной размерностью поля ϕ_λ при наличии гравитации. Простейший путь увидеть это состоит в проведении вейлевского преобразования метрики (20): $ds^2 \Rightarrow \rho ds^2$ с постоянным множителем ρ (который является изменением физического масштаба). Масштабно преобразованная метрика ρds^2 может быть приведена к прежнему виду калибровки (20) путем преобразования координат вида $x^- \Rightarrow \rho^{-1} x^-$, порожденного, как легко видеть, оператором

$$J_0^{(0)} = \oint \frac{dx^+}{2\pi i} J^{(0)}(x^+).$$

Соотношения (25) и (26) позволяют вычислить критические показатели для безмассовой теории поля, взаимодействующей с индуцированной гравитацией в режиме “слабой гравитации” для $d \leq 1$ или $d \geq 25$. В этой области квадратное уравнение (25) имеет вещественные решения для k ; мы выберем решение

$$k + 2 = \frac{13 - d - \sqrt{(1 - d)(25 - d)}}{12}, \quad (27)$$

(с положительным значением квадратного корня) лишь которое совместно с полуклассическим соотношением $k \sim -d/6$.

В качестве примера рассмотрим модель Изинга ($d = \frac{1}{2}$) в флуктуирующей метрике. Модель Изинга на неупорядоченной плоской решетке была решена в работе [3], где были получены точные значения критических показателей. При нашем подходе $k = -\frac{2}{3}$ и уравнение (26) с $\Delta_\epsilon^{(0)} = \frac{1}{2}$ и $\Delta_\sigma^{(0)} = \frac{1}{16}$ дает значения

$$\Delta_\epsilon = \frac{2}{3}, \quad \Delta_\sigma = \frac{1}{6}$$

физической масштабной размерности поля плотности энергии $\epsilon \propto \psi_+ \psi_-$ и поля намагниченности σ , соответственно. Таким образом, критические показатели удельной теплоемкости и спонтанной намаг-

ниченности находятся по формулам

$$\alpha \equiv \frac{1 - 2\Delta_\epsilon}{1 - \Delta_\epsilon} = -1, \quad \beta \equiv \frac{\Delta_\sigma}{1 - \Delta_\epsilon} = \frac{1}{2}$$

соответственно, что полностью согласуется с результатами работы [3].

В более общем случае можно изучить квантовую гравитацию, индуцированную любой “минимальной” конформной теорией поля с центральным зарядом Вирасоро $d \leq 1$ и размерностями $\Delta^{(0)}$, заданными спектром Каца [5]. Поразительно, что в этом случае уравнение (26) показывает, что “гравитационное одевание” преобразует вырожденные размерности Вирасоро Δ_{mn} в значения

$$\Delta_{mn} = -\frac{1+k}{2} \pm \left[(k+2) \frac{n}{2} - \frac{m}{2} \right], \quad (28)$$

которые соответствуют вырожденному представлению $SL(2, R)$ -алгебры Каца–Муди. В частности, так как “минимальные” конформные теории связаны с критическим поведением q -позиционной модели Поттса [6] с $0 \leq q \leq 4$, то мы можем предсказать критические показатели q -позиционной модели Поттса на неупорядоченной плоской решетке (см. [3]):

$$\alpha = 2 \frac{k+1}{k}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad (29)$$

где k связано с параметром q согласно результату работы [6]:

$$q = 4 \cos^2 \left(\pi \frac{k+1}{k+2} \right). \quad (30)$$

Наконец мы сделаем предположение о специфически гравитационном показателе - так называемой “струнной восприимчивости” γ . Этот показатель определяет зависимость статистической суммы от больших площадей

$$Z(A) \propto e^{m^2 A} A^{\gamma-3} dA, \quad (31)$$

где A — полная площадь $2D$ -мерного пространства (сферической топологии), являющаяся параметром, зависящим от обрезания. Предположим, что в области $d \leq 1$ этот показатель задается решением уравнения (26) с $\Delta^{(0)} = 0$, то есть

$$\gamma = -k - 1, \quad (32)$$

и k определяется при помощи (27). Выражение (32) согласуется с полуклассической ($d \rightarrow -\infty$) оценкой [7]. Более того, для некоторого числа значений d , а именно $d = -2, 0$ и $\frac{1}{2}$ показатель γ известен точно ($\gamma = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$, соответственно) из точных решений подходящих неупорядоченных планарных решеточных моделей [2, 3]. Предложенная формула хорошо соответствует всем этим точкам.

Заметим, что приведенные выше формулы, формально продолженные в физически наиболее интересную область $d > 1$, дают комплексное значение для центрального заряда l и, вообще говоря, комплексные значения показателей. Таким образом, ожидается, что при $d = 1$ происходит некий тип фазового перехода. Природа этого перехода и характер режима "сильной гравитации" при $d > 1$ остаются наиболее важными нерешенными проблемами.

Литература

1. *Polyakov A.M.*, Mod. Phys. Lett. A **2** (1987) 893.
2. *Boulatov D.V.*, *Kazakov V.A.*, *Kostov I.K.* and *Migdal A.A.*, Nucl. Phys. B**257** (1986) 641; *David F.*, Nucl. Phys. B**257** [FS 14] (1985) 45.
3. *Kazakov V.A.*, Phys. Lett. **119A** (1986) 140; *Boulatov D.V.*, *Kazakov V.A.*, Phys. Lett. **184B** (1987) 247; *Kazakov V.A.*, Nucl. Phys. B, in Press.
4. *Belavin A.A.*, Talk given at Kyoto Superstring Workshop, October 1987, unpublished.
5. *Belavin A.A.*, *Polyakov A.M.* and *Zamolodchikov A.B.*, Nucl. Phys. B**241** (1984) 383.
6. *Dotsenko V.L.S.* and *Fateev V.A.*, Nucl. Phys. **240** (1984) 312.
7. *Zamolodchikov A.B.*, Phys. Lett. **117B** (1982) 87.